΄Ασκηση

α) Να σχεδιαστεί η συνάρτηση

$$f(x)\begin{cases} \sin x\,, & 0 < x \le \pi\,, \\ 0\,, & -\pi \le x < 0\,, \end{cases}$$

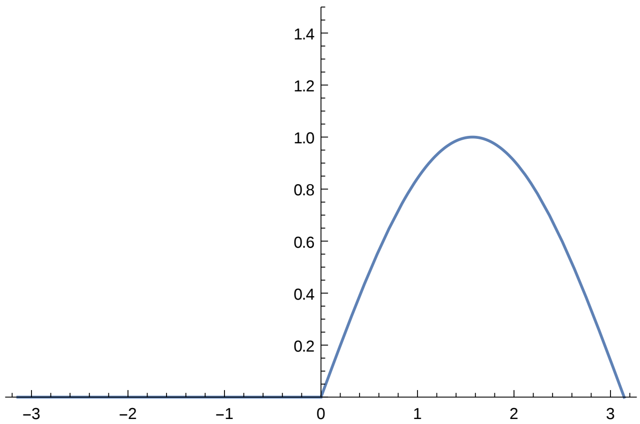
β) Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $y = f(x)$

γ) Να σχεδιαστεί η σειρά Fourier μέχρι τους πρώτους πέντε όρους.

```
Quit
```

```
f[x_] := Piecewise[{{0, -Pi ≤ x < 0}, {Sin[x], 0 < x ≤ Pi}}]
```

```
Plot[f[x], {x, -Pi, Pi}, PlotRange → {0, 1.5}]
```



Οι συντελεστές Fourier

```
a0 = 1 / Pi Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}]
```

$\frac{2}{\pi}$

```
a1 = 1 / Pi Integrate[f[x] Cos[x], {x, -Pi, Pi}]
```

0

```
ak = 1 / Pi Integrate[f[x] Cos[k x], {x, -Pi, Pi}]
```

$\frac{-1 - \mathrm{Cos}[k\,\pi]}{(-1 + k^2)\,\pi}$

```
Simplify[ak , Assumptions → Element[k, Integers]]
```

$-\frac{1 + (-1)^k}{(-1 + k^2)\,\pi}$

```
b1 = 1 / Pi Integrate[f[x] Sin[ x], {x, -Pi, Pi}]
```

$\frac{1}{2}$

```
bk = 1 / Pi Integrate[f[x] Sin[k x], {x, -Pi, Pi}]
```

$-\frac{\mathrm{Sin}[k\,\pi]}{(-1 + k^2)\,\pi}$

```
Simplify[bk , Assumptions → Element[k, Integers]]
```

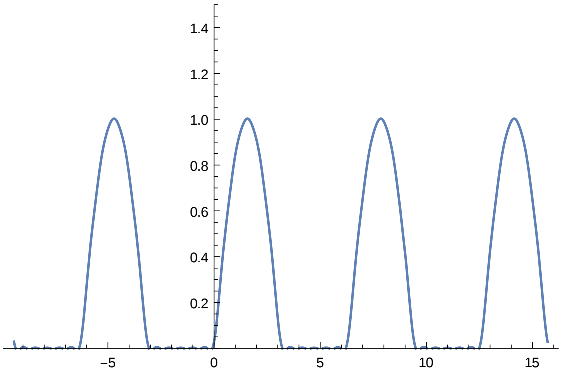
0

Η σειρά Fourier της $f(x)$
μέχρι 5 όρους.

```
ff = Expand[a0 / 2 + 1 / 2 Sin[x] + Sum[ak Cos[k x], {k, 2, 10}]]
```

$$\frac{1}{\pi} - \frac{2\,\mathrm{Cos}[2\,x]}{3\,\pi} - \frac{2\,\mathrm{Cos}[4\,x]}{15\,\pi} - \frac{2\,\mathrm{Cos}[6\,x]}{35\,\pi} - \frac{2\,\mathrm{Cos}[8\,x]}{63\,\pi} - \frac{2\,\mathrm{Cos}[10\,x]}{99\,\pi} + \frac{\mathrm{Sin}[x]}{2}$$

```
Plot[ff, {x, -3 Pi, 5 Pi}, PlotRange → {0, 1.5}]
```



Η γραφική παράσταση της σειράς Fourier.
Παρατηρούμε ότι είναι η 2π-περιοδική επέκταση της $f(x)$.
Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Άσκηση

α) Να σχεδιαστεί η συνάρτηση

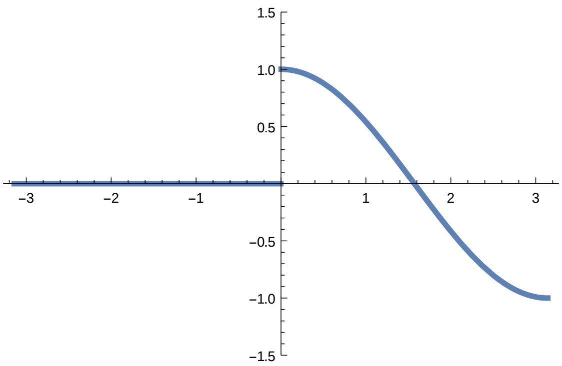
$$f(x)\begin{cases} \sin x\,, & 0 < x \le \pi\,, \\ 0\,, & -\pi \le x < 0\,, \end{cases}$$

β) Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης $y = f(x)$

γ) Να σχεδιαστεί η σειρά Fourier μέχρι τους πρώτους δέκα όρους.

```
f[x_] := Piecewise[{{0, -Pi ≤ x < 0}, {Cos[x], 0 < x ≤ Pi}}]
```

```
Plot[f[x], {x, -Pi, Pi}, PlotRange → {-1.5, 1.5}]
```




```
a0 = 1 / Pi Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}]
```

0

```
a1 = 1 / Pi Integrate[f[x] Cos[x], {x, -Pi, Pi}]
```

$$\frac{1}{2}$$

```
ak = 1 / Pi Integrate[f[x] Cos[k x], {x, -Pi, Pi}]
```

$$-\frac{k\,\mathrm{Sin}[k\,\pi]}{(-1+k^2)\,\pi}$$

```
Simplify[ak , Assumptions → Element[k, Integers]]
```

0

```
b1 = 1 / Pi Integrate[f[x] Sin[ x], {x, -Pi, Pi}]
```

0

```
bk = 1 / Pi Integrate[f[x] Sin[k x], {x, -Pi, Pi}]
```

$$\frac{k\,(1+\mathrm{Cos}[k\,\pi])}{(-1+k^2)\,\pi}$$

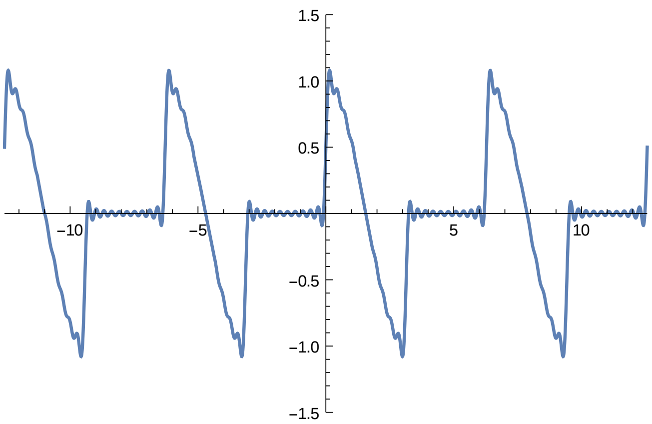
```
Simplify[bk , Assumptions → Element[k, Integers]]
```

$$\frac{\left(1+(-1)^k\right)k}{(-1+k^2)\,\pi}$$

```
ff = Expand[a1 Cos[x] + Sum[bk Sin[k x], {k, 2, 20}]]
```

$$\frac{\mathrm{Cos}[x]}{2}+\frac{4\,\mathrm{Sin}[2\,x]}{3\,\pi}+\frac{8\,\mathrm{Sin}[4\,x]}{15\,\pi}+\frac{12\,\mathrm{Sin}[6\,x]}{35\,\pi}+\frac{16\,\mathrm{Sin}[8\,x]}{63\,\pi}+\frac{20\,\mathrm{Sin}[10\,x]}{99\,\pi}+\frac{24\,\mathrm{Sin}[12\,x]}{143\,\pi}+\frac{28\,\mathrm{Sin}[14\,x]}{195\,\pi}+\frac{32\,\mathrm{Sin}[16\,x]}{255\,\pi}+\frac{36\,\mathrm{Sin}[18\,x]}{323\,\pi}+\frac{40\,\mathrm{Sin}[20\,x]}{399\,\pi}$$

```
Plot[ff, {x, -4 Pi, 4 Pi}, PlotRange → {{-4 Pi, 4 Pi}, {-1.5, 1.5}}]
```



Άσκηση

Έστω η $f(x) = x^2$ ορισμένη στο $[0, 1]$.
1.) Να βρεθεί η σειρά συνημιτόνων της $f(x)$.
2.) Να βρεθεί η σειρά ημιτόνων της $f(x)$,
Απάντηση:
1. Κάνουμε άρτια επέκταση της $f(x)$, οπότε $f(x) = x^2$ στο $[-1, 1]$.

```
a0 = Integrate[x^2, {x, -1, 1}]
```

$$\frac{2}{3}$$

```
ak = Integrate[x^2 Cos[k x Pi], {x, -1, 1}]
```

$$\frac{4\,k\,\pi\,\mathrm{Cos}[k\,\pi] + 2\,(-2 + k^2\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[k\,\pi]}{k^3\,\pi^3}$$

Οι συντελεστές Fourier

```
Simplify[ak , Assumptions → Element[k, Integers]]
```

$$\frac{4\,(-1)^k}{k^2\,\pi^2}$$

```
bk = Integrate[x^2 Sin[k x Pi], {x, -1, 1}]
```

0

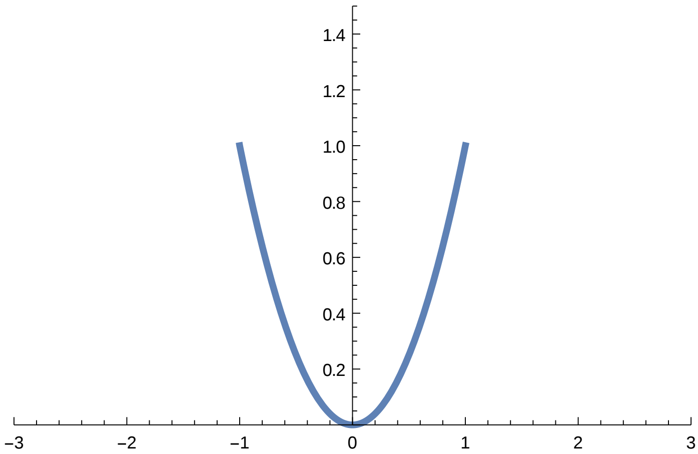
Η σειρά Fourier

```
gg = 1 / 3 + Sum[ak Cos[k Pi x], {k, 1, 10}]
```

$$\frac{1}{3} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[\pi\,x]}{\pi^2} + \frac{\mathrm{Cos}[2\,\pi\,x]}{\pi^2} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[3\,\pi\,x]}{9\,\pi^2} + \frac{\mathrm{Cos}[4\,\pi\,x]}{4\,\pi^2} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[5\,\pi\,x]}{25\,\pi^2} + \frac{\mathrm{Cos}[6\,\pi\,x]}{9\,\pi^2} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[7\,\pi\,x]}{49\,\pi^2} + \frac{\mathrm{Cos}[8\,\pi\,x]}{16\,\pi^2} - \frac{4\,\mathrm{Cos}[9\,\pi\,x]}{81\,\pi^2} + \frac{\mathrm{Cos}[10\,\pi\,x]}{25\,\pi^2}$$

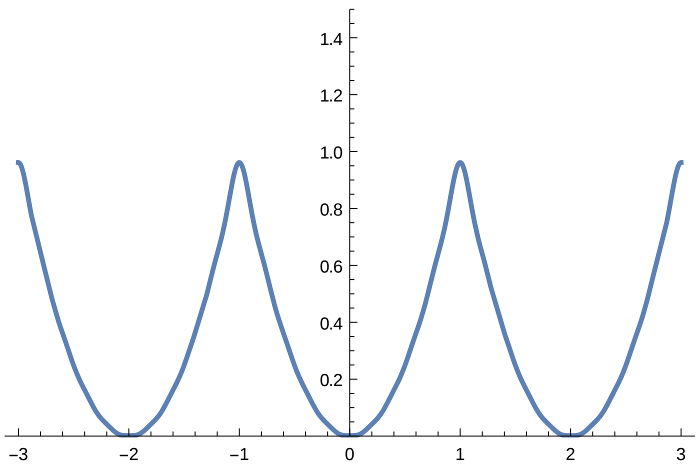
```
Plot[x^2, {x, -1, 1}, PlotRange → {{-3, 3}, {0, 1.5}}]
```

Η γραφική παράσταση της άρτιας επέκτασης της $y = f(x)$




```
Plot[gg, {x, -3, 3}, PlotRange → {0, 1.5}]
```

Η γραφική παράσταση της σειράς Fourier.



Περιττή επέκταση της $f(x)$ στο $[-1,1]$

```
ff[x_] := Piecewise[{{x^2, 0 < x < 1}, {-x^2, -1 < x < 0}}]
```

```
ak = Integrate[ff[x] Cos[k x Pi], {x, -1, 1}]
```

0

Οι συντελεστές Fourier

```
bk = Integrate[ff[x] Sin[k x Pi], {x, -1, 1}]
```

$$-\frac{2\,(2-2\,\mathrm{Cos}[k\,\pi]+k^2\,\pi^2\,\mathrm{Cos}[k\,\pi]-2\,k\,\pi\,\mathrm{Sin}[k\,\pi])}{k^3\,\pi^3}$$

```
Simplify[%, Assumptions → Element[k, Integers]]
```

$$-\frac{2\,\left(2-2\,(-1)^k+(-1)^k\,k^2\,\pi^2\right)}{k^3\,\pi^3}$$

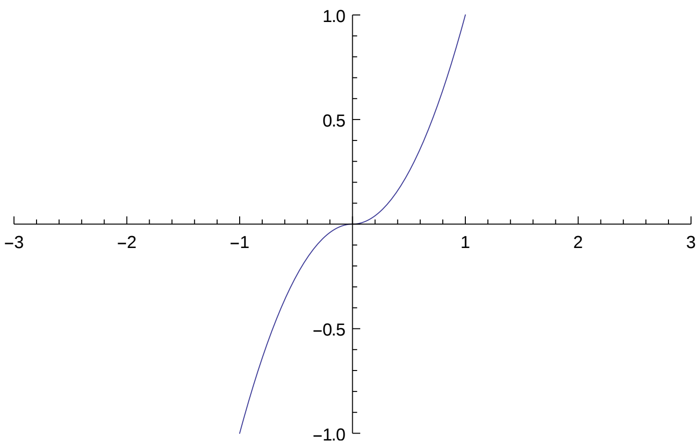
Οι πρώτοι 25 όροι της σειράς Fourier

```
gg = Sum[bk Sin[k Pi x], {k, 1, 25}]
```

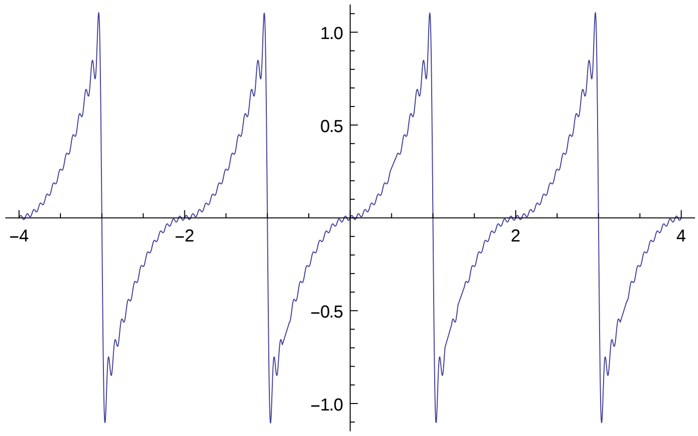
$$-\frac{2\,(4-\pi^2)\,\mathrm{Sin}[\pi\,x]}{\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[2\,\pi\,x]}{\pi}-\frac{2\,(4-9\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[3\,\pi\,x]}{27\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[4\,\pi\,x]}{2\,\pi}-\frac{2\,(4-25\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[5\,\pi\,x]}{125\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[6\,\pi\,x]}{3\,\pi}-\frac{2\,(4-49\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[7\,\pi\,x]}{343\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[8\,\pi\,x]}{4\,\pi}-\frac{2\,(4-81\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[9\,\pi\,x]}{729\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[10\,\pi\,x]}{5\,\pi}-\frac{2\,(4-121\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[11\,\pi\,x]}{1331\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[12\,\pi\,x]}{6\,\pi}-\frac{2\,(4-169\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[13\,\pi\,x]}{2197\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[14\,\pi\,x]}{7\,\pi}-\frac{2\,(4-225\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[15\,\pi\,x]}{3375\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[16\,\pi\,x]}{8\,\pi}-\frac{2\,(4-289\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[17\,\pi\,x]}{4913\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[18\,\pi\,x]}{9\,\pi}-\frac{2\,(4-361\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[19\,\pi\,x]}{6859\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[20\,\pi\,x]}{10\,\pi}-\frac{2\,(4-441\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[21\,\pi\,x]}{9261\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[22\,\pi\,x]}{11\,\pi}-\frac{2\,(4-529\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[23\,\pi\,x]}{12\,167\,\pi^3}-\frac{\mathrm{Sin}[24\,\pi\,x]}{12\,\pi}-\frac{2\,(4-625\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[25\,\pi\,x]}{15\,625\,\pi^3}$$

Η γραφική παράσταση της περιττής επέκτασης της $y=f(x)$.

```
Plot[ff[x], {x, -1, 1}, PlotRange → {{-3, 3}, {-1, 1}}]
```



```
Plot[gg, {x, -4, 4}]
```



Η γραφική παράσταση της σειράς Fourier.
Παρατηρήστε στο φαινόμενο Gibbs
στα σημεία ασυνέχειας και πόσο αργά
συγκλίνει η σειρά στην 2π- περιοδική
επέκταση της περιττής επέκτασης της $f(x)$.