Πίνακες

Ένας πίνακας είναι μια δισδιάστατη λίστα από αριθμούς. Για να δημιουργήσουμε ένα πίνακα στο Matlab εισάγουμε κάθε γραμμή σαν μια ακολουθία αριθμών που ξεχωρίζουν με κόμμα (**,**) ή κενό (space) και μετά χρησιμοποιούμε ερωτηματικό (**;**) για να δηλώσουμε το τέλος της κάθε γραμμής . Π.χ

```
>>A = [–1,6; 7, 11];
```

Ή τον πίνακα

```
>> B = [2,0,1;–1,7,4; 3,0,1];
```

Πράξεις πινάκων

Πολλαπλασιασμός με σταθερό αριθμό

```
>> A = [–2 2; 4 1];
>> C = 2*A
C =
     –4    4
      8    2
```

Η πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων ορίζεται μεταξύ πινάκων με ίδια διάσταση

```
>> A =  [5 1; 0 9];

>> B = [2 –2; 1 1];

>> A + B

ans =

7    -1

1    10

>> A – B

ans =

  3     3

–1     8
```

Ο ανάστροφος ενός πίνακα A οποιασδήποτε διάστασης δηλώνεται με τον πίνακα A^t ο οποίος έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A.

```
>> A = [–1 2 0; 6 4 1]

A =

–1  2    0

  6  4    1

>> B = A'

B =

–1  6

  2  4

  0  1
```

Προσοχή!! Αν ένας πίνακας A έχει στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς η πιο πάνω πράξη θα υπολογίσει και τα συζυγή τους

```
>> C = [1 + i, 4 – i; 5 + 2*i, 3 – 3*i]
C =
   1.0000 + 1.0000i   4.0000 - 1.0000i
   5.0000 + 2.0000i   3.0000 - 3.0000i
>> sym(C)
ans =
[   i + 1,   4 - i]
[ 2*i + 5, 3 – 3*i]
>> D=sym(C')
D =
[ 1 - i, 5 - 2*i]
[ i + 4, 3*i + 3]
```

Για να μην γίνει συζυγής αναστροφή χρησιμοποιούμε **.'**

```
sym(C.')
ans =
[ i + 1, 2*i + 5]
[ 4 - i, 3 - 3*i]
```

- Πολλαπλασιασμός κατά συνιστώσες δυο πινάκων με **ίδια** διάσταση

```
>> A = [2 1; 1 2]; B = [3 4; 5 6];
>> A.*B
ans =
6    4
5    12
```

- Ο συνηθισμένος πολλαπλασιασμός πινάκων στο Matlab υλοποιείται με την πράξη *****

```
>> A*B
ans =
11  13
14  16
>> A = [1 4; 8 0; –1 3]; B = [–1 7 4; 2 1 –2]; % A(3x2) B(2x3)
>> C = A*B
C =
7      11      –4
–8     56      32
7      –4      –10
```

Πράξεις μεταξύ πινάκω εκτός της συνηθισμένης άλγεβρας

- Πρόσθεση ενός αριθμού σε κάθε στοιχείο πίνακα

```
>> A = [1 2 3 4];
>> b = 2;
>> C = b + A
C =3    4    5    6
```

- Διαίρεση πινάκων ίδιας διάστασης (προσοχή όταν διαιρούμε με 0)

```
A = [2 4 6 8]; B = [2 2 3 1];
>> C = A./B
C =
1    2    2    8
>> C = A.\B
C =
1.0000     0.5000      0.5000     0.1250
```

-

Ειδικοί Πίνακες

- Ο **ταυτοτικός πίνακας** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει μονάδες στην διαγώνιο και μηδέν αλλού. Στο Matlab υλοποιείται με την εντολή **eye.**

```
>> eye(4)

ans =

1    0    0    0

0    1    0    0

0    0    1    0

0    0    0    1
```

- Πίνακες με μηδέν όλα τα στοιχεία τους υλοποιούνται με την εντολή **zeros**, και με όλα τα στοιχεία μονάδες με την εντολή **ones**

```
>> ones(2,4)

ans =

    1     1     1     1

    1     1     1     1
```

Προσδιορισμός στοιχείων ενός πίνακα

Στο Matlab μπορούμε να προσδιορίσουμε συγκεκριμένα στοιχεία, γραμμές και στήλες ενός πίνακα.

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]

A =

    1     2     3

    4     5     6

    7     8     9
```

Ένα συγκεκριμένο στοιχείο n-γραμμή m-στήλη προσδιορίζεται ώς εξής

```
>> A(2,3)

ans =

    6
```

Το στοιχείο στην 2-γραμμή, 3-στήλη.

Για να προσδιορίσουμε όλα τα στοιχεία της i-στήλης γράφουμε **A(:,i)**

```
>> A(:,2)

ans =

     2

     5

     8
```

ενώ όλα τα στοιχεία της i-γραμμής γράφουμε **A(i,:)**

```
>> A(2,:)

ans =

     4     5     6
```

Για να λάβουμε τα στοιχεία που βρίσκονται από την i-στήλη μέχρι την j-στήλη γράφουμε

```
>> A(:,2:3)

ans =

     2     3

     5     6

     8     9
```

Μπορούμε να λάβουμε τμήματα ή υποπίνακες επίσης. Για να πάρουμε τα στοιχεία του A που είναι στην 2 και 3 γραμμή που είναι επίσης στην 1 και 2 στήλη γράφουμε **A(2:3,1:2)**

```
>> A(2:3,1:2)

ans =

     4     5

     7     8
```

Μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή στα στοιχεία ενός πίνακα.

```
>> A(1,1) = -8

A =

    -8     2     3

     4     5     6

     7     8     9
```

Για να δημιουργήσουμε ένα κενό διάνυσμα γράφουμε **[ ]** Αυτό μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να διαγράψουμε μια γραμμή ή μια στήλη από ένα πίνακα.

```
>> A(2,:)=[ ]

A =

    -8     2     3

     7     8     9
```

Είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε στήλες και γραμμές ενός πίνακα και να δημιουργήσουμε με αυτές νέους πίνακες. Για παράδειγμα, αντιγράφουμε την πρώτη γραμμή του A 4 φορές και φτιάχνουμε έναν νέο πίνακα E,

```
>> E = A([1,1,1,1],:)

E =

    -8     2     3

    -8     2     3

    -8     2     3

    -8     2     3
```

Ορίζουσες και γραμμικά συστήματα

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A στο Matlab απλά γράφουμε **det(A)**

```
>> A = [1 3; 4 5];

>> det(A)

ans =

    -7
```

Για έναν πιο μεγάλο πίνακα B

```
>> B = [3 -1 2 4; 0 2 1 8; -9 17 11 3; 1 2 3 -3];

>> det(B)

ans =

 -533.0000
```

Δεν χρειάζεται να τονίσουμε ότι ένας τέτοιος υπολογισμός είναι αρκετά επίπονος με μολύβι και χαρτί.

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$5x + 2y - 9z = 44$$

$$-9x - 2y + 2z = 11$$

$$6x + 7y + 3z = 44$$

Για να υπολογίσουμε την λύση (αν υπάρχει), υπολογίζουμε την ορίζουσα του παρακάτων πίνακα

```
>> A = [5 2 -9; -9 -3 2; 6 7 3]

A =

     5     2    -9

    -9    -3     2

     6     7     3

>> det(A)

ans =

  368
```

- Αφού η ορίζουσα είναι μη-μηδενική η λύση του συστήματος υπάρχει.

Το Matlab δημιουργεί την λύση με αριστερή διαίρεση. Πρώτα φτιάχνουμε ένα διάνυσμα με τα στοιχεία στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης

```
>> b = [44;11;5];

>> A\b

ans =

   -5.1250

    7.6902

   -6.0272
```

ή με την εντολή

```
>> sym(A)\b

ans =

     -41/8

  1415/184

 -1109/184
```

Η τάξη ενός πίνακα

Η τάξη ενός πίνακα είναι το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του πίνακα.

```
>> A = [0 1 0 2; 0 2 0 4]

A =

     0     1     0     2

     0     2     0     4
```

Η τάξη του A βρίσκεται με την εντολή **rank**

```
>> rank(A)

ans =

     1

>> B = [1 2 3; 3 0 9; -1 2 -3]

B =

     1     2     3

     3     0     9

    -1     2    -3
```

```
>> rank(B)

ans =

    2
```

γιατί η τρίτη στήλη είναι 3 φορές η πρώτη στήλη

- Ας θεωρήσουμε τώρα συστήματα γραμμικών εξισώσεων με m εξισώσεις και n αγνώστους **A x = b**

  Ο *επαυξημένος πίνακας* είναι ο πίνακας που δημιουργείται επισυνάπτοντας στον A την στήλη b, δηλ [A b].

- Το σύστημα των εξισώσεων έχει λύση αν και μόνο αν

$$r=\text{rank}(A)=\text{rank}(A\ b)$$

Αν r = n τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Αν r < n τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και r άγνωστοι μπορούν να εκφρασθούν σαν γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων n-r

Ας θεωρήσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$x - 2y + z = 12$

$3x + 4y + 5z = 20$

$-2x + y + 7z = 11$

Στο Matlab εισάγουμε

```
 A = [1 -2 1; 3 4 5; -2 1 7]; b = [12; 20; 11];
>> C = [A b]
C =
     1    -2     1    12
     3     4     5    20
    -2     1     7    11
```

Ελέγξτε ότι rank(A)=rank(C)=3, συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση που είναι:

```
>> x=sym(A)\b
x =
  211/48
 -107/48
  151/48
```

Θα λύσουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα με τη παραπάνω μέθοδο.

$3x-9y+8z=2$

$2x-3y+7z=-1$

$x-6y+z=3.$

```
>> A=[3 -9 8;2 -3 7;1 -6 1];b=[2;-1;3];

>> C=[A b];

>> rank(A)

ans =

    2

>> rank(C)

ans =

    2
```

Οπότε μπορούμε να λύσουμε ως προς 2 αγνώστους σε συνάρτηση μιας άλλης.

Ο αντίστροφος και ο ψευδοαντίστροφος πίνακας

Ο αντίστροφος πίνακας ενός πίνακα A συμβολίζεται με A^{-1} και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα $A\,x = b$, τότε η λύση του συστήματος είναι η

$$x = A^{-1}\,b$$

Αλλά στην πράξη ο υπολογισμός του πίνακα A^{-1} είναι αρκετά επίπονη διαδικασία. Αλλά στο Matlab ο υπολογισμός του (αν υπάρχει δηλαδή αν $\det(A) \neq 0$) γίνεται με την χρήση μιας μόνο εντολής της **inv**

```
>> A = [2 3; 4 5];

>> det(A)

ans =

–2

>> inv(A)

ans =

–2.5000      2.0000

1.5000       –1.0000
```

```
>> S = [1 0 -1 2; 4 -2 -3 1; 0 2 -1 1; 0 0 9 8];
>> det(S)
ans =
  -108
>> T=sym(inv(S))
T =
[ -25/27,  13/27,  13/27,  1/9]
[ -17/27, 17/108, 71/108, 1/18]
[ -16/27,   4/27,   4/27,  1/9]
[    2/3,   -1/6,   -1/6,    0]
>> sym(S)*T
ans =
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
```

Επίλυση γραμμικών εξισώσεων συνέχεια

Ας θεωρήσουμε το γραμμικό σύστημα

$3x - 2y = 5$

$6x - 2y = 2$

```
>> A = [3 –2; 6 –2]; b= [5;2];
>> det(A)
ans =
6
```

Αφού η λύση υπάρχει και είναι μοναδική τότε είναι η

```
>> x = inv(A)*b
x =
–1.0000
–4.0000
```

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων

$x + 2y - z = 3$

$5y + z = 0$

Προφανώς το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων

```
>> A= [3 2 –1; 0 4 1]; b = [7;2];
>> rank(A)
ans =
2
>> rank(C)
ans =
2
>> x = A\b
x =
2.0000
0.5000
0
```

Η λύση που μας δίνει το Matlab είναι για μια ειδική τιμή της άγνωστης μεταβλητής z (z=0), αλλά η z μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Μια άλλη λύση μπορεί να βρεθεί με την εντολή **pinv** που υπολογίζει τον ψευδοαντίστροφο του πίνακα A. Αυτός είναι ένας πίνακας X με ίδιες διαστάσεις όπως ο A^t και ικανοποιεί τις σχέσεις

A*X*A = A, X*A*X = X , και A*X, X*A είναι Hermitian.

```
>> sym(pinv(A))

ans =

[ 17/63, -1/9]

[  2/63,  2/9]

[ -8/63,  1/9]

>> sym(pinv(A))*b

ans =

  5/3

  2/3

 -2/3
```