Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας ΙΙ

	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii	ix	x
Σημειώστε στα κουτιά τον αριθμό που αντιστοιχεί στην απάντηση που θεωρείτε ορθή για κάθε ένα από τα παρακάτω ερωτήματα										

Ερωτήματα

i Έστω $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση τέτοια που

$$\ker T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3\}.$$

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει ;

1 Η απεικόνιση T είναι "1-1" και "επί".
2 Η απεικόνιση T είναι "1-1" και δεν είναι "επί".
3 Η απεικόνιση T δεν είναι "1-1" και είναι "επί".
4 Η απεικόνιση T δεν είναι "1-1" και ούτε "επί".

ii Έστω $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση τέτοια που

$$\ker T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\}.$$

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει ;

1 Η απεικόνιση T είναι "1-1" και "επί".
2 Η απεικόνιση T είναι "1-1" και δεν είναι "επί".
3 Η απεικόνιση T δεν είναι "1-1" και είναι "επί".
4 Η απεικόνιση T δεν είναι "1-1" και ούτε "επί".

iii Έστω $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ μη-μηδενικός γραμμικός τελεστής, τέτοιος που $T^2 = 0$. Ποια από τις παρακάτω ισότητες ισχύει ;

1 $(\dim \ker T, \dim \operatorname{Im} T) = (3, 0)$.
2 $(\dim \ker T, \dim \operatorname{Im} T) = (0, 3)$.
3 $(\dim \ker T, \dim \operatorname{Im} T) = (1, 2)$.
4 $(\dim \ker T, \dim \operatorname{Im} T) = (2, 1)$.

iv Έστω $T \in \mathcal{L}(U)$ μη-μηδενικός τελεστής, τέτοιος που $\ker T = \operatorname{Im} T$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει ;

1 $\dim U$ είναι άρτιος φυσικός και το ελάχιστο πολυώνυμο $m(z)$ του T είναι $m(z) = z$.
2 $\dim U$ είναι άρτιος φυσικός και το ελάχιστο πολυώνυμο $m(z)$ του T είναι $m(z) = z^2$.
3 $\dim U$ είναι περιττός φυσικός και το ελάχιστο πολυώνυμο $m(z)$ του T είναι $m(z) = z$.
4 $\dim U$ είναι περιττός φυσικός και το ελάχιστο πολυώνυμο $m(z)$ του T είναι $m(z) = z^2$.

v Έστω $S, T \in \mathcal{L}(U)$ μιγαδικοί τελεστές, τέτοιοι που $S\,T = T\,S$ για κάθε διάνυσμα $u \in U$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει ;

1 Οι S, T δεν έχουν καμμία ιδιοτιμή κοινή.
2 Οι S, T έχουν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή κοινή.
3 Οι S, T δεν έχουν κανένα ιδιοδιάνυσμα κοινό.
4 Οι S, T έχουν τουλάχιστον ένα ιδιοδιάνυσμα κοινό.

vi Έστω A πίνακας 3×3 τέτοιος που $(A-I)^2=0$ και $\dim\ker(A-I)=2$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει ;

1 Ο A είναι αντιστρέψιμος και είναι διαγωνοποιήσιμος.
2 Ο A είναι αντιστρέψιμος και δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.
3 Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και είναι διαγωνοποιήσιμος.
4 Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

vii Έστω A πίνακας 4×4 ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(z)$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m(z)$, που δίνονται από τις σχέσεις

$$\chi(z)=z^2(z-1)^2, \qquad m(z)=z(z-1)\,.$$

αντίστοιχα. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις ισχύει ;

1 Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και είναι διαγωνοποιήσιμος.
2 Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.
3 Ο A είναι αντιστρέψιμος και είναι διαγωνοποιήσιμος.
4 Ο A είναι αντιστρέψιμος και δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

viii Έστω A πίνακας 4×4 ο οποίος έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi(z)$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m(z)$, που δίνονται από τις σχέσεις

$$\chi(z)=m(z)=z^2(z-1)^2.$$

Με ποιον από τους παρακάτω πίνακες είναι όμοιος ο A ;

1 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **2** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **3** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ix Έστω A μιγαδικός πίνακας 4×4 τέτοιος που $A^3+A^2=A+I$. Άν ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε ποια είναι τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα $m(z)$ του A ;

1 $m_1(z)=(z+1)(z-1)$, $m_2(z)=(z-1)\,(z+1)^2$.
2 $m_1(z)=(z+1)(z-1)$, $m_2(z)=(z-1)^2(z+1)$.
3 $m_1(z)=(z+1)^2$, $m_2(z)=(z-1)^2(z+1)$.
4 $m_1(z)=(z+1)^2$, $m_2(z)=(z-1)(z+1)^2$.

x Έστω A ο μιγαδικός, μη διαγωνοποιήσιμος, πίνακας 4×4 του ερωτήματος **ix**. Ποιες είναι τις παρακάτω είναι οι πιθανές μορφές Jordan του πίνακα A;

1 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **2** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **4** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας των απαντήσεων

Αν έχετε απαντήσει σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα τότε μπορείτε να ελέγξετε την ορθότητα των απαντήσεών σας μέσω ενός τετραγωνικού πίνακα που είναι γνωστός ως το *τετράγωνο του Πολύβιου*. Για ευνόητους λόγους θα χρησιμοποιήσουμε μια τροποποιημένη μορφή του που δίνεται από

	1	2	3	4
1	Α	Β	Γ	Δ
2	Ε	Ζ	Η	Κ
3	Μ	Ν	Ξ	Ο
4	Ρ	Σ	Τ	Ω

Οποιοδήποτε γράμμα που εμφανίζεται στον παραπάνω πίνακα μπορεί να αντιστοιχηθεί μονοσήμαντα σε ένα ζευγάρι φυσικών αριθμών που ο καθένας παίρνει τιμές από το 1 μέχρι το 4, όπως ακριβώς δηλώνονται τα στοιχεία ενός πίνακα 4×4. Για παράδειγμα το γράμμα Κ αντιστοιχεί στο ζευγάρι $(2, 4)$ (2 γραμμή, 4 στήλη). Με αυτόν τον τρόπο μια αλληλουχία των γραμμάτων που φτιάχνει μια λέξη-πρόταση (και η οποία μπορεί να φτιαχτεί με τα παραπάνω γράμματα) αντιστοιχεί σε μια αλληλουχία ζευγαριών φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, αφού

$$\begin{array}{ccccc} \text{Κ} & \text{Ρ} & \text{Η} & \text{Τ} & \text{Η} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (2,4) & (4,1) & (2,3) & (4,3) & (2,3) \end{array}$$

η λέξη ΚΡΗΤΗ αντιστοιχεί στην αλληλουχία ζευγαριών (2,4) (4,1) (2,3) (4,3) (2,3). Αν έχετε απαντήσει σε όλα τα ερωτήματα i-x βάλτε τους αριθμούς που έχετε σημειώσει κατ' αντιστοιχία με την εξής αλληλουχία των ερωτημάτων (ii,iv) (iii,v) (ix,vi) (x,i) (vii,viii). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το τετράγωνο του Πολύβιου αντιστοιχείστε την αλληλουχία των ζευγαριών αριθμών σε γράμματα. Αν έχετε απαντήσει σωστά θα πάρετε ως αποτέλεσμα μια λέξη με πέντε γράμματα που θα σας πληροφορεί για την ορθότητα των απαντήσεών σας. Δηλαδή

$$\begin{array}{ccccc} (\text{ii}, \text{iv}) & (\text{iii}, \text{v}) & (\text{ix}, \text{vi}) & (\text{x}, \text{i}) & (\text{vii}, \text{viii}) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (\times, \times) & (\times, \times) & (\times, \times) & (\times, \times) & (\times, \times) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{array}$$

Προφανώς, ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία (φορά των βελών προς τα πάνω) με αφετηρία την λέξη με πέντε γράμματα που λαμβάνετε έχοντας απαντήσει σωστά στα ερωτήματα i-x, θα βρείτε ποια είναι η ορθή απάντηση που αντιστοιχεί στα ερωτήματα i-x. Αν θεωρείτε ότι γνωρίζετε την λέξη και επιλέγετε τον αντίστροφο δρόμο για να βρείτε τις ορθές απαντήσεις στα ερωτήματα (για ορισμένα και ελπίζω όχι για όλα), τότε προσπαθήστε να αιτιολογήσετε την ορθότητα των υπόλοιπων απαντήσεων.

Σας εύχομαι καλό πάσχα. Ειλικρινά.