10 Το θεώρημα του Taylor - Σειρές Taylor

Αν η f έχει παράγωγο f' σ'ένα διάστημα I, και αν η f' με την σειρά της είναι παραγωγίσιμη στο I, σημειώνουμε την παράγωγο της f' με f'' και ονομάζουμε την f'' την δεύτερη παράγωγο της f. Συνεχίζοντας επαγωγικά με αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε διαδοχικά τις συναρτήσεις

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ \ldots, f^{(n)}$$

στις οποίες η καθεμιά συνάρτηση είναι η παράγωγος της προηγούμενης συνάρτησης. Η $f^{(n)}$ ονομάζεται η n-παράγωγος, ή η n-τάξης παράγωγος της f.

Για να υπάρχει η $f^{(n)}(x)$ σε ένα σημείο x, θα πρέπει η $f^{(n-1)}(t)$ να υπάρχει σε μια περιοχή του x (ή σε μια περιοχή της μορφής $[x, \varepsilon)$ ή $(\varepsilon, x]$ αν το x είναι άκρο του πεδίου ορισμού της f), και η $f^{(n-1)}$ θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x. Αφού η $f^{(n-1)}$ πρέπει να υπάρχει σε μια περιοχή του x, η $f^{(n-2)}$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στην περιοχή αυτή του x.

10.1 Το θεώρημα Taylor

Το θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange: Υποθέτουμε ότι η f ορίζεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που περιέχει τον x_0, και n φυσικός. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η f έχει παραγώγους μέχρι και n τάξης, που είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, και υπάρχει η $f^{(n+1)}(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει κάποιος ξ γνησίως ανάμεσα στους x και x_0 ώστε να είναι

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ και λέγεται n-παραγοντικό[2].

Για $n = 1$ το παραπάνω θεώρημα είναι το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) του διαφορικού λογισμού (δες σελ. 70 Πρόταση 7.8). Το

$$R_n(x, x_0; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

όπου $x < \xi < x_0$ ή $x_0 < \xi < x$, λέγεται σφάλμα τύπου Lagrange.

Γενικά, το θεώρημα μας πληροφορεί ότι η f μπορεί να προσεγγισθεί από ένα πολυώνυμο βαθμού n, και ότι η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το σφάλμα της προσέγγισης αν γνωρίζουμε τις τιμές που φράσσεται η $|f^{(n+1)}(x)|$.

[2] Γενικά, το 0! ορίζεται να είναι 1 και επαγωγικά $n! = n \times (n-1)!$ οπότε $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.

Παράδειγμα 10.1. Για παράδειγμα, έστω $f(x) = \sqrt{x}$ και $x_0 = 4$, $x = 4.00001$ και $n = 2$. Τότε το θεώρημα του Taylor μας πληροφορεί ότι

$$\begin{aligned}\sqrt{4.00001} &= \sqrt{4} + \tfrac{1}{1!}\tfrac{1}{2\sqrt{4}}(4.00001-4) - \tfrac{1}{2!}\tfrac{1}{4\sqrt{4^3}}(4.00001-4)^2 + \tfrac{1}{3!}\tfrac{3}{8\sqrt{\xi^5}}(4.00001-4)^3 \\ &= 2 + 2.5\times 10^{-6} - 1.5625\times 10^{-12} + 6.25\times 10^{-17}\tfrac{1}{\sqrt{\xi^5}} = \\ &= 2.00000249999843750 + 6.25\times 10^{-17}\tfrac{1}{\sqrt{\xi^5}}\end{aligned}$$

για κάποιον ξ με $4 < \xi < 4.00001$. Όμως

$$0 < 6.25\times 10^{-17}\frac{1}{\sqrt{\xi^5}} < \frac{6.25}{\sqrt{4^5}}\times 10^{-17} = 0.1953125\times 10^{-17}$$

οπότε

$$2.00000249999843750 < \sqrt{4.00001} < 2.000002499998437501953125$$

και συνεπώς ο 2.00000249999843750 προσσεγγίζει τον $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια ως και δέκατου έβδομου δεκαδικού ψηφίου. Συγκρίνετε με την προσεγγιστική τιμή

$$\sqrt{4.00001} \approx 2.000002499998437501953121948248$$

με ακρίβεια μέχρι 30 δεκαδικά ψηφία.

10.2 Σειρές Taylor

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I, το οποίο περιέχει το x_0. Τότε για κάθε x στο I και για κάθε φυσικό n ισχύει ο τύπος

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x,x_0;f)$$

όπου $R_n(x,x_0;f)$ το σφάλμα τύπου Lagrange (ή ολοκληρωτικού τύπου όπως θα δούμε παρακάτω). Αν για κάθε x στο I το σφάλμα $R_n(x,x_0;f)$ τείνει να γίνει μηδέν όσο μεγαλώνει το n, τότε ονομάζουμε **σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x)$ στον x_0** το εξής άπειρο άθροισμα:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Μια διεξοδική διαπραγμάτευση των σειρών Taylor προϋποθέτει γνώσεις ακολουθιών και σειρών πραγματικών αριθμών που ξεφεύγει από τους στόχους του μαθήματος. Παρακάτω παραθέτουμε τις σειρές Taylor ορισμένων συνηθισμένων συναρτήσεων στο $x_0 = 0$, καθώς και τα αντίστοιχα διαστήματα σύγκλισης των σειρών

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad (-1 < x \le 1),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \cdots \qquad (-1 \le x \le 1)$$

Από τις παραπάνω σειρές για κατάλληλη επιλογή του x (ποιές είναι αυτές;) βρίσκουμε τους παρακάτω ενδιαφέροντες τύπους:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots, \qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots$$

Μια εναλλακτική μορφή γραφής της σειράς Taylor είναι να θέσουμε την διαφορά $x - x_0 = h$, οπότε $x = x_0 + h$, και το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor γράφεται ως εξής

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + \cdots.$$

10.3 Ασκήσεις στην ενότητα 10

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι μη-τετριμμένοι όροι στην σειρά Taylor στον $x_0 = 0$ της συνάρτησης $y = e^{-x^2}$.

Άσκηση 2. Να αναπτυχθεί το πολυώνυμο $x^3 - x^2 + x + 1$ σε δυνάμεις του $x - 1$.

Άσκηση 3. Γνωρίζοντας την σειρά Taylor στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων που δίνονται στην προηγούμενη σελίδα των σημειώσεων να υπολογισθούν τα ακόλουθα άπειρα αθροίσματα

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}\, \pi^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad ii)\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\,, \qquad iii)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\,.$$

Άσκηση 4. Έστω

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \cdots$$

η σειρά Taylor της $y = f(x)$ στο 0.

Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι άρτια (περιττή) σε κάποιο διάστημα με μέσο 0 αν και μόνο αν η σειρά Taylor περιέχει μόνο δυνάμεις του x με άρτιους (περιττούς) εκθέτες.

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα σε σειρά Taylor στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων που δίνονται στην προηγούμενη σελίδα να αποδειχθεί ότι

$$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \qquad ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\,, \qquad iii)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

$$iv)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 1\,, \qquad v)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}\,, \qquad vi)\ \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = 0\,.$$