11 Το ολοκλήρωμα Riemann

Το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού οποιασδήποτε επιφάνειας (όπως κυκλικοί τομείς, δακτύλιοι και δίσκοι, ελλειπτικοί δίσκοι, παραβολικά και υπερβολικά χωρία κτλ) είναι γνωστό από την αρχαιότητα. Για απλά γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα, παραλληλόγραμμα και τραπέζια, ο υπολογισμός του εμβαδού τους είναι σχετικά εύκολη υπόθεση και βρίσκεται μέσω των γνωστών μας στοιχειωδών τύπων. Χρησιμοποιώντας ως δομικά στοιχεία τα γεωμετρικά αυτά σχήματα μπορούμε να φτιάξουμε πιο σύνθετες επιφάνειες, όπως πολυγωνικές, οπότε ο υπολογισμός του εμβαδού των τελευταίων είναι απλά το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων.

Το ουσιαστικό ερώτημα που ανακύπτει είναι αν υπάρχει μια ανάλογη μέθοδος με την οποία να μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό μιας γενικά καμπυλόγραμμης επιφάνειας. Για λόγους απλούστευσης ας θεωρούμε ότι το εμβαδό που θέλουμε να υπολογίσουμε περικλείεται από τον άξονα των x και από το γράφημα μιας συνεχούς [3] συνάρτησης $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

11.1 Η μέθοδος

Επιλέγουμε $n+1$ το πλήθος, διαδοχικά σημεία $x_0 = a\,, x_1\,, x_2\,, \ldots x_{n-1}\,, x_n = b$, και χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n μικρότερα διαδοχικά υποδιαστήματα $[a, x_1] = [x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots [x_{n-2}, x_{n-1}]$ και $[x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1}, b]$. Τα σημεία $x_0 = a\,, x_1\,, x_2\,, \ldots x_{n-1}\,, x_n = b$ λέγονται **διαιρετικά σημεία** και το σύνολό τους $\Delta = \{x_0\,, x_1\,, x_2\,, \ldots x_{n-1}\,, x_n\}$ το ονομάζουμε **διαμέριση** του διαστήματος $[a, b]$.

Για παράδειγμα, μια πολύ απλή διαμέριση είναι η

$$x_0 = a\,,\ x_1 = a+\tfrac{b-a}{n},\ x_2 = x_1+\tfrac{b-a}{n} = a+2\,\tfrac{b-a}{n},\ \ldots x_{n-1} = a+(n-1)\,\tfrac{b-a}{n},\ x_n = a+n\,\tfrac{b-a}{n} = b\,,$$

δηλαδή χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους $\frac{b-a}{n}$.

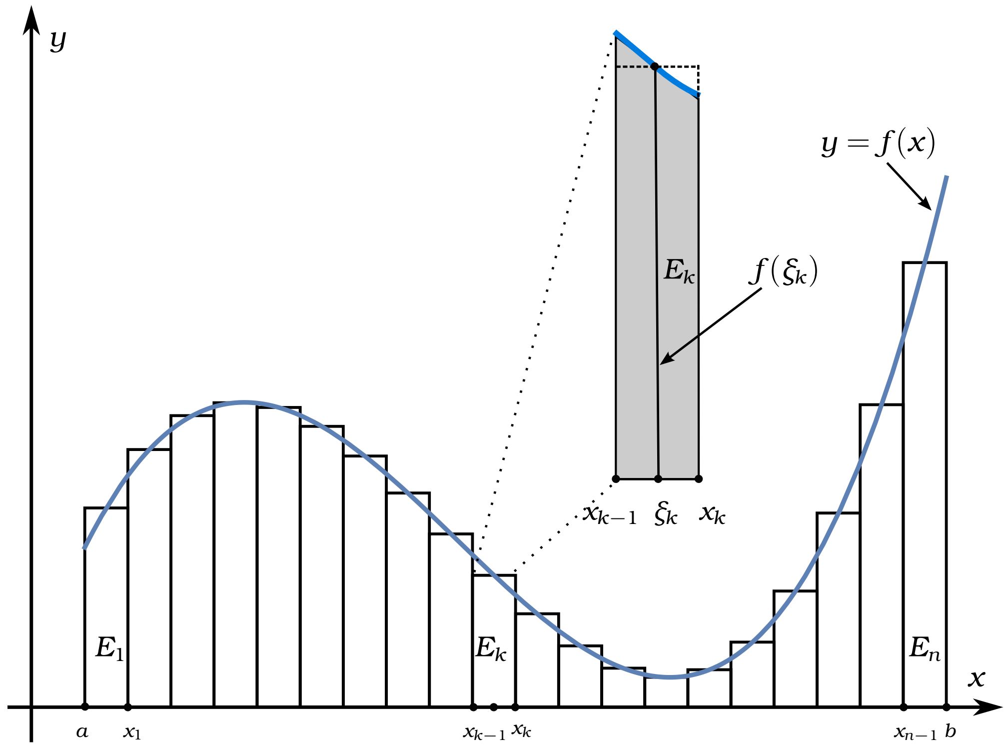
Ονομάζουμε **πλάτος** μιας διαμέρισης Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων που ορίζονται από αυτήν, δηλαδή

$$\text{πλάτος}(\Delta) = \max\{x_k - x_{k-1} \quad | \quad 1 \leq k \leq n\}\,.$$

Η μοναδική απαίτηση για την επιλογή της διαμέρισης Δ είναι ότι το πλάτος της πρέπει να είναι αρκετά μικρό. Αφού επιλέξουμε μια τυχαία διαμέριση Δ του $[a, b]$, παρατηρούμε ότι το εμβαδό E που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το άθροισμα των εμβαδών E_i των επιμέρους στοιχειωδών επιφανειών A_i, $i = 1, \ldots n$, όπου η A_k στοιχειώδης επιφάνεια σχηματίζεται ως εξής: κάτω βάση έχει το ευθύγραμμο τμήμα $[x_{k-1}, x_k]$, πάνω βάση έχει το γράφημα της $y = f(x)$, δεξιά πλευρά έχει το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία με

[3] χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο, αφού όπως θα δούμε παρακάτω μια συνάρτηση μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann χωρίς να είναι συνεχής στο $[a, b]$.

συντεταγμένες $(x_k, 0)$ και $\big(x_k, f(x_k)\big)$, κι αριστερή πλευρά το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία με συντεταγμένες $(x_{k-1}, 0)$ και $\big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$.



Σχήμα 33: Χωρισμός σε κατακόρυφες στοιχειώδεις επιφάνειες

Οπότε

$$E = E_1 + \cdots + E_n\,.$$

Ωστόσο, το πρόβλημα υπολογισμού του E παραμένει γιατί ούτε για τις στοιχειώδεις επιφάνειες A_i, $i = 1, \ldots n$, μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο εμβαδό E_i, αφού η πάνω βάση της κάθε A_i είναι μια καμπύλη γραμμή. Αν όμως το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, τότε το κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, και συνεπώς όταν το x διατρέχει ένα οποιοδήποτε από αυτά τα υποδιαστήματα, το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ δεν είναι μεν σταθερό, αλλά μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν αλλάζει σημαντικά, δηλαδή είναι περίπου σταθερό. Αυτό είναι συνέπεια του ότι θεωρήσαμε ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, κι ετσι όσο πιο μικρό είναι το πλάτος της διαμέρισης τόσο πιο μικρές είναι οι διακυμάνσεις του ύψους σε κάθε υποδιάστημα. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε **ενδιάμεσο σημείο** ξ_k στο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, τότε οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$ στο υποδιάστημα αυτό είναι περίπου ίσες με $f(\xi_k)$, και συνεπώς το εμβαδό της στοιχειώδους επιφάνειας A_k είναι περίπου ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου Π_k που έχει βάση το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_k)$. Δηλαδή, το εμβαδό της κάθε επιμέρους στοιχειώδους επιφάνειας A_i είναι περίπου ίσο με

$$E_i \approx f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})\,, \qquad i = 1, 2, \ldots n\,,$$

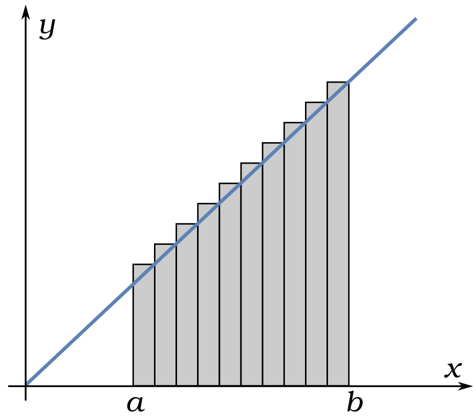
και συνολικά το εμβαδό E που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι περίπου ίσο με

$$E \approx f(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})\,.$$

Το παραπάνω άθροισμα εξαρτάται από τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, την συνάρτηση $f(x)$, την διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots x_n\}$, καθώς και από το σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots \xi_n\}$ των ενδιάμεσων σημείων και θα το συμβολίζουμε με $\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi)$, δηλαδή

$$\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) = f(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})\,.$$

Παράδειγμα 11.1. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό E του τραπεζίου που σχηματίζεται από το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x$, τον x-άξονα στο διάστημα $[a, b]$ και από τις κατακόρυφες παράλληλες ευθείες $x = a$, $x = b$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Προφανώς μπορούμε να υπολογίσουμε το E με στοιχειώδη γεωμετρία αφού είναι απλά η διαφορά του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου με κορυφές τα σημεία με συντεταγμένες $(0, 0)$, $(b, 0)$ και (b, b) και του ορθογωνίου με κορυφές τα σημεία με συντεταγμένες $(0, 0)$, $(a, 0)$ και (a, a). Δηλαδή



Σχήμα 34: Διαμέριση τραπεζίου

$$E = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}\,a^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την μέθοδο υπολογισμού εμβαδού που αναπτύξαμε στα προηγούμενα θεωρώντας την διαμέριση

$$\Delta = \{a, a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, \dots a + n\,\tfrac{b-a}{n} = b\}$$

όπου όλα τα υποδιαστήματα έχουν το ίδιο πλάτος $\frac{b-a}{n}$. Επιπλέον, για ευκολία στις πράξεις επιλέγουμε το σύνολο των ενδιάμεσων σημείων να είναι το

$$\Xi = \{a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, \dots a + n\,\tfrac{b-a}{n} = b\}$$

δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξί άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Τότε το άθροισμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) &= f(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1}) \\
&= \left(a + \tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} + \left(a + 2\,\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} + \cdots + \left(a + n\,\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} \\
&= \left(n\,a + \left[1 + 2 + \cdots + (n-1) + n\right]\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} \\
&= \left(n\,a + \tfrac{n(n+1)}{2}\,\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} \qquad = \quad a(b-a) + \tfrac{n+1}{2\,n}\,(b-a)^2\,,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο για το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου

$$1 + 2 + 3 + \cdots (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Συνεπώς, όταν το πλάτος $\frac{b-a}{n}$ της διαμέρισης γίνει αρκετά μικρό, δηλαδή το n γίνει όσο μεγάλο θέλουμε ($n \to \infty$) τότε το άθροισμα

$$\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) = a(b-a) + \frac{n+1}{2\,n}\,(b-a)^2$$

θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά στην τιμή του εμβαδού E που θέλουμε να υπολογίσουμε. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι

$$E = \lim_{n\to\infty}\left(a(b-a) + \frac{n+1}{2\,n}\,(b-a)^2\right) = a(b-a) + \frac{1}{2}\,(b-a)^2 = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$$

που είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε προηγουμένως με στοιχειώδη γεωμετρία. Συνεπώς η μέθοδος που αναπτύξαμε δουλεύει!

11.2 Το ολοκλήρωμα Riemann

Γενικότερα, έστω $y = f(x)$ ορισμένη και φραγμένη στο διάστημα $[a, b]$, για την οποία δεν υποθέτουμε ότι είναι συνεχής ούτε ότι όλες οι τιμές της είναι μη αρνητικές στο $[a, b]$. Παίρνουμε τυχαία διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχο τυχαίο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \ldots \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) = f(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})\,.$$

Το $\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi)$ ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ ως προς την διαμέριση Δ και το σύνολο Ξ των ενδιάμεσων σημείων. Έστω ότι καθώς το πλάτος της Δ γίνεται όσο μικρό θέλουμε, το άθροισμα $\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi)$ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε σε ένα πραγματικό αριθμό τον οποίο σημειώνουμε με I. Τότε λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι **ολοκληρώσιμη** κατά Riemann στο $[a, b]$ και συμβολίζουμε τον αριθμό I με

$$I = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Συμβολικά τα προηγούμενα συνοψίζονται στο εξής

$$\lim_{\text{πλάτος }(\Delta)\to 0} \Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Φυσικά τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύουν για κάθε διαμέριση Δ και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ. Όμως αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$, τότε για να υπολογίσουμε τον αριθμό I αρκεί να περιοριστούμε σε κάποια διαμέριση Δ και κάποια επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ και να εξασφαλίσουμε ότι το πλάτος της διαμέρισης που επιλέξαμε είναι αρκετά μικρό.

Οι παρακάτω προτάσεις μας εξασφαλίζουν την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann μιας μεγάλης κλάσης συναρτήσεων.

Πρόταση 11.2. *Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Πρόταση 11.3. *Αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται **τμηματικά συνεχής** σε ένα διάστημα $[a, b]$, αν η συνάρτηση ορίζεται στο $[a, b]$ και είναι συνεχής στο $[a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. Επιπλέον, σε κάθε σημείο ασυνέχειας θα πρέπει να υπάρχουν τα αριστερά και δεξιά όρια. Στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ αρκεί να υπάρχει ένα από τα δυό πλευρικά όρια (στο a αρκεί να υπάρχει το από δεξιά όριο και στο b άκρο το από αριστερά όριο).

Πρόταση 11.4. *Αν η $y = f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

11.3 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων Riemann

Πρόταση 11.5. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και λ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Τότε και η $y = \lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\boxed{\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx}$$

Πρόταση 11.6. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε και η $y = f(x) + g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\boxed{\int_a^b \big(f(x) + g(x) \big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx}$$

Συνδυάζοντας τις δυο προηγούμενες προτάσεις έχουμε ότι αν οι συναρτήσεις $y = f(x)$ $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και λ, μ είναι δυο πραγματικοί αριθμοί τότε και η $y = \lambda f(x) + \mu g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x) \big)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

Γενικότερα, αν οι συναρτήσεις $y = f_1(x)$, ... $y = f_k(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε και η $y = \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^b \big(\lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x) \big)\, dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \ldots + \lambda_k \int_a^b f_k(x)\, dx$$

Πρόταση 11.7. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε και η $y = f(x)\, g(x)$ είναι και αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Όμως δεν υπάρχει τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου δυο συναρτήσεων με τα επιμέρους ολοκληρώματα των δυο συναρτήσεων.

Πρόταση 11.8. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και υπάρχει κάποιος $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \geq M$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε και η $y = \frac{1}{f(x)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Όπως και στην προηγούμενη πρόταση για το γινόμενο συναρτήσεων, δεν υπάρχει τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

Πρόταση 11.9. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται στο $[a, b]$ εκτός από σε ένα πεπερασμένου πλήθους σημείων του $[a, b]$. Αν μία από τις δυο συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε και η άλλη είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Πρόταση 11.10. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $[a, b]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και σε κάθε υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$.*

Πρόταση 11.11. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και ισχύει*

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx}$$

Γενικότερα, αν η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στα $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$ ... $[a_{k-1}, a_k]$ τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a_1, a_k]$ και ισχύει

$$\int_{a_1}^{a_k} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx$$

Πρόταση 11.12. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και ισχύει ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Ειδικότερα,

α) Αν η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και το A είναι ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα της $f(x)$ στο $[a, b]$, δηλαδή $f(x) \leq A$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq A\,(b-a)\,.$$

β) Αν η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και το K είναι ένα οποιοδήποτε κάτω φράγμα της $f(x)$ στο $[a, b]$, δηλαδή $f(x) \geq K$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq K\,(b-a)\,.$$

Πρόταση 11.13. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε και η $|f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη x στο $[a, b]$ και ισχύει ότι*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

11.4 Μέση τιμή συνάρτησης

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Ορίζουμε ως **μέση τιμή της** $y = f(x)$ **στο** $[a, b]$ τον αριθμό

$$\boxed{\text{μέση τιμή της } f(x) \text{ στο } [a, b] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Αν η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός μ τότε

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mu\;dx$$

που σημαίνει ότι η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι η τιμή εκείνη που οφείλει να έχει η σταθερή συνάρτηση στο $[a, b]$ έτσι ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το οκοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$.

Πρόταση 11.14. (Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$ τέτοιος ώστε*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$$

Για παράδειγμα, η $y = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, 2]$ και $\frac{1}{2-1}\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$. Ο ξ στο $[1, 2]$ για τον οποίο ισχύει $f(\xi) = \frac{3}{2}$ είναι ο $\xi = \frac{3}{2}$.

11.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Τα παρακάτω αθροίσματα είναι αθροίσματα Riemann. Να γραφεί το όριό τους καθώς το $n \to \infty$ στην μορφή ενός ολοκληρώματος Riemann στο $[0, 1]$

α)
$$\frac{n}{1^2+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2} + \frac{n}{n^2+n^2}$$

β)
$$\frac{1}{1^2+n^2} + \frac{2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n-1}{(n-1)^2+n^2} + \frac{n}{n^2+n^2}$$

γ)
$$\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+(n-1)} + \sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$$

(*Υπόδειξη:* Για το α) παρατηρούμε ότι ο k-στός όρος του αθροίσματος γράφεται

$$\frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\,\frac{1}{n} = f(\xi_k)\,(x_x - x_{k-1})$$

για κατάλληλη συνάρτηση $y = f(x)$ στο $[0, 1]$, κατάλληλη διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ και κατάλληλη επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_0, \ldots x_n\}$. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι το πλάτος της διαμέρισης γίνεται όσο μικρό θέλουμε όταν $n \to \infty$, οπότε έχουμε ένα ολοκλήρωμα Riemann. Με όμοιο τρόπο λύνονται κι οι υπόλοιπες.)

Άσκηση 2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$ και $A = f(a)$, $B = f(b)$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει η $x = f^{-1}(y)$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_A^B f^{-1}(y)\,dy = B\,b - A\,a\,.$$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας αυτής;
(*Υπόδειξη*: Θεωρήστε διαμέριση $\Delta_x = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχη διαμέριση $\Delta_y = \{y_0 = A, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = B\}$ του $[A, B]$ με $y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots n$. Τα αθροίσματα $\Sigma_1 = y_1(x_1 - x_0) + \cdots + y_n(x_n - x_{n-1})$ και $\Sigma_2 = x_0(y_1 - y_0) + \cdots + x_{n-1}(y_n - y_{n-1})$ είναι αθροίσματα Riemann για το πρώτο και δεύτερο ολοκλήρωμα, αντίστοιχα, για κατάλληλα ενδιάμεσα σημεία (ποιά είναι αυτά ;) Υπολογίστε το άθροισμα $\Sigma_1 + \Sigma_2$ των δυο αθροισμάτων.)

Άσκηση 3. Να αποδειχθεί ότι

$$i)\quad \frac{3}{4}e^{-2} \le \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\,e^{-x}\,dx \le 3\,e^{-1/2}\,, \qquad ii)\quad t\,e^{-2t} \le \int_t^{2t} e^{-x}\,dx \le t\,e^{-t}\,, \quad (t > 0)$$

χωρίς να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα.

Άσκηση 4. Να βρεθεί η μέση τιμή της $y = x$ στο διάστημα $[-1, 1]$.