12 Το αόριστο ολοκλήρωμα

12.1 Αντιπαράγωγοι

Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα I, οποιουδήποτε τύπου. Αν μια δεύτερη συνάρτηση $y = F(x)$, που ορίζεται στο ίδιο διάστημα I, έχει την ιδιότητα

$$F'(x) = f(x)\,, \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I\,,$$

τότε η $y = F(x)$ λέγεται **αντιπαράγωγος** ή **παράγουσα** ή **αρχική συνάρτηση** της $y = f(x)$ στο διάστημα I.

Για παράδειγμα, η $y = \ln|x|$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Έστω ότι η $y = F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $y = f(x)$ στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής

$$y = F(x) + c$$

όπου c είναι ένας οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του x), και από καμιά άλλη συνάρτηση.

Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της $y = x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$y = \frac{y^3}{3} + c$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερή.

Θα πρέπει να προσεχθεί ότι αν μια συνάρτηση έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης δυο ξένων διαστημάτων, τότε δεν σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι σταθερή στην ένωση των δυο αυτών διαστημάτων. Για παράδειγμα η βηματική συνάρτηση

$$y = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ 1\,, & x > 0 \end{cases}$$

έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αφού είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Όμως, δεν είναι σταθερή στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αφού η τιμή της εξαρτάται από το x καθώς αυτό διατρέχει το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Οπότε καταλαβαίνουμε γιατί οι παραπάνω διατυπώσεις για τις αντιπαραγώγους αναφέρονται σε διάστημα και όχι σε στην ένωση περισσότερων του ενός διαστημάτων.

Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = \ln|x| + c$, όπου c μια σταθερά. Όμως, οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι όλες οι συναρτήσεις τις μορφής

$$y = \begin{cases} \ln|x| + c_1\,, & x < 0 \\ \ln|x| + c_2\,, & x > 0 \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι δυο αυθαίρετες σταθερές (ανεξάρτητες του x), όχι απαραίτητα ίσες.

12.2 Αόριστα ολοκληρώματα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Θεωρούμε τώρα τις εξής επεκτάσεις του συμβόλου του ολοκληρώματος

$$(i) \qquad \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

δηλαδή επιτρέπεται να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στο κάτω μέρος του συμβόλου του ολοκληρώματος και το μικρότερο στο πάνω μέρος. Επίσης, αν η $y = f(x)$ ορίζεται μόνο στο σημείο a, τότε την θεωρούμε ολοκληρώσιμη και γράφουμε

$$(ii) \qquad \int_a^a f(x)\, dx = 0\,.$$

Οπότε, έχουμε ορίσει το ολοκλήρωμα της $f(x)$ για οποιαδήποτε διάταξη των a, b, με την προϋπόθεση ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αν $b > a$, ή στο $[b, a]$ αν $b < a$, ή στο σημείο a, αν $a = b$. Με αυτές στις επεκτάσεις η ιδιότητα

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx\,,$$

που ισχύει όταν $a < b < c$, επεκτείνεται σε όλες τις περιπτώσεις διάταξης των a, b, c, με τη προϋπόθεση η $y = f(x)$ να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από το μικρότερο μέχρι το μεγαλύτερο από τα a, b, c.

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε ένα διάστημα I οποιουδήποτε τύπου και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο a του I και στην συνέχεια θεωρούμε ένα x να διατρέχει το I και για κάθε τέτοιο x θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^x f(t)\, dt\,.$$

Αυτό είναι ένας αριθμός η τιμή του οποίου εξαρτάται από το x. Τέλος, παίρνουμε και μια αυθαίρετη σταθερή c που δεν εξαρτάται από τον x και ορίζουμε, λοιπόν στο I μια συνάρτηση με τύπο

$$y = F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + c\,.$$

Την συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε το **αόριστο ολοκλήρωμα** της $y = f(x)$ στο διάστημα I. Ο αριθμός a που εμφανίζεται στο κάτω άκρο του ολοκληρώματος λέγεται το **αρχικό σημείο** του αόριστου ολοκληρώματος

$$y = F(x) = \int_a^x f(x)\, dx + c\,.$$

Η επιλογή του a είναι αυθαίρετη και αν θέλουμε να το αντικαταστήσουμε με ένα άλλο αριθμό a' στο διάστημα I, κάνουμε το εξής απλό

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,d\,t + c = \int_a^{a'} f(t)\,d\,t + \int_{a'}^x f(t)\,d\,t + c = \int_{a'}^x f(t)\,d\,t + c'\,,$$

όπου

$$c' = \int_a^{a'} f(t)\,d\,t + c\,,$$

μια νέα αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή, η αντικατάσταση του αρχικού σημείου $a \in I$ από κάποιο άλλο αριθμό $a' \in I$, ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της σταθεράς c από κάποια άλλη σταθερά c'. Οπότε η καταλληλότερη επιλογή του αρχικού σημείου στο αόριστο ολοκλήρωμα είναι αυτή που είναι πιο βολική για τις πράξεις υπολογισμού του ολοκληρώματος $\int_a^x f(t)\,d\,t$.

Για παράδειγμα, για να βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ παίρνουμε αρχικό σημείο το 0 κι έχουμε

$$\int_0^x t\,d\,t = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}\,,$$

κι έτσι το αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x$ είναι το $y = \frac{x^2}{2} + c$, όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Αν επιλέξουμε ένα άλλο αρχικό σημείο a τότε το αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x$ είναι

$$\int_a^x t\,d\,t = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{t=a}^{t=x} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,,$$

και η σταθερά είναι $c = -\frac{a^2}{2}$

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο του ολοκληρώματος χωρίς όρια στις πάνω και κάτω μεριές για να δηλώσουμε ταυτόχρονα όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $y = f(x)$ σε κάποιο διάστημα I, δηλαδή

$$\boxed{\int f(x)\,d\,x = \int_a^x t\,d\,t + c\,.}$$

και με αυτόν το τρόπο δηλώνουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων, δηλαδή μια οικογένεια συναρτήσεων που παραμετρικοποιούνται από μια πραγματική σταθερά c. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann μπορούμε να αποδείξουμε ότι για το αόριστο ολοκλήρωμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\boxed{\begin{array}{ll} i) & \displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big)\,d\,x = \int f(x)\,d\,x + \int g(x)\,d\,x \\[2em] ii) & \displaystyle\int \big(\lambda f(x)\big)\,d\,x = \lambda \int f(x)\,d\,x \end{array}}$$

12.3 Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.

Πρόταση 12.1. Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.
Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε οποιοδήποτε a στο I και θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$y = F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$$

στο I. Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο ξ στο I, τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και ισχύει

$$F'(\xi) = f(\xi)$$

Ειδικότερα, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε x στο I.

Άμεση απόρροια της παραπάνω πρότασης είναι ότι αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμά της στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I, και αντιστρόφως.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι απόρροια του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού και έχουν μεγάλη πρακτική σημασία τόσο στον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων όσο και ορισμένων ολοκληρωμάτων Riemann:

Πρόταση 12.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο I και έστω ότι η $y = F(x)$ είναι μια αντιπαράγωγός της στο I.*

α) Τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x)$ στο I είναι ακριβώς όλες οι συναστήσεις $y = F(x) + c$, όπου c μια σταθερά, δηλαδή

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (x \text{ στο } I)}$$

β) Το ολοκλήρωμα Riemann της $y = f(x)$ σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του I είναι ίσο με την διαφορά των τιμών της $y = F(x)$ στα άκρα του διαστήματος, δηλαδή

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (a,\ b \text{ στο } I)}$$

Παρακάτω δίνονται μερικά βασικά αόριστα ολοκληρώματα και τα αντίστοιχα ορισμένα ολοκληρώματα Riemann καθώς και τα αντίστοιχα διαστήματα που ισχύουν:

Αόριστο	Ορισμένο==+	διαστήματα
$\int 1\, dx = x + c$	$\int_a^b 1\, dx = b - a$	$(-\infty, +\infty)$
$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int_a^b x^{\alpha}\, dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$(-\infty, +\infty)$ $\alpha \in \mathbb{N}$ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \leq -2$ $[0, +\infty)$ $\alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{Z}$ $(0, +\infty)$ $\alpha < 0, \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert b\rvert - \ln\lvert a\rvert = \ln\frac{b}{a}$	$(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$
$\int \alpha^x\, dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$	$\int_a^b \alpha^x\, dx = \frac{\alpha^b - \alpha^a}{\ln\alpha}$	$(-\infty, \infty)$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a$	$(-\infty, \infty)$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	$\int_a^b \sin x\, dx = \cos a - \cos b$	$(-\infty, \infty)$
$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c$	$\int_a^b \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan b - \tan a$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx = -\cot x + c$	$\int_a^b \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx = \cot a - \cot b$	$\left(k\pi, \pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$	$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin b - \arcsin a$	$(-1, 1)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\arccos x + c$	$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arccos a - \arccos b$	$(-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$	$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan b - \arctan a$	$(-\infty, +\infty)$

Για τα ολοκληρώματα 9, 10 σημειώστε ότι ισχύει η ταυτότητα $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.