# 13 Μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων Riemann

## 13.1 Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής

**Πρόταση 13.1.** *Έστω ότι η $u = f(y)$ είναι συνεχής στο διάστημα $I$, η $y = g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $I$ και οι τιμές της $y = g(x)$ περιέχονται στο $I$ (οπότε ορίζεται η σύνθεση $z = f(g(x))$ στο $I$), τότε ισχύει*

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(y)\, dy\Big|_{y=g(x)} \qquad (x \text{ στο } I)}$$

*Για το ορισμένο ολοκλήρωμα ισχύει ότι*

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy \qquad (a, b \text{ στο } I)}$$

*Παράδειγμα* 13.2.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx &= \int \frac{1}{x^2+1} \frac{d(x^2+1)}{dx}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy\Big|_{y=x^2+1} = \big(\ln|y| + c\big)\Big|_{y=x^2+1} = \\ &= \ln(x^2+1) + c\end{aligned}$$

## 13.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες

**Πρόταση 13.3.** *Αν οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις κι έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα $I$, τότε ισχύει*

$$\boxed{\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dy \qquad (x \text{ στο } I)}$$

*Για το ορισμένο ολοκλήρωμα ισχύει*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dy \qquad (a, b \text{ στο } I)}$$

*Παράδειγμα* 13.4.

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= \int \ln x \frac{d\,(x)}{dx}\, dx = x \ln x - \int \frac{d\,(\ln x)}{dx}\, x\, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx = \\ &= x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + c \qquad \text{στο διάστημα } (0, +\infty)\end{aligned}$$

*Παράδειγμα* 13.5.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \sin x\, dx &= -\int_0^{\pi} x \frac{d(\cos x)}{dx}\, dx = -\pi \cos\pi + 0 \cos 0 + \int_0^{\pi} \frac{d\,(x)}{dx} \cos x\, dx = \\ &= \pi + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi\end{aligned}$$

## 13.3 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Ο υπολογισμός μιας μεγάλης κλάσης ολοκληρωμάτων ανάγεται, με κατάλληλη αντικατάσταση, στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητών συναρτήσεων της μορφής

$$\int r(x)\, dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\, dx\,.$$

**Πρώτο βήμα:** Αν $m \geq n$ τότε εκτελούμε στην διαίρεση των πολυώνυμων και βρίσκουμε πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$r(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = p(x) + \frac{q(x)}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

όπου ο βαθμός του $q(x)$ να είναι $< n$ για κάθε $x$. Ο υπολογισμός του $\int p(x)\, dx$ είναι εύκολος αφού πρόκειται για ολοκλήρωμα πολυωνυμικής συνάρτησης, οπότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος ανάγεται ουσιαστικά στην περίπτωση που $m < n$, που περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα.

**Δεύτερο βήμα:** Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή το οποίο είναι αρκετά δύσκολο αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις είναι εφικτό. Γενικά ισχύει το εξής:

Κάθε πολυώνυμο

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων στην μορφή

$$B(x) = b_n x^n + \cdots + b_0 = b_n (x-a)^k \cdots (x-\gamma)^{\lambda} \Big((x-\mu)^2 + \nu^2\Big)^{\rho} \cdots \Big((x-\epsilon)^2 + \delta^2\Big)^{\tau}$$

όπου οι εκθέτες $\kappa, \ldots \lambda, \rho, \ldots, \tau$ είναι φυσικοί αριθμοί με $\kappa + \cdots + \lambda + 2\rho + \cdots + 2\tau = n$ και οι αριθμοί $\nu, \ldots, \delta$ που εμφανίζονται στους δευτεροβάθμιους παράγοντες είναι όλοι $> 0$. Στην προηγούμενη ανάλυση, οι παράγοντες $(x-a)$, ..., $(x-\gamma)$ αντιπροσωπεύουν τις πραγματικές ρίζες του $B(x)$ και οι αντίστοιχοι εκθέτες την πολλαπλότητα των ριζών. Οι δευτεροβάθμιοι όροι αντιπροσωπεύουν τις μιγαδικές ρίζες του πολυνωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες την πολλαπλότητά τους. Παρατηρείστε ότι οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται με τις συζυγείς τους

$$(x-\mu)^2 + \nu^2 = (x - \mu - i\,\nu)(x - \mu + i\,\nu)$$

Επίσης, οι πραγματικές ρίζες $a, \ldots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε. Είναι τα ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $-\infty, a, \ldots, \gamma, +\infty$.

**Τρίτο βήμα:** Αναλύουμε την ρητή συνάρτηση $r(x)$ σε **απλούς λόγους** της μορφής

$$\begin{aligned} r(x) = &\left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots \frac{A_k}{(x-a)^k}\right) + \cdots \left(\frac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2} + \cdots \frac{\Gamma_k}{(x-\gamma)^{\bar{n}}}\right) \\ &+ \left(\frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\upsilon^2} + \cdots + \frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\upsilon^2)^\rho}\right) + \cdots \\ &\cdots + \left(\frac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \frac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\right). \end{aligned}$$

Οι αριθμοί $A_1, A_2, \ldots, E_\tau, \Delta_\tau$ είναι άγνωστοι που υπολογίζονται ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με το πολυώνυμο $B(x)$. Στα δυο μέλη της εξίσωσης σχηματίζονται δυο πολυώνυμα ως προς $x$ και εξισώνουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων με τον ίδιο βαθμό στο $x$. Προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα για τα $A_1, A_2, \ldots, E_\tau, \Delta_\tau$ το οποίο και επιλύουμε.

**Τέταρτο βήμα:** Παρατηρώντας τους παραπάνω απλούς λόγους συμπεραίνουμε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της ρητής συνάρτησης ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων τριών τύπων

$$(I) \quad \int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx, \qquad (II) \quad \int \frac{x-\mu}{\big((x-\mu)^2+\upsilon^2\big)^k}\,dx, \qquad (III) \quad \int \frac{1}{\big((x-\mu)^2+\upsilon^2\big)^k}\,dx$$

1) Το ολοκλήρωμα τύπου $(I)$ με την αντικατάσταση $y = x - a$, είτε στο $(-a, 0)$ είτε στο $(a, +\infty)$, ανάγεται στο υπολογισμό ολοκληρώματος που δίνεται στον πίνακα στην σελίδα 98, και τελικά είναι

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + c, & k \geq 2 \\ \\ \ln|x-a| + c, & k = 1 \end{cases}$$

2) Με παρόμοιο τρόπο αντικαθιστώντας $y = (x-\mu)^2 + \upsilon^2$ το ολοκλήρωμα τύπου $(II)$ είναι

$$\int \frac{x-\mu}{\big((x-\mu)^2+\upsilon^2\big)^k}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{((x-\mu)^2+\upsilon^2)^{k-1}} + c, & k \geq 2 \\ \\ \frac{1}{2}\ln((x-\mu)^2+\upsilon^2)^{k-1} + c, & k = 1 \end{cases}$$

3) Το πιο δύσκολο ολοκλήρωμα για να υπολογισθεί είναι το ολοκλήρωμα τύπου $(III)$. Με την αντικατάσταση $y = \frac{x-\mu}{\upsilon}$ ανάγεται στο ολοκλήρωμα

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy.$$

Αν $k = 1$, τότε

$$I_1 = \arctan y + c$$

Αν $k > 1$, παραλείποντας τις λεπτομέρειες, με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες καταλήγουμε σε μια αναδρομική σχέση και επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$I_k = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{y}{y^2+1} + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\arctan y + c$$

*Παράδειγμα* 13.6. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^4}{x^4+x^2-2}\,dx$$

Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή δεν είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον αριθμητή, εκτελούμε την διαίρεση των πολυωνύμων και έχουμε ότι

$$x^4 = (2-x^2) + 1\ \cdot (x^4+x^2-2)\,.$$

Συνεπώς

$$\frac{x^4}{x^4+x^2-2} = 1 + \frac{2-x^2}{x^4+x^2-2}$$

Στην συνέχεια αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι το πολυώνυμο είναι διτετράγωνης μορφής. Θέτοντας $y = x^2$, γίνεται $y^2 + y - 2$ το οποίο αναλύεται στην μορφή $(y-1)(y+2)$, αφού οι ρίζες του είναι οι $1, -2$. Άρα

$$x^4+x^2-2 = (x^2-1)(x^2+2) = (x-1)(x+1)(x^2+2)$$

Αναλύουμε την ρητή συνάρτηση

$$\frac{2-x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{2-x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)}$$

σε απλούς λόγους των παραγόντων στον παρονομαστή κι έχουμε

$$\frac{2-x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με $(x-1)(x+1)(x^2+2)$ κι έχουμε

$$\begin{aligned} 2-x^2 &= A(x+1)(x^2+2) + B(x-1)(x^2+2) + (Cx+D)(x+1)(x-1) \\ &= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (2A+2B-C)x + (2A-2B-D) \end{aligned}$$

Οπότε θα πρέπει να ισχύει στο σύστημα $A+B+C=0$, $A-B+D=-1$, $2A+2B-C=0$, $2A-2B-D=2$. Από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση έχουμε ότι θα πρέπει $C=0$, και

$A+B=0$. Οι υπόλοιπες δυο εξισώσεις, με $A=-B$, γίνονται $-2B+D=-1$, $-4B-D=2$, που λύνονται εύκολα δίνοντας $B=-\frac{1}{6}$ και $D=-\frac{4}{3}$ και επειδή $A=-B$, τότε και $A=\frac{1}{6}$. Άρα

$$\frac{2-x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)}=\frac{1}{6}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}-\frac{4}{3}\frac{1}{x^2+2}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4}{x^4+x^2-2}\,dx &= \int\left(1+\frac{2-x^2}{x^4+x^2-2}\right)dx=\int 1\,dx+\int\frac{2-x^2}{x^4+x^2-2}\,dx\\ &= x+\frac{1}{6}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+1}\,dx-\frac{4}{3}\int\frac{1}{x^2+2}\,dx\\ &= x+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c,\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

## 13.4 Ολοκληρώματα ρητών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Πολλά ολοκληρώματα συναρτήσεων που είναι ρητές συναρτήσεις των βασικών τριγωνομετρικών $\cos x$ και $\sin x$ μετατρέπονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων (που είδαμε πως αντιμετωπίζονται στη προηγούμενη παράγραφο) με την αντικατάσταση

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες εύκολα αποδεικνύεται ότι με αυτήν την αντικατάσταση ισχύει ότι

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\qquad \sin x=\frac{2u}{1+u^2}\qquad\text{και}\qquad \frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2}$$

*Παράδειγμα* 13.7. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}\,du=\int\frac{1}{u}\,du=ln|u|+c=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

σε κάθε διάστημα $(k\pi,\pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ο παρονομαστής της ρητής τριγωνομετρικής συνάρτησης της οποίας το ολοκλήρωμα θέλουμε να υπολογίσουμε μηδενίζεται όταν $x=-\pi$ , όπως στο παράδειγμα. Αν ο παρανομαστής μηδενίζεται σε κάποιο άλλο σημείο $x_0$, τότε με την αλλαγή μεταβλητής $z=x-x_0-\pi$, αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Η περίπτωση όπου ο παρανομαστής δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο τότε η παραπάνω μέθοδος, με κατάλληλες τροποποιήσεις, μπορεί να εφαρμοσθεί αλλά δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

## 13.5 Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων

Θεωρούμε τα ολοκληρώματα των ακόλουθων τριών τύπων

$$(I)\quad \int R(x,\sqrt{1-x^2})\,d\,x \qquad (II)\quad \int R(x,\sqrt{x^2-1})\,d\,x \qquad (III)\quad \int R(x,\sqrt{x^2+1})\,d\,x$$

όπου με $R(s,t)$ δηλώνουμε μια ρητή συνάρτηση ως προς και τα δυο ορίσματά της.

$(I)$ Για το ολοκλήρωμα τύπου $(I)$ το οποίο ορίζεται στο διάστημα $[-1,1]$, εκτελούμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό βρίσκουμε ότι

$$x = \frac{2\,u}{1+u^2}\,.$$

Επιπλέον έχουμε τις ισότητες

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \frac{d\,u}{d\,x} = \frac{(1+u^2)^2}{2(1-u^2)}\,,$$

οπότε το ολοκλήρωμα $(I)$ ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης ως προς την μεταβλητή $u$, που εξετάσαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

$(II)$ Για το ολοκλήρωμα τύπου $(II)$ στο διάστημα $[1,+\infty)$ θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x + \sqrt{x^2-1}\,.$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$x = \frac{u^2+1}{2\,u}\,, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2\,u}\,, \qquad \frac{d\,u}{d\,x} = \frac{2\,u^2}{u^2-1} \qquad (*)$$

οπότε και πάλι αναγόμαστε σε υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης ως προς $u$. Στο διάστημα $(-\infty,-1]$ θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x - \sqrt{x^2-1}\,.$$

για την οποία ισχύουν οι ίδιες σχέσεις $(*)$

$(III)$ Τέλος για το ολοκλήρωμα τύπου $(III)$ που ορίζεται στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x + \sqrt{x^2+1}$$

και τις ισότητες που επάγει

$$x = \frac{u^2-1}{2\,u}\,, \qquad \sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2\,u}\,, \qquad \frac{d\,u}{d\,x} = \frac{2\,u^2}{u^2+1}$$

οπότε και πάλι αναγόμαστε στον υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης ως προς την μεταβλητή $u$.

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση των τριών τύπων ολοκληρωμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας γενικής ρητής συνάρτησης του τύπου

$$\int R(x, \sqrt{a\,x^2+\beta\,x+\gamma})\,d\,x$$

όπου $R(s,t)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των δυο ορισμάτων της $s,t$. Γράφουμε το τριώνυμο ως εξής

$$a\,x^2+\beta\,x+\gamma = a\,\left((x+\frac{\beta}{2\,a})^2+\frac{4a\,\gamma-\beta^2}{4a^2}\right)$$

και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

**1η)** <u>Αν $a>0$ και $4a\gamma-\beta^2>0$.</u> Τότε με την αλλαγή μεταβλητής

$$u=\frac{2a}{\sqrt{4a\,\gamma-\beta^2}}(x+\frac{\beta}{2a})$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\frac{\sqrt{4a\,\gamma-\beta^2}}{2a}\int R\left(-\frac{\beta}{2a}+\frac{\sqrt{4a\gamma-\beta^2}}{2\,a}\,u\,,\ \frac{\sqrt{4a\gamma-\beta^2}}{2\sqrt{a}}\,\sqrt{u^2+1}\right)\,d\,u$$

δηλαδή σε ένα ολοκλήρωμα τύπου $(III)$ που αναλύσαμε προηγουμένως.

**2η)** <u>Αν $a>0$ και $4a\gamma-\beta^2<0$.</u> Τότε με την αλλαγή μεταβλητής

$$u=\frac{2a}{\sqrt{\beta^2-4\,a\,\gamma}}(x+\frac{\beta}{2a})$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\frac{\sqrt{\beta^2-4a\,\gamma}}{2a}\int R\left(-\frac{\beta}{2a}+\frac{\sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2\,a}\,u\,,\ \frac{\sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2\sqrt{a}}\,\sqrt{u^2-1}\right)\,d\,u$$

δηλαδή σε ένα ολοκλήρωμα τύπου $(II)$ της προηγούμενης ανάλυσης.

**3η)** <u>Αν $a<0$ και $4a\gamma-\beta^2<0$.</u> Τότε με την αλλαγή μεταβλητής

$$u=\frac{-2a}{\sqrt{\beta^2-4a\,\gamma}}(x+\frac{\beta}{2a})$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$-\frac{\sqrt{\beta^2-4a\,\gamma}}{2a}\int R\left(-\frac{\beta}{2a}-\frac{\sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2\,a}\,u\,,\ \frac{\sqrt{\beta^2-4a\gamma}}{2\sqrt{-a}}\,\sqrt{1-u^2}\right)\,d\,u$$

δηλαδή σε ένα ολοκλήρωμα τύπου $(I)$ της προηγούμενης ανάλυσης.

Η περίπτωση $a<0$ και $4a\gamma-\beta^2>0$ αποκλείεται γιατί τότε δεν ορίζεται η συνάρτηση $\sqrt{a\,x^2+\beta\,x+\gamma}$ σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$. Αν τουλάχιστον ένα από τα $a$, και $4a\gamma-\beta^2$ είναι μηδέν τότε το ολοκλήρωμα ανάγεται στον υπολογισμό απλού ολοκληρώματος.

## 13.6 Ασκήσεις στην ενότητα 13

**Άσκηση 1.** Να υπολογισθεί το καθένα από τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής:

$$a)\ \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(\sin x)^2}}\,dx, \quad b)\ \int \frac{\sin x}{(\cos x)^2}\,dx, \quad c)\ \int \frac{e^x}{e^{2x+1}}\,dx, \quad d)\ \int \frac{dx}{x \ln x}\,dx,$$

$$e)\ \int x\,e^{x^2}\,dx, \quad f)\ \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx, \quad g)\ \int \frac{1}{4+x^2}\,dx, \quad h)\ \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

**Απ.** $a)\ 3(\sin x)^{1/3}+c$, $b)\ \frac{1}{\cos x}+c$ $c)\ \arctan(e^x)+c$, $d)\ \ln|\ln x|+c$, $e)\ \frac{1}{2}e^{x^2}+c$, $f)\ \arcsin(\frac{x}{2})+c$, $g)\ \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})+c$, $h)\ \arctan(e^x)+c$.

**Άσκηση 2.** Να υπολογισθεί το καθένα από τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα με ολοκληρώσεις κατά μέλη και αλλαγές μεταβλητής:

$$a)\ \int e^{-x}(\sin x)\,dx, \quad b)\ \int x^2 e^{2x}\,dx, \quad c)\ \int x^3 e^{-x^2}\,dx, \quad d)\ \int e^{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$e)\ \int x^2 \sin x\,dx, \quad f)\ \int x \ln x\,dx, \quad g)\ \int \arcsin x\,dx, \quad h)\ \int x^2 \arccos x\,dx,$$

$$i)\ \int (\sin x)^4\,dx, \quad j)\ \int \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx, \quad k)\ \int (\tan x)^2\,dx, \quad l)\ \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx,$$

**Απ.** $a)\ -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+c$, $b)\ \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)+c$, $c)\ -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+c$, $d)\ 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$, $e)\ (2-x^2)\cos x+2x\sin x+c$, $f)\ -\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}\ln x+c$, $g)\ \sqrt{1-x^2}+x\arcsin x+c$, $h)\ -\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)+\frac{x^x}{3}\arccos x+c$, $i)\ \frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+c$, $j)\ \ln|\cos x|+x\tan x+c$, $k)\ -x+\tan x+c$, $l)\ -\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+c$.

**Άσκηση 3.**

(α) Θεωρούμε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα

$$I = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx$$

Χρησιμοποιώντας δυο ολοκληρώσεις κατά παράγοντες να αποδειχθεί ότι

$$I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}I \Rightarrow (1+\frac{b^2}{a^2})I = \frac{e^{ax}}{a^2}\,(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + c$$

(β) Με παρόμοιο τρόπο να αποδειχθεί ότι

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx) + c$$

**Άσκηση 4.** Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

$$a)\ \int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx, \qquad b)\ \int \frac{2x^2+3x-1}{x^2+x^2-2x}\,dx, \qquad c)\ \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx,$$

$$d)\ \int \frac{x^4+2x-1}{x^4+2x^2+1}\,dx, \qquad e)\ \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx, \qquad f)\ \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4}\,dx,$$

**Απ.** $a)\ -\frac{4}{x-2}+\ln|x-2|+x+c$, $b)\ \ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+c$, $c)\ \frac{1-2x}{(x-1)^2}+\ln|x-1|+c$, $d)\ x-\frac{1}{1+x^2}-2\arctan x+c$, $e)\ \frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)+c$, $f)\ \frac{-2x^2+x-1}{2(x-1)^3}+c$.

**Άσκηση 5.** Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα ρητών τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$a)\ \int \frac{\left((\cos x)^2+\sin x+1\right)}{\sin x}\,dx, \qquad b)\ \int \frac{\cos x+\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

**Απ.** $a)\ x+\cos x-2\ln|\tan(\frac{x}{2})|+c$, $b)\ x-2\ln|\cos(\frac{x}{2})|-\tan(\frac{x}{2})+c$.

**Άσκηση 6.** Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$a)\ \int \sqrt{1-x^2}\,dx, \qquad b)\ \int \sqrt{x^2-1}\,dx, \qquad c)\ \int \sqrt{x^2+1}\,dx,$$

$$d)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx, \qquad e)\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx, \qquad f)\ \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,dx.$$

**Απ.** $a)\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+c$, $b)\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right)+c$,
$c)\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right)+c$, $d)\ \ln|x+\sqrt{x^2+1}|)+c$,
$e)\ \sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{1}{3}(2x+1)^2}\right|+c$, $f)\ \ln\left|3-2x-2\sqrt{2-3x+x^2}\right|+c$.