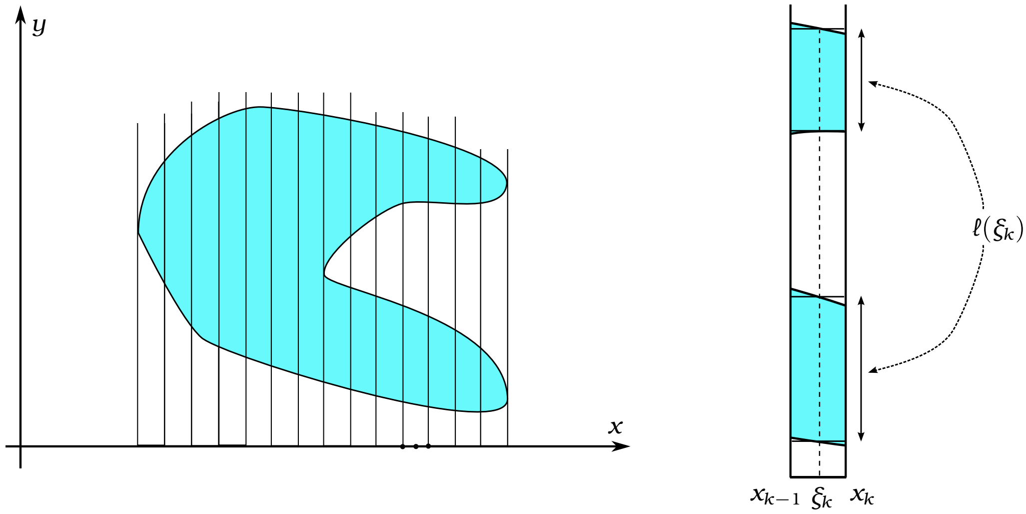
14 Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

14.1 Υπολογισμός εμβαδών με την μέθοδο των παράλληλων διατομών

Θεωρούμε μια φραγμένη επίπεδη επιφάνεια A με ομαλό σύνορο, δηλαδή που περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση. Ως x-άξονα θεωρούμε μια οποιαδήποτε ευθεία ℓ στο ίδιο επίπεδο με την A. Από κάθε σημείο x της ℓ φέρνουμε κάθετες ευθείες ως προς την ℓ οι οποίες τέμνουν την A σε ένα ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα και συμβολίζουμε με $\ell(x)$ το συνολικό μήκος, δηλαδή το άθροισμα των μηκών των επιμέρους ευθύγραμμων τμημάτων.



Σχήμα 35: Χωρισμός σε κατακόρυφες στοιχειώδεις επιφάνειες

Επειδή η A είναι φραγμένη υπάρχει κάποιο διάστημα $[a, b]$ έξω από το οποίο οι διατομές με την επιφάνεια είναι κενές, οπότε $\ell(x) = 0$ για $x \notin [a, b]$. Επιλέγουμε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0 , x_1 , x_2 , \ldots x_{n-1} , x_n = b\}$ του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος. Συμβολίζουμε με A_k το μέρος της A το οποίο περιέχεται ανάμεσα στις ευθείες κάθετες ως προς τον άξονα x στα σημεία x_{k-1} και x_k, και συμβολίζουμε το εμβαδό της A_k με E_k. Επειδή η A είσαι ίση με τα ένωση των επιφανειών A_k τότε το συνολικό εμβαδό της είσαι ίσο με το εμβαδό των επιμέρους επιφανειών, δηλαδή

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

Επιλέγουμε ενδιάμεσα σημεία ξ_k σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ και φέρνουμε κάθετη διατομή ως προς τον x-άξονα στο κάθε ξ_k. Στην συνέχεια φτιάχνουμε τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα όπως φαίνονται στο σχήμα δεξιά. Αν το πλάτος του $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό τότε η επιφάνεια A_k θα είναι περίπου ίση με την επιφάνεια Π_k των ορθογώνιων παραλληλόγραμμων. Το κάθε Π_k έχει μήκος βάσης $(x_k - x_{k-1})$ και άθροισμα υψών $\ell(\xi_k)$, οπότε το εμβαδό του κάθε τμήματος A_k θα είναι περίπου ίσο με

$$E_k \approx \ell(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

και συνολικά το εμβαδό της επιφάνειας A θα είναι περίπου ίσο με

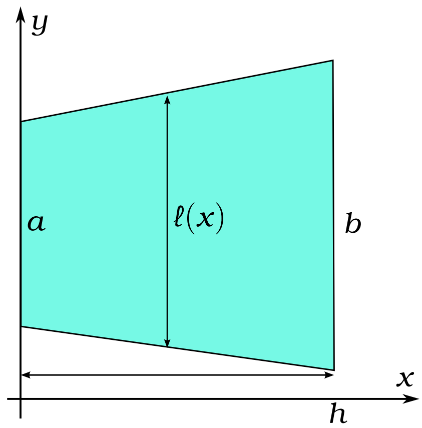
$$E = \ell(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + \ell(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + \ell(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$$

Αν το πλάτος της διαμέρισης Δ είναι αρκετά μικρό, τότε το άθροισμα Riemann $\ell(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + \cdots + \ell(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$ θα είναι όσο κοντά θέλουμε στο E της επιφάνειας A, οπότε

$$E = \int_a^b \ell(x)\,d\,x$$

Δηλαδή το εμβαδό μιας φραγμένης επίπεδης επιφάνειας είναι το ολοκλήρωμα των μηκών των διατομών της που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.

Παράδειγμα 14.1. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα θα υπολογίσουμε το εμβαδό ενός τραπεζίου με ύψος h και του οποίου οι παράλληλες πλευρές έχουν μήκη a και b. Ως x-άξονα θεωρούμε την ευθεία που είναι κάθετη στις παράλληλες πλευρές του τραπεζίου και το σημείο 0 επιλέγουμε να είναι η τομή της με την ευθεία της βάσης του τραπεζίου με πλευρά μήκους a, ενώ το σημείο h το σημείο τομής της με την αντίστοιχη πλευρά μήκους b. Αν ο x είναι εκτός του διαστήματος $[0, h]$ η αντίστοιχη διατομή του τραπεζίου είναι κενή, ενώ όταν ο x διατρέχει το $[0, h]$ το μήκος της διατομής στο τυχαίο x είναι



Σχήμα 36: Εμβαδό τραπεζίου

$$\ell(x) = \frac{b-a}{h}\,x + a$$

Ο τύπος είναι εύκολο να αποδειχθεί βρίσκοντας τις εξισώσεις των δυο ευθειών του τραπεζίου που δεν είναι παράλληλες και υπολογίζοντας την διαφορά των υψών τους στο άξονα των y για το τυχαίο $x \in [0, h]$. Εναλλακτικά μπορούμε να τον αποδείξουμε χρησιμοποιώντας μετρικές σχέσεις κατάλληλων ομοίων τριγώνων. Άρα το εμβαδό του τραπεζίου είναι ίσο με

$$E = \int_0^h \ell(x)\,d\,x = \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}\,x + a\right)\,d\,x = \frac{b-a}{h}\frac{h^2}{2} + a\,h = \frac{b+a}{2}\,h$$

Ο τύπος αυτός περιλαμβάνει και τις ειδικές περιπτώσεις του εμβαδού τριγώνου ($a = 0$ ή $b = 0$) και του εμβαδού παραλληλογράμμου ($a = b$).

Παράδειγμα 14.2. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό κυκλικού δίσκου με ακτίνα $r > 0$. Ως x-άξονα θεωρούμε μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου και ως σημείο 0 επιλέγουμε να είναι το κέντρο του δίσκου οπότε το μήκος της διατομής που είναι κάθετη στον x-άξονα είναι ίσο με

$$\ell(x) = 2\,\sqrt{r^2 - x^2}$$

για κάθε x στο διάστημα $[-r, r]$ και μηδέν για x έξω από το $[-r, r]$.

Οπότε το εμβαδό του δίσκου είναι ίσο με

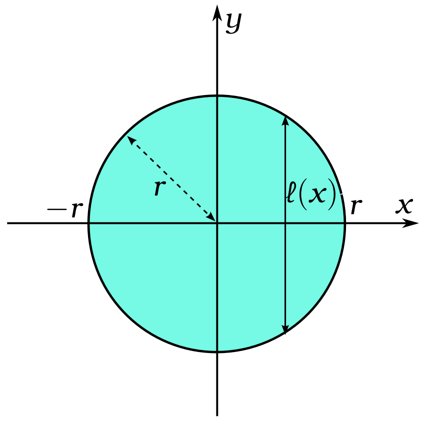
$$E = \int_{-r}^{r} \ell(x)\, dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = x/r$ το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$E = \int_{-1}^{1} 2\, r^2 \sqrt{1 - t^2}\, dt = 2\, r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα (άσκηση 6α στη σελίδα 107) έχουμε

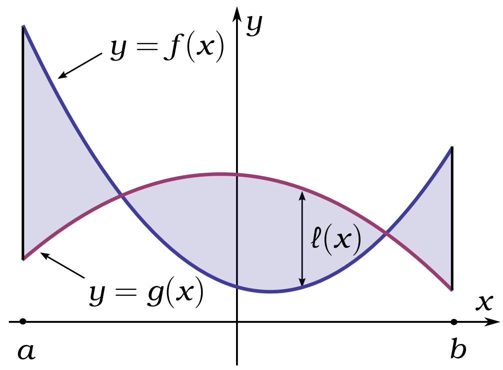
$$E = 2r^2 \frac{1}{2} \left(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t\right)\Big|_{t=-1}^{t=1} = r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi\, r^2$$



Σχήμα 37: Εμβαδό δίσκου

Παράδειγμα 14.3. Μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των παράλληλων διατομών είναι ο υπολογισμός του εμβαδού που περικλείεται ανάμεσα στα γραφήματα δυο συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = g(x)$ στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(a, f(a))$ και $(a, g(a))$, και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(b, f(b))$ και $(b, g(b))$. Για κάθε $x \in [a, b]$ η διατομή είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το μήκος είναι

$$\ell(x) = |f(x) - g(x)|$$



Σχήμα 38: Εμβαδό ανάμεσα στα γραφήματα δυο συναρτήσεων

ενώ για κάθε x έξω από το $[a, b]$ η διατομή είναι κενή. Οπότε το εμβαδό είναι ίσο με

$$E = \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\, dx$$

Αν θέλουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε το εμβαδό της επιφάνειας που περιέχεται ανάμεσα στις καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$, στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(-1, -1)$ και $(-1, 1)$ και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(3, 3)$ και $(3, 9)$, τότε αυτό είναι

$$E = \int_{-1}^{3} |x^2 - x|\, dx$$

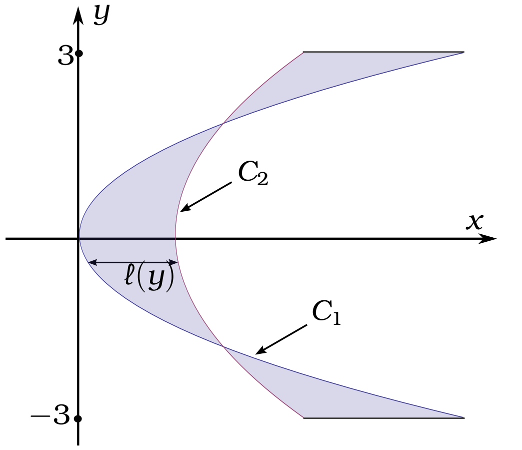
Μελετώντας το πρόσημο της ποσότητας $x^2 - x = x(x - 1)$ στο διάστημα $[-1, 3]$ έχουμε

$$E = \int_{-1}^{3} |x^2 - x|\, dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx + \int_{1}^{3} (x^2 - x)\, dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{17}{3}$$

Παρατήρηση 14.4. Ορισμένες φορές οι καμπύλες που περιέχουν την επίπεδη επιφάνεια της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό, δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή των x, y, οι οποίες είναι δύσκολο να λυθούν ως προς y, όμως μπορεί να λύνονται εύκολα ως προς x. Τότε τροποποιούμε την μέθοδο των παράλληλων διατομών κατάλληλα, δηλαδή θεωρούμε παράλληλες διατομές προς τον άξονα των y. Σε αυτή την περίπτωση το εμβαδό είναι

$$E = \int_a^b \ell(y)\, d\, y$$

όπου $\ell(y)$ το μήκος μιας διατομής στο τυχαίο $y \in [a, b]$.



Για παράδειγμα, θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες C_1, C_2 που δίνονται από τις σχέσεις $y^2 = x$ και $y^2 = 3(x-2)$, αντίστοιχα, στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(5, 3)$ και $(9, 3)$, και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(5, -3)$ και $(9, -3)$. Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x, βρίσκουμε ότι

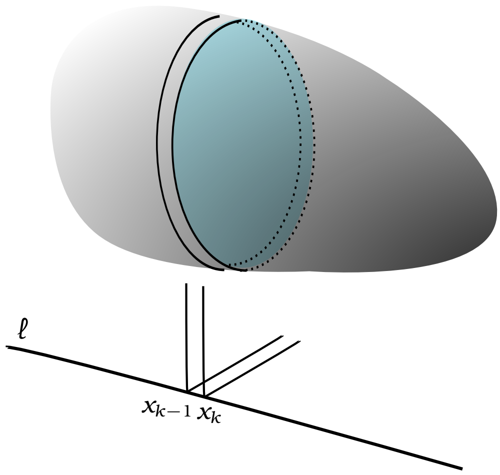
$$\ell(y) = |y^2 - \frac{y^2}{3} - 2| = \frac{2}{3}|y^2 - 3|$$

Μελετώντας το πρόσημο της $y^2 - 3$ για $y \in [-3, 3]$ βρίσκουμε ότι

$$E = \int_{-3}^{3} \frac{2}{3}|y^2-3|\, d\, y = \int_{-3}^{-\sqrt{3}} \frac{2}{3}(y^2-3)\, d\, y + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{3}(-y^2+3)\, d\, y + \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{2}{3}(y^2-3)\, d\, y = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

14.2 Υπολογισμός όγκου στερεών σωμάτων

14.2.1 Η μέθοδος των παράλληλων διατομών



Θεωρούμε ένα φραγμένο στερεό σώμα B. Παίρνουμε μια οποιαδήποτε ευθεία ℓ στο χώρο και σε κάθε σημείο της φτιάχνουμε το κάθετο επίπεδο και θεωρούμε την διατομή $B^{(x)}$ του επιπέδου με το σώμα B. Επειδή το σώμα είναι φραγμένο υπάρχει ένα διάστημα $[a, b]$ της ℓ ώστε για κάθε x έξω από το $[a, b]$ η διατομή $B^{(x)}$ του B είναι κενή. Για κάθε x στο $[a, b]$ συμβολίζουμε με $E(x)$ το εμβαδό της διατομής $B^{(x)}$. Επιλέγουμε διαμέριση

$$\Delta = \{a = x_0\, , x_1\, , x_2\, , \ldots x_{n-1}\, , x_n = b\}$$

του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος και συμβολίζουμε με B_k το μέρος όγκου της B που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα κάθετα στην ℓ στα σημεία x_{k-1} και x_k. Το B είναι ίσο με την ένωση των $B_1, B_2, \ldots B_n$, οπότε αν συμβολίσουμε με V_k τον αντίστοιχο όγκο του B_k, τότε έχουμε

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

Επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ενδιάμεσο σημείο ξ_k και φτιάχνουμε το κυλινδρικό σώμα C_k του οποίου οι δυο βάσεις ανήκουν στα δυο επίπεδα κάθετα στην ℓ στα σημεία x_{k-1} και x_k και του οποίου η τομή με το επίπεδο κάθετο στην ℓ στο σημείο ξ_k είναι ακριβώς η διατομή $B^{(\xi_k)}$. Επειδή το πλάτος της διαμέρισης είναι μικρό το σώμα B_k είναι περίπου ίσο με το ορθό κυλινδρικό σώμα C_k, οπότε ο όγκος V_k του B_k είναι περίπου ίσος με τον όγκο του C_k, δηλαδή $V_k \approx E(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$ για καθε $k = 1, 2, \ldots n$. Συνεπώς

$$V \approx E(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + E(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + E(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$$

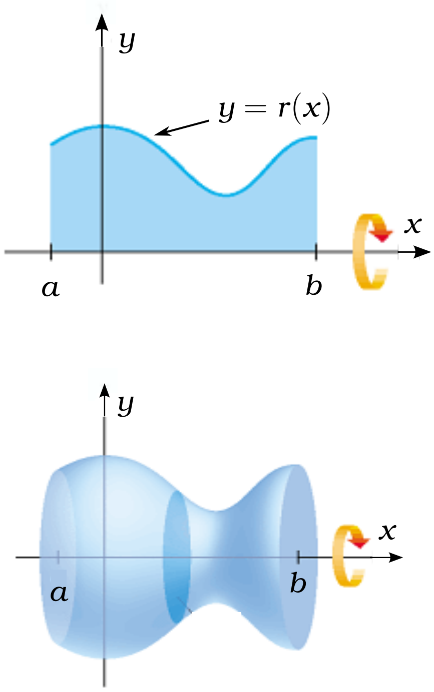
Αν το πλάτος της διαμέρισης γίνει όσο μικρό θέλουμε τότε το άθροισμα Riemann $E(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + \cdots + E(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$ θα πλησιάσει όσο κοντά θέλουμε στον όγκο V του σώματος B, δηλαδή

$$V = \int_a^b E(x)\,d\,x$$

Άρα ο όγκος φραγμένου στερεού σώματος είναι ίσος με το ολοκλήρωμα των εμβαδών των διατομών του που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.

14.2.2 Όγκος στερεών σωμάτων παραγόμενων με περιστροφή

Φέρνουμε μια ευθεία ℓ στον χώρο την οποία θεωρούμε ως τον x-άξονα και διάστημα $[a, b]$ της ℓ. Για κάθε $x \in [a, b]$ φτιάχνουμε έναν επίπεδο κυκλικό δίσκο με κέντρο τον x και ακτίνα ίση με $r(x)$, όπου για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε ότι $r(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Το σύνολο όλων των κυκλικών δίσκων καθώς το x διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ φτιάχνουν ένα στερεό σώμα B το οποίο λέγεται παραγόμενο στερεό από την περιστροφή της $y = r(x)$ με άξονα περιστροφής τον x-άξονα ($y = 0$). Η ονομασία προκύπτει από το ότι το στερεό B μπορεί να παραχθεί από την περιστροφή γύρω από τον x-άξονα, κατά γωνία $2\,\pi$, του τμήματος της επιφάνειας που περικλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της $y = r(x)$ και του x-άξονα για $x \in [a, b]$. Για κάθε x στο $[a, b]$ η διατομή του B που είναι κάθετη στην ℓ στο x είναι ο κυκλικός δίσκος με ακτίνα $r(x)$ και κέντρο το x. Το εμβαδό αυτό είναι $E(x) = \pi\,\left(r(x)\right)^2$.



Οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο ο όγκος V του B είναι ίσος με

$$V = \pi \int_a^b \big(r(x)\big)^2 \, d\,x$$

Άρα, ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται με περιστροφή είναι ίσος με το γινόμενο του π με το ολοκλήρωμα του τετραγώνου των ακτίνων περιστροφής.

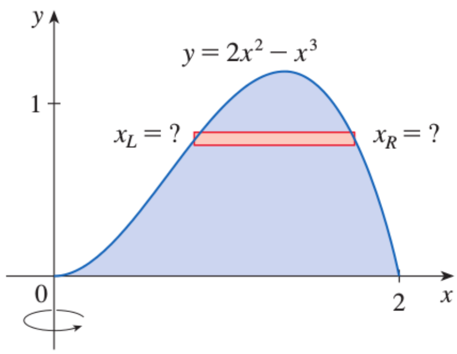
Παράδειγμα 14.5. Θεωρούμε μια μπάλα ακτίνας $R > 0$ και μια ευθεία ℓ που διέρχεται από το κέντρο της μπάλας και επιλέγουμε το σημείο 0 της ℓ να είναι το κέντρο της μπάλας. Η μπάλα σηματίζεται από το σύνολο των κυκλικών δίσκων που είναι κάθετοι στην ευθεία ℓ σε κάθε x στο διάστημα $[-R, R]$ της ℓ με κέντρο το σημείο x και ακτίνα $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα ο όγκος μιας μπάλας ακτίνας R είναι

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (r(x))^2 \, d\,x = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, d\,x = \pi\, R^2 (R - (-R)) - \pi \left(\frac{R^3}{3} - (-\frac{R^3}{3}) \right) = \frac{4}{3}\, \pi\, R^3$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μπάλα είναι το στερεό που παράγεται με περιστροφή κατά γωνία $2\,\pi$ ως προς τον x-άξονα του ημικύκλιου $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, με $x \in [-R, R]$.

14.2.3 Υπολογισμός όγκου με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών

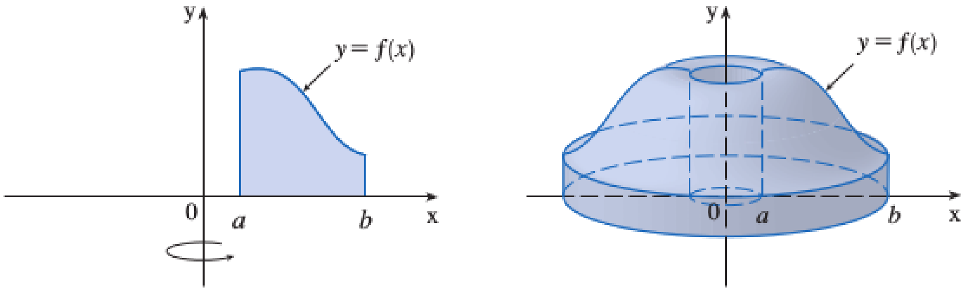
Ο υπολογισμός όγκου με την προηγούμενη μέθοδο δεν είναι πάντα εφικτός. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα υπολογισμού του όγκου του στερεού που παράγεται από περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 2\,x^2 - x^3$ και της $y = 0$. Αν φτιάξουμε τις κάθετες διατομές στον y-άξονα τότε σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο ο όγκος είναι



$$V = \pi \int_0^{\frac{32}{27}} \left((x_R(y))^2 - (x_L(y))^2 \right) d\,y$$

όπου $\frac{32}{27}$ είναι η μέγιστη τιμή της $y = 2\,x^2 - 3\,x^3$ που επιτυγχάνεται όταν $x = \frac{4}{3}$, και x_L, x_R είναι οι δυο θετικές ρίζες της εξίσωσης $y = 2\,x^2 - x^3$. Όμως για να βρούμε τις ρίζες αυτές θα πρέπει να λύσουμε μια εξίσωση τρίτου βαθμού, το οποίο από την μία δεν είναι και τόσο εύκολο, αλλά κι από την άλλη ο τύπος του Cardano που δίνει τις ρίζες αυτές δεν είναι τόσο εύχρηστος για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στην συνέχεια. Για να υπολογίσουμε τον όγκο στερεών που παράγονται με περιστροφή όπως σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μια εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού του όγκου, η οποία έχει γενικότερη ισχύ, κι ονομάζεται μέθοδος των **κυλινδρικών φλοιών**.

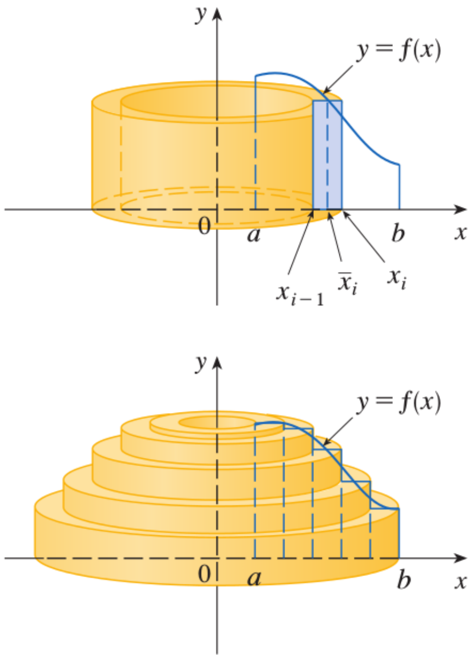
Ας θεωρήσουμε το στερεό σώμα B το οποίο παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f(x)$, όπου για απλούστευση υποθέτουμε ότι $f(x) > 0$, την $y = 0$, και τις κάθετες ευθείες $x = a$, και $x = b$ με $b > a \geq 0$, όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παίρνουμε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$, και έστω $\overline{x}_i$ του μέσο του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$. Αν το παραλληλόγραμμο με βάση το διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και ύψος $f(\overline{x}_i)$ περιστραφεί γύρω από τον y-άξονα το αποτέλεσμα είναι ένας κυλινδρικός φλοιός με μέση ακτίνα $\overline{x}_i$ ύψος $f(\overline{x}_i)$ και πλάτος $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ του οποίου ο όγκος είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού του κυλίνδρου με ακτίνα $\overline{x}_i$ και ύψος $f(\overline{x}_i)$ επί το πλάτος Δx, δηλαδή $V_i = 2\pi \overline{x}_i f(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1})$. Οπότε μια προσέγγιση του όγκου του σώματος B είναι

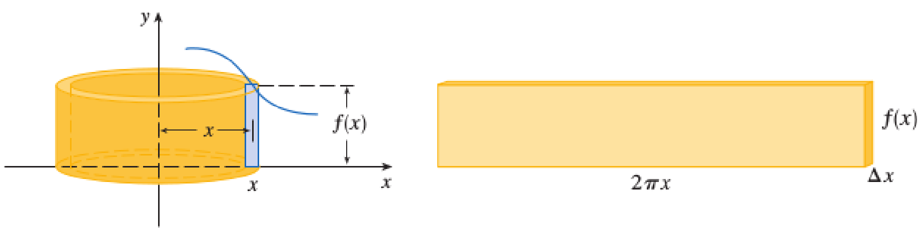
$$V \approx 2\pi \overline{x}_1 f(\overline{x}_1)(x_1 - x_0) + \cdots + 2\pi \overline{x}_n f(\overline{x}_n)(x_n - x_{n-1})$$

Αν το πλάτος της διαμέρισης γίνει όσο μικρό θέλουμε τότε το άθροισμα Riemann $2\pi \overline{x}_1 f(\overline{x}_1)(x_1 - x_0) + \cdots + 2\pi \overline{x}_n f(\overline{x}_n)(x_n - x_{n-1})$ θα πλησιάσει όσο κοντά θέλουμε στον όγκο V του σώματος B, δηλαδή

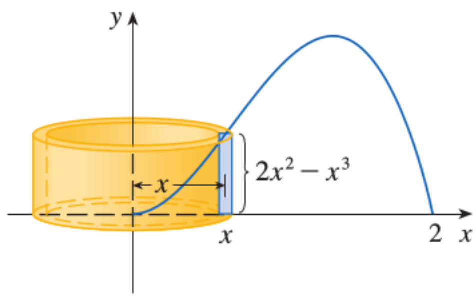


$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

Για να θυμόμαστε τον τύπο θεωρούμε έναν κυλινδρικό φλοιό ακτίνας x και ύψους $f(x)$ που όταν τον κόψουμε ο όγκος του είναι η περιφέρεια $2\pi x$ επί το ύψος $f(x)$ επί το πλάτος Δx.

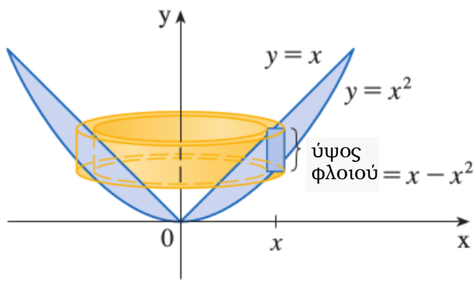


Παράδειγμα 14.6. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = 2\,x^2 - x^3$ και τον x-άξονα ($y = 0$). Από το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός έχει ακτίνα x, περιφέρεια $2\,\pi\,x$ και ύψος $f(x) = 2\,x^2 - x^3$. Οπότε, σύμφωνα με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών, ο όγκος του στερεού είναι



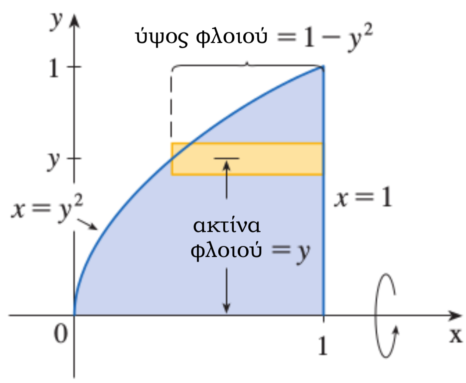
$$V = \int_0^2 (2\,\pi\,x)\,(2\,x^2 - x^3)\,d\,x = 2\,\pi \int_0^2 (2\,x^3 - x^4)\,d\,x = 2\,\pi\Big(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\Big)\Big|_{x=0}^{x=2} = 2\,\pi\big(8 - \frac{32}{5}\big) = \frac{16}{5}\,\pi$$

Παράδειγμα 14.7. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = x^2$ και της $y = x$. Από το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός έχει ακτίνα x, περιφέρεια $2\,\pi\,x$ και ύψος $f(x) = x - x^2$. Οπότε, σύμφωνα με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών, ο όγκος του στερεού είναι



$$V = \int_0^1 (2\,\pi\,x)\,(x - x^2)\,d\,x = 2\,\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,d\,x = 2\,\pi\Big(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.$$

Παράδειγμα 14.8. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = \sqrt{x}$, της ευθείας $y = 0$ και της $x = 1$. Για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών λύνουμε την $y = \sqrt{x}$ ως προς x, δηλ. $x = y^2$ και παρατηρούμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός έχει ακτίνα y, περιφέρεια $2\,\pi\,y$ και ύψος $1 - y^2$. Οπότε ο όγκος του στερεού είναι



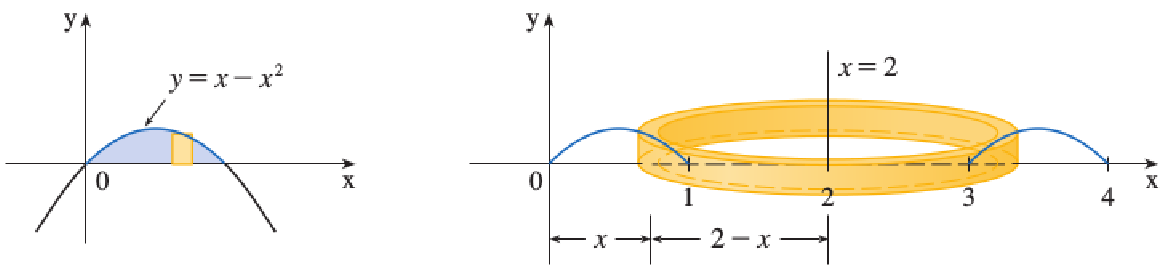
$$V = \int_0^1 (2\,\pi\,y)\,(1 - y^2)\,d\,y = 2\,\pi \int_0^1 (y - y^3)\,d\,x = 2\,\pi\Big(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\Big)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2}.$$

Ο όγκος του στερεού αυτού μπορεί να υπολογισθεί πιο εύκολα θεωρώντας κάθετες διατομές στον x-άξονα, οπότε όπως έχουμε περιγράψει στην προηγούμενη παράγραφο. Η ακτίνα περιστροφής στην περίπτωσή μας είναι $r(x) = \sqrt{x}$, οπότε

$$V = \pi \int_0^1 r(x)^2\,d\,x = \pi \int_0^1 x\,d\,x = \pi\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2}$$

Παράδειγμα 14.9. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από την ευθεία $x = 2$, του χωρίου του περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = x - x^2$ και την ευθεία $y = 0$. Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα διαπιστώνουμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός που παράγεται από την περιστροφή γύρω από την ευθεία $x = 2$ έχει ακτίνα $2 - x$, περιφέρεια $2\,\pi\,(2 - x)$ και ύψος $x - x^2$. Συνεπώς ο όγκος του στερεού είναι

$$V = \int_0^1 2\,\pi\,(2-x)\,(x-x^2)\,d\,x = 2\,\pi \int_0^1 (x^3 - 3\,x^2 + 2\,x)\,d\,x = 2\,\pi\Big(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2}\,.$$



14.3 Ασκήσεις στην ενότητα 14

Άσκηση 1. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες των γραφημάτων των παραβολών $y = x^2$ και $y^2 = x$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής των δυο παραβολών στο τεταρτημόριο είναι τα $(0, 0)$ και $(1, 1)$ και εφαρμόστε την μέθοδο των παράλληλων διατομών και ειδικότερα το Παραδείγμα 14.3 ή 14.4 **Απ.** $\frac{1}{3}$

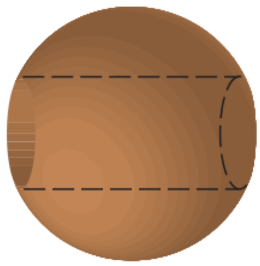
Άσκηση 2. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και την ευθεία $y + x = 1$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία είναι τα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ και εφαρμόστε την μέθοδο των παράλληλων διατομών και ειδικότερα το Παραδείγμα 14.3 ή 14.4 **Απ.** $\frac{\pi-2}{4}$

Άσκηση 3. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$, την ευθεία $y = 0$ και την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A = (1, 1)$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 2\,x - 1$. Αν χρησιμοποιήσετε διατομές κάθετες στον x-άξονα το χωρίο του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό χωρίζεται σε δυο υποχωρία. Αν θεωρήσετε διατομές κάθετες στον y-άξονα το χωρίο είναι ένα και ο υπολογισμός του εμβαδού είναι πιο άμεσος. **Απ.** $\frac{1}{12}$

Άσκηση 4. Ένας κατασκευαστής ανοίγει μια κυκλική οπή ακτίνας $3\,cm$ στο κέντρο μιας μεταλλικής σφαίρας ακτίνας $5\,cm$. Να υπολογισθεί ο όγκος του τμήματος της σφαίρας (δακτυλιδιού) που απομένει.



Υπόδειξη: Το δακτυλίδι παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου ανάμεσα στον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$ και της ευθείας $y = 3$. Βρείτε τα σημεία τομής τους $(-4, 3)$ και $(4, 3)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον x-άξονα. **Απ.** $\frac{256}{3}\,\pi\,cm^3$

Άσκηση 5. Να υπολογισθούν οι όγκοι των στερεών που παράγονται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x}$, και τις ευθείες $y = 0$ και $x = 4$, α) γύρω από την ευθεία $x = 4$ και β) γύρω από την ευθεία $y = 2$. **Απ.** α) $\frac{256}{15}\,\pi$, β) $\frac{40}{3}\,\pi$

Άσκηση 6. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = 2\,\sqrt{x-1}$, και την ευθεία $y = x - 1$, γύρω από την ευθεία $x = -1$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής της παραβολής με την ευθεία είναι τα $(1, 0)$ και $(5, 4)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον y-άξονα **Απ.** $\frac{96}{5}\,\pi$

Άσκηση 7. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από την $y = 4$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 2\,x$, και την ευθεία $y = x$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθείας είναι τα $(0, 0)$ και $(3, 3)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον x-άξονα **Απ.** $\frac{153}{5}\,\pi$

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x}$, και τις ευθείες $y = 0$ και $x = 1$, γύρω από την ευθεία $x = 2$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής της παραβολής με τις ευθείες είναι τα $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον y-άξονα **Απ.** $\frac{28}{15}\,\pi$

(Οι ακόλουθες ασκήσεις να λυθούν με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών.)

Άσκηση 9. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$, και τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$ και $x = 2$. **Απ.** $2\,\pi$

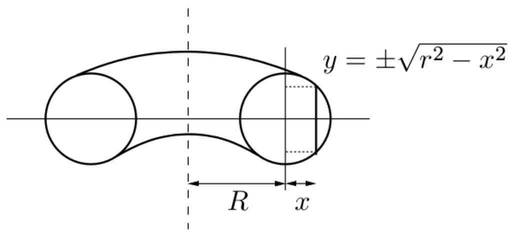
Άσκηση 10. Να υπολογισθεί ο όγκος του φραγμένου στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 4(x-2)^2$, και $y = x^2 - 4\,x + 7$. **Απ.** $16\,\pi$

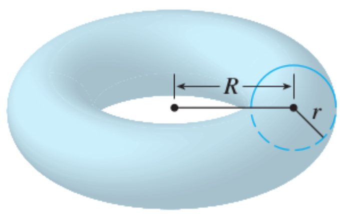
Άσκηση 11. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $x = 1 + y^2$, και τις ευθείες $x = 0$, $y = 1$ και $y = 2$. **Απ.** $\frac{21}{2}\,\pi$

Άσκηση 12. Να υπολογισθεί ο όγκος των στερεών που παράγονται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$, και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ α) γύρω από την ευθεία $x = 1$, β) γύρω από την ευθεία $x = 4$. **Απ.** α) $\frac{21}{2}\,\pi$, β) $\frac{67}{6}\,\pi$.

Άσκηση 13. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από την ευθεία $y = 3$ του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x-1}$, και τις ευθείες $y = 0$, και $x = 5$. **Απ.** $24\,\pi$.

Άσκηση 14. Να υπολογισθεί ο όγκος του τόρου (σαμπρέλας) ακτίνων R και r, με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα σχήματα





Υπόδειξη: Ακτίνα φλοιού: $x + R$, περιφέρεια φλοιού: $2\,\pi\,(x+R)$, ύψος φλοιού: $2\,\sqrt{r^2 - x^2}$, όρια ολοκλήρωσης: $x \in [-r, r]$. **Απ.** $2\,\pi\,R\,(\pi\,r^2)$.