15 Απλές διαφορικές εξισώσεις

Η πιο απλή διαφορική εξίσωση (ΔΕ) πρώτης τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y' = F(x, y)$$

Η άγνωστη είναι μια πραγματική συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία εξαρτάται από μια πραγματική μεταβλητή x που διατρέχει κάποιο διάστημα I του $\mathbb{R}$. Η μεταβλητή x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, και η άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή της ΔΕ. Υιοθετούμε την σύμβαση ότι με y' συμβολίζουμε την πρώτη παράγωγο της $y = f(x)$, δηλαδή $y' = f'(x)$ και την παράγωγο n-τάξης με $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Το ζητούμενο είναι από μια δοσμένη σχέση της παραπάνω μορφής, π.χ. την $y' = 0$, γνωρίζοντας δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης $y = f(x)$, σε κάθε σημείο $x \in I$ και για κάθε $y \in f(I) \subset \mathbb{R}$, να βρούμε (αν είναι δυνατόν) το σύνολο των συναρτήσεων που η πρώτη τους παράγωγος αλλάζει με τον δοσμένο τρόπο. Για παράδειγμα, αν $y' = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$, τότε γνωρίζουμε ότι το σύνολο των συναρτήσεων με αυτή την ιδιότητα είναι οι σταθερές συναρτήσεις, δηλαδή $y = c$, όπου c ένας οποιοδήποτε σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γενικότερα, μια n-τάξης ΔΕ είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

που εμπλέκει οπωσδήποτε την n-τάξης παράγωγο $y^{(n)}$ κι ενδεχομένως την ανεξάρτητη μεταβλητή x, την άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ και τις παραγώγους $y^{(k)}$ με $k \leq n-1$.

Παράδειγμα 15.1. Μια ειδική λύση της ΔΕ $y' + 2\,x\,y = 0$ είναι η συνάρτηση $y = e^{-x^2}$, γιατί

$$(e^{-x^2})' + 2\,x\,e^{-x^2} = -2\,x\,e^{-x^2} + 2\,x\,e^{-x^2} = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν την ΔΕ είναι η μονοπαραματρική οικογένεια συναστήσεων $y = c\,e^{-x^2}$, όπου c μια πραγματική παράμετρος, η οποία περιλαμβάνει την ειδική λύση για $c = 1$.

Γενικότερα, μιλάμε για την γενική λύση μιας n-τάξης ΔΕ όταν η άγνωστη συνάρτηση που ικανοποιεί την ΔΕ εξαρτάται από n το πλήθος πραγματικές παραμέτρους.

Παράδειγμα 15.2. Η ΔΕ $y'' + y = 0$, ικανοποιείται στο $(-\infty, +\infty)$ τόσο από την συνάρτηση $y_1 = \sin x$, αφού $(\sin x)'' + \sin x = (\cos x)' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$, όσο κι από την $y_2 = \cos x$, αφού $(\cos x)'' + \cos x = (-\sin x)' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$. Η γενική λύση είναι η ΔΕ είναι η $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Το ότι ο γραμμικός συνδυασμός των y_1, y_2 είναι λύση της ΔΕ είναι απόρροια του γεγονότος ότι τόσο η y όσο και η y'' εμφανίζονται με γραμμικό τρόπο στην ΔΕ.

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε την διαδικασία επίλυσης απλών ΔΕ με μεθόδους που βασίζονται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων που έχουμε περιγράψει στις προηγούμενες ενότητες.

15.1 Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

15.1.1 ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

Οι ΔΕ της κατηγορίας αυτής χωρίζουν την ανεξάρτητη μεταβλητή x και την εξαρτημένη y και έχουν την γενική μορφή

$$B(y)\,y' = A(x)$$

Η πιο απλή ΔΕ αυτής της μορφής είναι όταν $B(y) = 1$, και $A(x)$ μια δοσμένη συνάρτηση του x που ορίζεται στο διάστημα I, δηλαδή

$$y' = A(x)$$

Λύση της εξίσωσης αυτής στο I είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο I και ικανοποιεί την ΔΕ, δηλαδή

$$f'(x) = A(x)$$

ή αλλιώς οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της συνάρτησης $y = A(x)$ στο I. Αν η $y = A(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο I, τότε σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, οι λύσεις της $y' = A(x)$ στο I είναι οι ίδιες με τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $y = A(x)$ στο I.
Με άλλα λόγια η γενική λύση της $y' = A(x)$ στο I είναι η

$$y = f(x) = \int A(x)\,d\,x = \int_a^x A(t)\,d\,t + c\,, \qquad (x \text{ στο } I)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την γενική μορφή της ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

$$B(y)\,y' = A(x)$$

Μια λύση της παραπάνω ΔΕ είναι μια συνάρτηση $y = f(x)$ που ικανοποιεί την ΔΕ, δηλαδή

$$B\big(f(x)\big)\,f'(x) = A(x)$$

Θεωρώντας την ισότητα αυτή ως ισότητα συναρτήσεων και παίρνοντας το αόριστο ολοκλήρωμά τους ως προς x, έχουμε

$$\int B\big(f(x)\big)\,f'(x)\,d\,x = \int A(x)\,d\,x \quad \overset{y=f(x)}{\Longrightarrow} \quad \int B(y)\,d\,y = \int A(x)\,d\,x$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση $y = f(x)$. Οπότε, αν $G(y)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $B(y)$ και $H(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $A(x)$ τότε η τελευταία εξίσωση μας πληροφορεί ότι

$$G\big(f(x)\big) = H(x) + c$$

Οι $G(y)$ και $H(x)$ είναι, υποτίθεται, γνωστές συναρτήσεις αφού υπολογίζονται με ολοκλήρωση από τις συναρτήσεις $B(y)$ και $A(x)$, αντίστοιχα, οπότε λύνοντας την $G\big(f(x)\big) = H(x) + c$ ως προς $f(x)$, έχουμε την γενική λύση $y = f(x)$ της ΔΕ. Θα πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι έστω κι αν μπορούμε να υπολογίσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα (το οποίο δεν είναι εφικτό πάντα για αυθαίρετες συναρτήσεις $B(y)$ και $A(x)$) η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης μπορεί να είναι αρκετά δύσκολο εγχείρημα.

Παράδειγμα 15.3. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

$$y\,y' = x$$

Ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $B(y) = y$ είναι το $\frac{1}{2}\,y^2$, ενώ της $A(x) = x$ είναι το $\frac{1}{2}\,x^2$. Συνεπώς, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$\frac{1}{2}\,y^2 = \frac{1}{2}\,x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 2\,c \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + c$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας σημειώνουμε την αυθαίρετη σταθερή $2\,c$ ως c. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις α) Αν $c > 0$ τότε οι συναρτήσεις $y = f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = f(x) = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις της ΔΕ στο $(-\infty, +\infty)$. β) Αν $c = 0$, τότε οι συναρτήσεις $y = f(x) = x$ και $y = f(x) = -x$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις της ΔΕ στο $(-\infty, +\infty)$. γ) Αν $c < 0$ τότε οι συναρτήσεις $y = f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = f(x) = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις της ΔΕ ή στο $(-\infty, -\sqrt{|c|})$ ή στο $(\sqrt{|c|}, +\infty)$.

Παράδειγμα 15.4. Θα λύσουμε την ομογενή γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$y' + p(x)\,y = 0$$

όπου η $p(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I. Η ΔΕ χωρίζει μεταβλητές γιατί μπορεί να γραφεί ως εξής

$$y' + p(x)\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\,y' = -p(x)$$

με $y \neq 0$. Μια αντιπαράγωγος (ή αόριστο ολοκλήρωμα) της $\frac{1}{y}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ είναι η $\ln|y|$ και μια αντιπαράγωγος της $-p(x)$ στο I είναι η $-\int p(x)\,d\,x$. Οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$\ln|y| = -\int p(x)\,d\,x + c \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-\int p(x)\,d\,x + c} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^c\,e^{-\int p(x)\,d\,x}$$

Αν συμβολίσουμε την σταθερή $\pm e^c$ με c, η γενική λύση της ΔΕ $y' + p(x)\,y = 0$ στο διάστημα I είναι η

$$y = f(x) = c\,e^{-\int p(x)\,d\,x}, \qquad (x \text{ στο } I)$$

Παρατηρούμε ότι αν $c = 0$, τότε έχουμε ότι $y = 0$ η οποία είναι μια ειδική λύση της ΔΕ $y' + p(x)\,y = 0$ στο διάστημα I.

15.1.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Η πιο γενική μορφή μιας γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης είναι η ΔΕ

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I. Η επίλυση της ΔΕ αυτής επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με μια κατάλληλη συνάρτηση έτσι ώστε το αριστερό μέλος της εξίσωσης να γίνει συνολικά η παράγωγος γινομένου συναρτήσεων. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας και είναι η συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int_a^x p(t)\,dt}$$

για κάθε $x \in I$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu'(x) = p(x)\, e^{\int p(x)\,dx} = p(x)\,\mu(x)$$

Οπότε, αν $y = f(x)$ η γενική λύση της ΔΕ στο I, τότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
& f'(x) + p(x) f(x) = q(x) && \Rightarrow \\
& && \text{(πολλ και τα δυο μέλη με } \mu(x) \text{)} \\
& \mu(x)\big(f'(x) + p(x) f(x)\big) = \mu(x)\, q(x) && \Rightarrow \\
& \mu(x) f'(x) + \mu(x)\, p(x) f(x) = \mu(x)\, q(x) && \Rightarrow \\
& && \text{(} \mu'(x) = \mu(x)\, p(x) \text{)} \\
& \big(\mu(x) f(x)\big)' = \mu(x)\, q(x) && \Rightarrow \\
& && \text{(ολοκλ. και τα δυο μέλη ως προς } x\text{)} \\
& \int \big(\mu(x) f(x)\big)'\, dx = \int \mu(x)\, q(x)\, dx && \Rightarrow \\
& \mu(x) f(x) = \int \mu(x)\, q(x)\, dx + c && \Rightarrow \\
& f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\, q(x)\, dx + \frac{c}{\mu(x)}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η μοναδική λύση της ΔΕ $y' + p(x)\, y = q(x)$ είναι η

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\, q(x)\, dx + \frac{c}{\mu(x)}$$

όπου

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

Παράδειγμα 15.5. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ $y' - 2\,x\,y = x$. Πρώτα απ'όλα υπολογίζουμε την συνάρτηση $\mu(x)$ με την οποία θα πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της ΔΕ. Έχουμε

$$\mu(x) = e^{\int -2\,x\,d\,x} = e^{-x^2}$$

Σημειώστε ότι στην ολοκλήρωση για την εύρεση της $\mu(x)$ δεν χρειάζεται να εμφανίσουμε σταθερή ολοκλήρωσης c. Πολλαπλασιάζουμε την ΔΕ με e^{-x^2} κι έχουμε

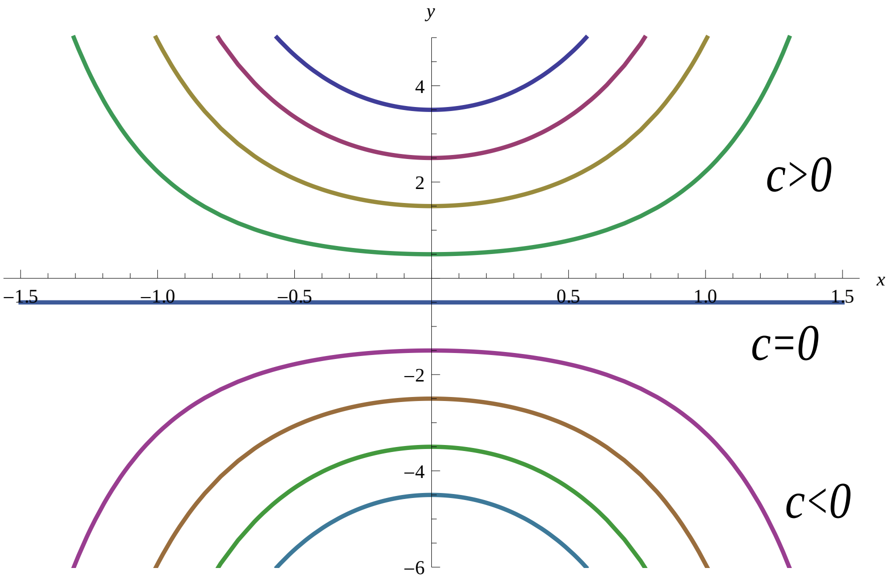
$$e^{-x^2}\,y' - 2\,x\,e^{-x^2}\,y = x\,e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-x^2}\,y\right)' = x\,e^{-x^2}$$

Ολοκληρώνουμε την προηγούμενη ως προς x κι έχουμε

$$e^{-x^2}\,y = \int x\,e^{-x^2}\,d\,x + c = -\frac{1}{2}\int \left(e^{-x^2}\right)'\,d\,x + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2}\,y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

Οπότε λύνοντας την τελευταία ως προς y, η μοναδική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = -\frac{1}{2} + c\,e^{x^2}$$



Σχήμα 39: Η γραφική παράσταση της λύσης της ΔΕ για διάφορες τιμές της παραμέτρου c.

15.2 Γραμμικές ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής

$$y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$$

όπου k, ℓ είναι δυο πραγματικοί αριθμοί. Το κύριο χαρακτηριστικό των ΔΕ αυτών είναι ότι η άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$, καθώς και οι παράγωγοί της μέχρι δεύτερης τάξης y' και y'', εμφανίζονται με γραμμικό τρόπο. Οι ΔΕ της μορφής αυτής ονομάζονται γραμμικές δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Υποθέτουμε ότι ο όρος μη-ομογένειας $q(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα I.

Θεωρούμε την ομογενή ΔΕ με $q(x) = 0$ και αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$y = e^{\rho x}$$

Εισάγωντας στην ομογενή ΔΕ βρίσκουμε ότι θα πρέπει

$$(\rho^2 + k\rho + \ell)\,e^{\rho x} = 0$$

δηλαδή το ρ θα πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού $\rho^2 + k\rho + \ell = 0$, η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**. Οπότε, η επίλυση της γενικής ΔΕ ανάγεται στις εξής τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό πραγματικών λύσεων της πολυωνυμικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού $\rho^2 + k\rho + \ell = 0$.

Πρώτη περίπτωση: Η $\rho^2 + k\rho + \ell = 0$ έχει δυο διαφορετικές πραγματικές λύσεις, τις ρ_1 και ρ_2, οπότε είναι $k = -\rho_1 - \rho_2$ και $\ell = \rho_1\rho_2$. Αν η $y = f(x)$ είναι γενική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ $y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$, στο I, τότε θα πρέπει να ισχύει

$$f''(x) + kf'(x) + \ell f(x) = q(x) \qquad \Rightarrow$$

$$f''(x) - (\rho_1 + \rho_2)f'(x) + \rho_1\rho_2 f(x) = q(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\big(f'(x) - \rho_1 f(x)\big)' - \rho_2\,\big(f'(x) - \rho_1 f(x)\big) = q(x)$$

Θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = f'(x) - \rho_1 f(x)$$

μέσω της οποίας η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$g'(x) - \rho_2\,g(x) = q(x)$$

η οποία είναι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα και η γενική λύση της είναι

$$g(x) = e^{\rho_2 x} \int e^{-\rho_2 x} q(x)\, d\,x + c_1\, e^{\rho_2 x}$$

Αφού υπολογίσουμε την $g(x)$ από την προηγούμενη ισότητα επανερχόμαστε στον ορισμό της $g(x)$ και παρατηρούμε ότι και η σχέση που συνδέει την $g(x)$ με την λύση $f(x)$ της ΔΕ που θέλουμε να βρούμε είναι πάλι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης δηλαδή η

$$f'(x) - \rho_1 f(x) = g(x)$$

Οπότε, με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, έχουμε ότι η $f(x)$ είναι η

$$f(x) = e^{\rho_1 x} \int e^{-\rho_1 x} g(x)\, d\,x + c_2\, e^{\rho_1 x}$$

Παράδειγμα 15.6. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = x$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\rho^2 - 3\,\rho + 2 = 0$ είναι οι $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$. Υπολογίζουμε την βοηθητική συνάρτηση $g(x)$ η οποία είναι λύση της ΔΕ

$$g'(x) - 2\,g(x) = x$$

κι έχουμε

$$g(x) = e^{2\,x} \int x\, e^{-2\,x}\, d\,x + c_1\, e^{2\,x} = e^{2\,x}\Big(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\Big)\, e^{-2\,x} + c_1\, e^{2\,x} = -\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + c_1\, e^{2\,x}$$

Με την βοήθεια της $g(x)$ η γενική λύση $y = f(x)$ της αρχικής ΔΕ είναι

$$\begin{aligned} y = f(x) &= e^{x} \int e^{-x}\Big(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + c_1\, e^{2\,x}\Big)\, d\,x + c_2 e^{x} \\ &= e^{x}\Big(-\frac{1}{4}\int e^{-x}\, d\,x - \frac{1}{2}\int x\, e^{-x}\, d\,x + c_1 \int e^{x}\, d\,x\Big) + c_2\, e^{x} \\ &= e^{x}\Big(\frac{1}{4}\, e^{-x} + \frac{1}{2}\,(x+1)\, e^{-x} + c_1\, e^{x}\Big) + c_2\, e^{x} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{x}{2} + c_1\, e^{2\,x} + c_2\, e^{x} \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι στις επιμέρους ολοκληρώσεις δεν είναι απαραίτητο να εμφανίσουμε επιπλέον σταθερές ολοκλήρωσης. Είναι αρκετό να βεβαιωθούμε ότι εμφανίζονται οι σταθερές

c_1 και c_2 στην διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η γενική λύση απαρτίζεται από δυο μέρη. Ένα μέρος που περιέχει τις δυο σταθερές c_1, και c_2, και ένα μέρος που δεν περιέχει σταθερές. Το πρώτο μέρος είναι λύση της ομογενούς ΔΕ, ενώ το δεύτερο μέρος είναι μια ειδική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ, δηλαδή

$$y = f(x) = y_{\text{ειδ.}} + y_{\text{ομογ.}}\,, \qquad y_{\text{ειδ.}} = \frac{3}{4} + \frac{x}{2}\,, \qquad y_{\text{ομογ.}} = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{x}$$

Αυτό είναι κοινό χαρακτηριστικό όλων των γραμμικών ΔΕ δεύτερης τάξης, και είναι απόρροια της γραμμικότητάς τους.

Δεύτερη περίπτωση: Η χαρακτηριστική δευτεροβάθμια εξίσωση $\rho^2 + k\rho + \ell = 0$ έχει μια διπλή πραγματική λύση, την ρ, οπότε είναι $k = -2\rho$ και $\ell = \rho^2$. Αν η $y = f(x)$ είναι γενική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ $y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$, στο I, τότε θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} &f''(x) + kf'(x) + \ell f(x) = q(x) && \Rightarrow \\ &f''(x) - 2\rho f'(x) + \rho^2 f(x) = q(x) && \Rightarrow \\ &\big(f'(x) - \rho f(x)\big)' - \rho\,\big(f'(x) - \rho f(x)\big) = q(x) \end{aligned}$$

Θεωρούμε και πάλι την βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = f'(x) - \rho f(x)$$

μέσω της οποίας η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$g'(x) - \rho\, g(x) = q(x)$$

η οποία είναι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα και η γενική λύση της είναι

$$g(x) = e^{\rho x} \int e^{-\rho x}\, q(x)\, d\,x + c_1\, e^{\rho x}$$

Αφού υπολογίσουμε την $g(x)$ από την προηγούμενη ισότητα επανερχόμαστε στον ορισμό της $g(x)$ και παρατηρούμε ότι και η σχέση που συνδέει την $g(x)$ με την λύση $f(x)$ της ΔΕ που θέλουμε να βρούμε είναι πάλι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης δηλαδή η

$$f'(x) - \rho f(x) = g(x)$$

Οπότε, με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, έχουμε ότι η $f(x)$ είναι η

$$f(x) = e^{\rho x} \int e^{-\rho x}\, g(x)\, d\,x + c_2\, e^{\rho x}$$

Παράδειγμα 15.7. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 2\,y' + \,y = \sin x$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση $\rho^2 - 2\,\rho + 1 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα την $\rho = 1$. Υπολογίζουμε την βοηθητική συνάρτηση $g(x)$ η οποία είναι λύση της ΔΕ

$$g'(x) - \,g(x) = \sin x$$

κι έχουμε

$$g(x) = e^x \int e^{-x}\,\sin x\,d\,x + c_1\,e^x = -\frac{1}{2}\,(\cos x + \sin x) + c_1\,e^x$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της Άσκησης 3.(α) στη σελίδα 106, με $a = -1$ και $b = 1$. Με την βοήθεια της $g(x)$ η γενική λύση $y = f(x)$ της αρχικής ΔΕ είναι

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &= e^x \int e^{-x}\Big(-\frac{1}{2}\,(\cos x + \sin x) + c_1\,e^x\Big)\,d\,x + c_2 e^x \\
&= e^x\Big(-\frac{1}{2}\int \,e^{-x}(\cos x + \sin x)\;d\,x + c_1 \int \,d\,x\Big) + c_2\,e^x \\
&= e^x\Big(\,\frac{1}{2}\,e^{-x}\,\cos x + c_1\,x\Big) + c_2\,e^x \\
&= \frac{1}{2}\,\cos x + c_1\,x\,e^x + c_2\,e^x
\end{aligned}$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της Άσκησης 3(α),(β) σελ. 106 για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Παρατηρούμε ότι και πάλι η λύση εκφράζεται ως άθροισμα δυο επιμέρους όρων. Ο ένας όρος $c_1\,x\,e^x + c_2\,e^x$ που περιέχει τις σταθερές ολοκλήρωσης c_1, και c_2 και αποτελεί την γενική λύση της ομογενούς ΔΕ $y'' - 2\,y' + y = 0$, κι ο όρος $\frac{1}{2}\cos x$ που είναι μια ειδική λύση της μή ομογενούς ΔΕ $y'' - 2\,y' + \,y = \sin x$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι σε αντιδιαστολή με την προηγούμενη περίπτωση όπου είχαμε δυο διαφορετικές ρίζες ρ_1, και ρ_2 και η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ είναι

$$y_{\text{ομογ}} = c_1\,e^{\rho_1\,x} + c_2\,e^{\rho_2\,x}$$

στην περίπτωση που έχουμε μια διπλή ρίζα, η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ είναι

$$y_{\text{ομογ}} = c_1\,x\,e^{\rho\,x} + c_2\,e^{\rho\,x}$$

Αυτό αποτελεί κοινό χαρακτηριστικό όλων των γραμμικών ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές για τις οποίες η αντίστοιχη χαρακτηριστική δευτεροβάμια εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα ρ.

Τρίτη περίπτωση: Η χαρακτηριστική δευτεροβάθμια εξίσωση $\rho^2 + k\rho + \ell = 0$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, τις $\rho + i\,\beta$, και $\rho - i\,\beta$ οπότε είναι $k = -2\,\rho$ και $\ell = \rho^2 + \beta^2$. Αν η $y = f(x)$ είναι γενική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ $y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$, στο I, τότε θα πρέπει να ισχύει

$$f''(x) + kf'(x) + \ell f(x) = q(x) \qquad \Rightarrow$$

$$f''(x) - 2\,\rho f'(x) + (\rho^2 + \beta^2)f(x) = q(x)$$

για κάθε x στο I. Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της προηγούμενης ΔΕ με τον όρο $e^{-\rho x}$, και εισαγάγουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = e^{-\rho x} f(x)$$

για την οποία η ΔΕ ανάγεται στην

$$g''(x) + \beta^2\,g(x) = e^{-\rho x}\,q(x)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της προηγούμενης σχέσης μια φορά με τον όρο $\sin(\beta\,x)$ και μια φορά με τον όρο $\cos(\beta\,x)$ και βρίσκουμε αντίστοιχα τις

$$\big(g'(x)\,\sin(\beta\,x) - \beta\,g(x)\,\cos(\beta\,x)\big)' = \; e^{-\rho x}\,q(x)\,\sin(\beta\,x)$$

$$\big(g'(x)\,\cos(\beta\,x) + \beta\,g(x)\,\sin(\beta\,x)\big)' = \; e^{-\rho x}\,q(x)\,\cos(\beta\,x)$$

Παίρνοντας το αόριστο ολοκλήρωμα και στα δυο μέλη των προηγούμενων σχέσεων έχουμε

$$g'(x)\,\sin(\beta\,x) - \beta\,g(x)\,\cos(\beta\,x) = \int e^{-\rho x}\,q(x)\,\sin(\beta\,x)\,d\,x + c_1$$

$$g'(x)\,\cos(\beta\,x) + \beta\,g(x)\,\sin(\beta\,x) = \int e^{-\rho x}\,q(x)\,\cos(\beta\,x)\,d\,x + c_2$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες σταθερές. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με $-\frac{1}{\beta}\cos(\beta\,x)$ και την δεύτερη με $\frac{1}{\beta}\sin(\beta\,x)$ και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$g(x) = \frac{1}{\beta}\,\sin(\beta\,x)\int e^{-\rho x}\,q(x)\,\cos(\beta\,x)\,d\,x - \frac{1}{\beta}\,\cos(\beta\,x)\int e^{-\rho x}\,q(x)\,\sin(\beta\,x)\,d\,x$$

$$-\frac{c_1}{\beta}\,\cos(\beta\,x) + \frac{c_2}{\beta}\,\sin(\beta\,x)$$

Επανερχόμενοι στον ορισμό της βοηθητικής συνάρτησης $g(x)$ έχουμε ότι η λύση $y = f(x)$ της ΔΕ στην περίπτωση δυο συζυγών μιγαδικών ριζών του χαρακτηριστηκού πολυωνύμου είναι

$$f(x) = \frac{e^{\rho x}}{\beta}\,\sin(\beta\,x)\int e^{-\rho x}\,q(x)\,\cos(\beta\,x)\,d\,x - \frac{e^{\rho x}}{\beta}\,\cos(\beta\,x)\int e^{-\rho x}\,q(x)\,\sin(\beta\,x)\,d\,x$$

$$-\frac{c_1}{\beta}\,e^{\rho x}\,\cos(\beta\,x) + \frac{c_2}{\beta}\,e^{\rho x}\,\sin(\beta\,x)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα, σύμφωνα με τον ορισμό τους, με ορισμένο ολοκλήρωμα από ένα αυθαίρετο και βολικό από πλευράς πράξεων x_0 μέχρι x, η λύση $y = f(x)$ μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\jmath} e^{\rho(x-t)} \sin\big(\jmath(x-t)\big)\, q(t)\, d\,t - \frac{c_1}{\jmath} e^{\rho x} \cos(\jmath x) + \frac{c_2}{\jmath} e^{\rho x} \sin(\jmath x)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(\jmath x)\, \cos(\jmath t) - \cos(\jmath x)\, \sin(\jmath t) = \sin\big(\jmath(x-t)\big)$$

Παράδειγμα 15.8. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 2\, y' + 2 = 2\, \cos x + \sin x$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho^2 + 2\,\rho + 2 = 0$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις $\rho_1 = -1 + i$, και $\rho_2 = -1 - i$. Αν $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της ΔΕ, θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$ για την οποία η ΔΕ

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 2\, \cos x + \sin x$$

μετατρέπεται στην

$$g''(x) + g(x) = 2\, e^x\, \cos x + e^x\, \sin x$$

Αφού το φανταστικό μέρος της ρίζας είναι $\jmath = 1$, πολλαπλασιάζουμε την προηγούμενη σχέση μια φορά με $\sin x$ και μια $\cos x$ την προηγούμενη και παίρνουμε

$$\big(g'(x)\, \sin x - g(x)\, \cos x\big)' = e^x \left(2 \cos x \sin x + (\sin x)^2\right)$$

$$\big(g'(x)\, \cos x + g(x)\, \sin x\big)' = e^x \big(2\,(\cos x)^2 + \cos x\, \sin x\big)$$

Οπότε ολοκληρώνοντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$g'(x)\, \sin x - g(x)\, \cos x = \int e^x \left(2 \cos x \sin x + (\sin x)^2\right) d\,x = e^x\, (\sin x)^2 + c_1$$

$$g'(x)\, \cos x + g(x)\, \sin x = \int e^x \big(2\,(\cos x)^2 + \cos x\, \sin x\big) d\,x = e^x (1 + \cos x\, \sin x) + c_2$$

όπου για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της Άσκησης 3 στη σελ. 106, καθώς και τριγωνομετρικές ταυτότητες. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη από τις τελευταίες σχέσεις με $-\cos x$ και την δεύτερη με $\sin x$ και τις σχέσεις που προκύπτουν τις προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε

$$g(x) = e^x\, \sin x - c_1\, \cos x + c_2\, \sin x$$

και επομένως η λύση της ΔΕ είναι η

$$y = f(x) = e^{-x}\, g(x) = \sin x - c_1\, e^{-x}\, \cos x + c_2\, e^{-x}\, \sin x$$

15.3 Ασκήσεις στην ενότητα 15

Άσκηση 1. Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές. Για κάθε εξίσωση να βρεθούν όλες οι λύσεις της και τα αντίστοιχα διαστήματα.

$$a)\quad y' = e^{-y}\,,\quad b)\quad y^2\,y' = 1\,,\qquad c)\quad (1+x^2)\,y\,y' = 1+y^2\,,\quad d)\quad x\,y\,y' = (1+x^2)\,(1+y^2)\,,$$

$$e)\quad y' = y^2\,,\quad f)\quad (x-1)y' = x\,y\,,\quad g)\quad y' = (y-1)(y-2)\,,\qquad h)\quad (x^2-4)y' = y\,.$$

Απ. $a)\,y = \ln|x+c|\,,\quad b)\,y = \sqrt[3]{3\,x+c}\,,\quad c)\,y^2+1 = c\,e^{\arctan x}\,,\quad d)\,y^2+1 = c\,x^2 e^{x^2}\,,\quad e)\,y = \frac{-1}{x+c}\,,$
$f)\,y = c\,(x-1)\,e^x\,,\quad g)\,y = \dfrac{2-c\,e^x}{1-c\,e^x}\,,\quad h)\,y = 0,$ ή $y = c + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|\,.$

Άσκηση 2. Να βρεθεί η γενική λύση της $y' + k\,y = 0$ στο $(-\infty,+\infty)$, όπου k πραγματική σταθερή παράμετρος.
Απ. $y = c\,e^{-k\,x}$

Άσκηση 3. Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης. Για κάθε εξίσωση να βρεθούν όλες οι λύσεις της και τα αντίστοιχα διαστήματα.

$$a)\quad y' + y = x\,e^{2\,x}\,,\quad b)\quad x\,y' - y = 1\,,\qquad c)\quad x\,y' - y = x\,,$$

$$d)\quad y' + x\,y = x^3\,,\quad e)\quad y' + (\tan x)\,y = \cos x\,,\quad f)\quad y' + (\cot x)\,y = \cos x\,.$$

Απ. $a)\,y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)e^{2\,x} + c\,e^{-x}\,,\quad b)\,y = c\,x - 1\,,\quad c)\,y = c\,x + x\ln|x|\,,\quad d)\,y = x^2 - 2 + c\,e^{-x^2/2}\,,$
$e)\,y = x\,\cos x + c\,\cos x\,,\quad f)\,y = -\frac{1}{2}\,\frac{(\cos x)^2}{\sin x} + c\,\frac{1}{\sin x}\,.$

Άσκηση 4. Να βρεθούν οι συντελεστές k και ℓ έτσι ώστε η γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές $y'' + k\,y' + \ell\,y = 0$ να ως έχει λύση την

$$a)\quad y = e^{-x} + 3\,e^{3\,x}\,,\qquad b)\quad y = (1+2\,x)\,e^x\,,\qquad c)\quad y = e^{-2\,x}\,\sin(3\,x)$$

Ποιά είναι η γενική λύση της ΔΕ σε κάθε περίπτωση;
Απ. $a)\ k=-1,\ \ell=-2,\quad y = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{2\,x}\,,\quad b)\ k=-2,\ \ell=1,\quad y = c_1\,e^x + c_2\,x\,e^x\,,$
$c)\ k=4,\ \ell=13,\quad y = c_1\,e^{-2\,x}\cos(3\,x) + c_2\,e^{-2\,x}\sin(3\,x)\,.$

Άσκηση 5. Να βρεθεί η γενική λύση για κάθε μια από τις ακόλουθες ΔΕ γραμμικές ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$a)\quad y'' - 4\,y' + 3\,y = e^x\,,\quad b)\quad y'' + 6\,y' + 9\,y = x\,e^{3\,x}\,,\qquad c)\quad y'' - 2\,y' + 5\,y = \sin(2\,x)$$

Απ. $a)\ y = -\frac{1}{4}\,e^x\,(1+2\,x) + c_1\,e^x + c_2\,e^{3\,x}\,,\quad b)\ y = \frac{1}{108}\,e^{3\,x}(3\,x-1) + c_1\,e^{-3\,x} + c_2\,x\,e^{-3\,x}\,,$
$c)\ y = \frac{1}{17}\big(4\,\cos(2\,x) + \sin(2\,x)\big) + c_1\,e^x\cos(2\,x) + c_2\,e^x\sin(2\,x)\,.$

16 Εφαρμογές των ΔΕ στην Φυσική και στην Οικολογία

16.1 Αδρανοποίηση ραδιενεργών υλικών

Όλα τα χημικά στοιχεία της φύσης εμφανίζονται σε διάφορες παραλλαγές που ονομάζονται ισότοπα. Αυτό ισχύει τόσο για τα ελαφριά, όπως το υδρογόνο, όσο και για τα βαριά, όπως το ουράνιο. Η διαφορά ενός ισότοπου από το άλλο βρίσκεται στη σύσταση του πυρήνα. Ακριβέστερα, όλα τα ισότοπα ενός στοιχείου έχουν στον πυρήνα τους τον ίδιο αριθμό πρωτονίων, αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων.

Οι πυρήνες ορισμένων ισοτόπων είναι ασταθείς και συνεχώς διασπώνται, εκπέμποντας και ακτινοβολία. Αυτά τα ισότοπα λέγονται ραδιενεργά. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του άνθρακα, C. Αυτό το στοιχείο το βρίσκουμε κυρίως στη μορφή του σταθερού ισότοπου ^{12}C (άνθρακας-12). Ωστόσο, κάθε δείγμα άνθρακα περιέχει και ένα ποσοστό του σταθερού ισότοπου ^{13}C , καθώς και του ραδιενεργού ^{14}C .

Η διάσπαση ενός ασταθούς πυρήνα θεωρείται πως είναι μια αμιγώς κβαντομηχανική διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι είναι πιθανοκρατική, οπότε ο χρόνος ζωής κάθε πυρήνα ενός ραδιενεργού ισότοπου είναι απροσδιόριστος. Εμπειρικά, ωστόσο, έχει διαπιστωθεί ότι, ο συνολικός αριθμός των ασταθών πυρήνων, $N(t)$, σε χρόνο t, που περιέχει ένα ραδιενεργό υλικό μειώνεται με ρυθμό ανάλογο προς τον ίδιο τον $N(t)$. Με άλλα λόγια, η μεταβολή του $N(t)$ περιγράφεται από μια ΔΕ της μορφής

$$N' = -bN$$

όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t, η εξαρτημένη μεταβλητή είναι ο συνολικός αριθμός των ασταθών πυρήνων $N(t)$ και $b > 0$ μια θετική πραγματική παράμετρος. Η παραπάνω ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και η γενική της λύση είναι

$$N(t) = c\, e^{-b\,t}$$

(δες Άσκηση 2 σελ. 130 στην προηγούμενη ενότητα). Αν γνωρίζουμε ότι για $t = t_0$ ο αριθμός των ασταθών πυρήνων είναι N_0, τότε από την προηγούμενη μπορούμε να προσδιορίσουμε την σταθερή ολοκλήρωσης c, θέτοντας για $t = t_0$, $N(t_0) = N_0$, κι έχουμε

$$N_0 = c\, e^{-b\,t_0} \quad \Rightarrow \quad c = N_0\, e^{b\,t_0}$$

και συνεπώς η συνάρτηση που μας δίνει τον αριθμό των ασταθών πυρήνων γίνεται

$$N(t) = N_0\, e^{-b\,(t-t_0)}$$

Η σταθερή b διαφέρει από ισότοπο σε ισότοπο και άρα είναι χαρακτηριστική του ρυθμού με τον οποίο διασπάται το καθένα τους. Για τον ^{14}C η παράμετρος b είναι $b \approx 1.21 \times 10^{-4}$/έτος. Ωστόσο, στις πηγές που δίνουν πληροφορίες για τις ιδιότητες των χημικών στοιχείων (Περιοδικοί Πίνακες) δεν αναφέρεται η τιμή της σταθερής b για καθένα από τα ραδιενεργά ισότοπα, αλλά ο χρόνος ημιζωής τους (half-life). Πρόκειται για το χρονικό διάστημα $T_{1/2}$ που απαιτείται για να μειωθεί το πλήθος των ασταθών ραδιενεργών πυρήνων στο μισό του αρχικού. Σύμφωνα με την λύση που βρήκαμε, αυτό το χρονικό διάστημα προσδιορίζεται από τη συνθήκη $\frac{1}{2} = e^{-b T_{1/2}}$. Άρα

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} \approx \frac{0.693}{b}$$

και ειδικότερα για τον ^{14}C, $T_{1/2} = 5\,730$ έτη.

Επειδή ο λόγος του ^{14}C προς το ^{12}C στην ατμόσφαιρα είναι σταθερός, το ίδιο ισχύει και για το σώμα των ανθρώπων και των άλλων έμβιων όντων. Αλλά, μόνο όσο αυτά βρίσκονται στη ζωή. Μόλις πεθάνουν, η απορρόφηση ^{14}C από την ατμόσφαιρα σταματάει. Άρα, με τη συνεχή διάσπασή του, αυτό το ισότοπο όλο και μειώνεται στο νεκρό σώμα και στα οστά τους. Συνεπώς, σε χρόνο T μετά το θάνατό τους, ο ^{14}C έχει μειωθεί στο $N/N_0 = e^{-bT}$ του αρχικού. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί και τη βάση της μεθόδου που χρησιμοποιείται στην παλεοντολογία και την αρχαιολογία για να προσδιορίσουν την “ηλικία” των ευρημάτων τους (radioactive dating): Το ποσοστό του ^{14}C που βρίσκεται σήμερα σε απομεινάρια οργανισμών μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το πότε περίπου πέθαναν και, άρα, το πριν από πόσους αιώνες βρίσκονταν στη ζωή.

16.2 Μοντέλα πληθυσμιακής αύξησης

16.2.1 Ο νόμος της εκθετικής ανάπτυξης

Κάτω από ιδεατές συνθήκες (απεριόριστο περιβάλλον, επαρκής διατροφή, απουσία θηρευτών, ανοσία από ασθένειες, μη-μετανάστευση) είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός P ενός βιολογικού είδους αναπτύσσεται με ρυθμό ανάλογο του μεγέθους του υπάρχοντος πληθυσμού. Με μαθηματικούς όρους αυτό περιγράφεται από την σχέση

$$P' = r\,P\,, \qquad P(0) = P_0$$

όπου t δηλώνει τον χρονική μεταβλητή, r παραστάνει την σταθερή αναλογίας, και $P(t)$ περιγράφει τον πληθυσμό [4] στον χρόνο t. Μια εξίσωση αυτού του είδους λέγεται **νόμος εκθετικής ανάπτυξης**. Ο νόμος γράφεται εναλλακτικά και ως

$$\frac{1}{P}\,P' = r\,, \qquad P(0) = P_0$$

και δηλώνει ότι ο σχετικός ρυθμός ανάπτυξης $\frac{P'}{P}$ του P είναι σταθερός. Ο νόμος αυτός διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον βρετανό οικονομολόγο Thomas Malthus το 1798.

Γενικά, αν ο ρυθμός που αλλάζει η ποσότητα P είναι ανάλογη του υπάρχουσας ποσότητα P τότε υπακούει στον νόμο εκθετικής ανάπτυξης. Αν $r > 0$, ο πληθυσμός αυξάνει, αν $r = 0$

[4] Αν και ο αριθμός των μελών ενός είδους είναι μια συνάρτηση με τιμές στους ακέραιους υποθέτουμε ότι η $P(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση που θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι η συνολική βιομάζα του είδους.

ο πληθυσμός μένει σταθερός, κι αν $r < 0$ ο πληθυσμός μειώνεται. Η ΔΕ είναι η όμοια με αυτήν της προηγούμενης παραγράφου και η γενική λύση της είναι

$$P(t) = P_0\, e^{r\,t}$$

Αν θέλουμε να λάβουμε υπόψη στο μοντέλο μας και την μετανάστευση από ένα πληθυσμό με ένα σταθερό ρυθμό m, τότε η εξίσωση τροποποιείται ως εξής

$$P' = r\,P - m\,, \qquad P(0) = P_0$$

η οποία μπορεί να λυθεί εύκολα ή ως ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές ή ως γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης. Η γενική λύση της τελευταίας είναι

$$P(t) = \frac{m}{r} + \big(P_0 - \frac{m}{r}\big)\, e^{r\,t}$$

16.2.2 Το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο

Ο πληθυσμός P συχνά αυξάνεται εκθετικά στα αρχικά στάδια ζωής του όμως σταδιακά φτάνει στο όριο χωρητικότητας του εξαιτίας περιβαλλοντικών πιέσεων και περιορισμένων διατροφικών πόρων. Για να περιγράψουμε το γεγονός ότι η σχετική ανάπτυξη μειώνεται καθώς ο πληθυσμός αυξάνει και γίνεται αρνητικός αν το P ξεπεράσει την φέρουσα χωρητικότητα του περιβάλλοντος K, δηλαδή τον μέγιστο πληθυσμό που είναι ικανό να υποστηρίξει το περιβάλλον μακροπρόθεσμα, θεωρούμε ότι ο σχετικός ρυθμός ανάπτυξης είναι

$$\frac{1}{P}\,P' = r\,\big(1 - \frac{P}{K}\big)\,, \qquad P(0) = P_0$$

Ο νόμος αυτός λέγεται το λογισικό μοντέλο πληθυσμιακής ανάπτυξης και διατυπώθηκε από τον βέλγο μαθηματικό Pierre François Verhulst το 1838. Ισοδύναμα, έχουμε ότι

$$P' = r\,P\,\big(1 - \frac{P}{K}\big)\,, \qquad P(0) = P_0$$

Υποθέτουμε ότι $r > 0$, και $K > 0$ στα παρακάτω. Η λογιστική εξίσωση έχει δυο ειδικές λύσεις οι οποίες καθορίζονται από τα σημεία μηδενισμού της P', δηλαδή $P = 0$ ή $P = K$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $P' < 0$ αν $P > K$ και $P' > 0$ αν $0 < P < K$ και συνεπώς η $P(t)$ είναι φθίνουσα αν $P_0 > K$ και αύξουσα αν $0 < P_0 < K$. Μπορούμε να βρούμε εύκολα την γενική λύση της λογιστικής εξίσωσης αφού είναι χωριζομένων μεταβλητών κι έχουμε

$$\int \big(\frac{1}{P} - \frac{1}{P-K}\big)\, d\,P = \int r\,d\,t + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{P}{P-K}\right| = r\,t + c$$

Λύνοντας την τελευταία ως προς P βρίσκουμε ότι

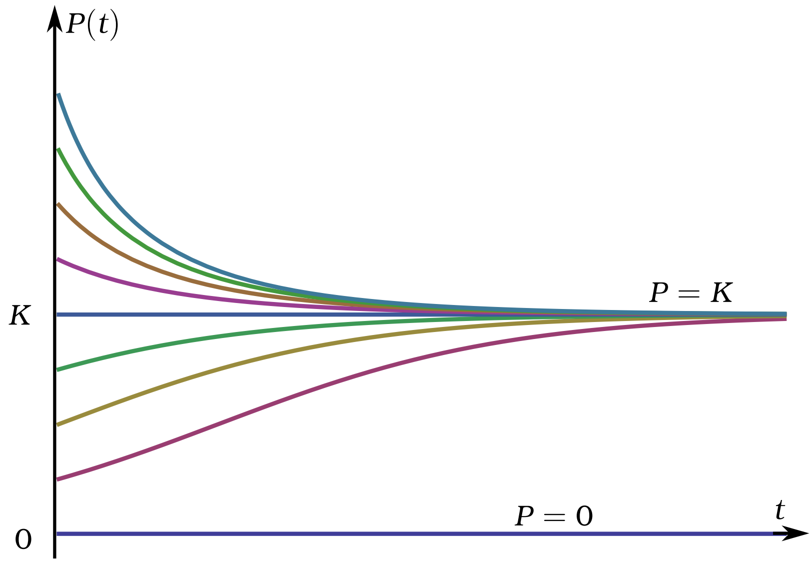
$$P(t) = \frac{K\,P_0}{P_0\,(1 - e^{-r\,t}) + K\,e^{-r\,t}}$$

όπου η σταθερή c ολοκλήρωσης με την P_0 συνδέονται με την σχέση $e^c = \frac{P_0}{P_0-K}$. Παρατηρούμε ότι η γενική λύση περιλαμβάνει και τις δυο ειδικές λύσεις $P = 0$ αν $P_0 = 0$, και $\lim_{t\to+\infty} P(t) = K$, αν $P_0 > 0$.

Παραγωγίζοντας την λογιστική εξίσωση ως προς t βρίσκουμε ότι

$$P'' = r\,P'\left(1-\frac{P}{K}\right) - r\,P\,\frac{P'}{K} = r\,P'\left(1-\frac{P}{K}-\frac{P}{K}\right) = r^2\,P\left(1-\frac{P}{K}\right)\left(1-2\,\frac{P}{K}\right)$$

Αυτό δείχνει ότι ο ρυθμός αύξησης του P' έχει ακρότατες τιμές όταν $P = 0$, $P = K$ ή $P = \frac{K}{2}$. Αφού όμως οι $P(t) = 0$ και $P(t) = K$ είναι λύσεις ισορροπίας της λογιστικής εξίσωσης, τότε συμπεραίνουμε ότι ο πληθυσμός $P(t)$ αυξάνει γρηγορότερα όταν φθάσει στο μισό της φέρουσας χωρητικότητας, με την προϋπόθεση ότι $0 < P_0 < K$.



Σχήμα 40: Γραφική παράσταση της λύσης της λογιστικής εξίσωσης για διάφορες αρχικές τιμές P_0. Όταν $\frac{K}{2} < P_0 < K$ η $P(t)$ φθάνει την μέγιστη τιμή της $P = K$ πιο γρήγορα από ότι όταν $0 < P_0 < \frac{K}{2}$. Όταν ο αρχικός πληθυσμός ξεπερνά την φέρουσα χωρητικότητα του περιβάλλοντος, δηλαδή $P_0 > K$, τότε η $P(t)$ φθίνει για να γίνει ασυμπτωτικά ίση με $P = K$.

Παράδειγμα 16.1. Ένα μοντέλο για την διάδοση μιας φήμης είναι ότι ο ρυθμός διάδοσης είναι ανάλογος με το γινόμενο του ποσοστού y του πληθυσμού που έχουν ακούσει την φήμη και του ποσοστού του πληθυσμού που δεν έχουν ακούσει την φήμη. Με μαθηματικούς όρους αυτό περιγράφεται από την ΔΕ

$$y' = r\,y\,(1-y)\,, \qquad y(0) = y_0$$

όπου r είναι μια σταθερή. Λύνοντας την παραπάνω ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών βρίσκουμε ότι

$$y = \frac{y_0}{y_0\,(1-e^{-r\,t}) + e^{-r\,t}}$$

Ας υποθέσουμε ότι μια μικρή πόλη έχει 1000 κατοίκους. Στις 8 η ώρα το πρωί ($t = 0$), 80 κάτοικοι έχουν ακούσει την φήμη. Μέχρι το μεσημέρι ($t = 4$ ώρες), η φήμη έχει διαδοθεί έτσι ώστε οι μισοί κάτοικοι να την έχουν ακούσει. Δηλαδή,

$$y_0 = \frac{80}{1000} = \frac{2}{25}$$

και

$$\frac{y_0}{y_0\,(1 - e^{-4\,r}) + e^{-4\,r}} = \frac{1}{2}$$

Οπότε, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$2\,y_0 = y_0 - y_0\,e^{-4\,r} + e^{-4\,r} = y_0 + (1 - y_0)\,e^{-4\,t}$$

από την οποία έχουμε ότι

$$(e^{-r})^4 = e^{-4\,r} = \frac{y_0}{1 - y_0}$$

και

$$e^{-r} = \left(\frac{y_0}{1 - y_0}\right)^{1/4}$$

Συνεπώς

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0\,[\,1 - (e^{-r})^t\,] + (e^{-r})^t} = \frac{y_0}{y_0\,[\,1 - (2/23)^{t/4}\,] + (2/23)^{t/4}}$$

Για να εκτιμήσουμε τον χρόνο στον οποίο το 90% των κατοίκων έχουν ακούσει την φήμη, ας υποθέσουμε ότι T είναι ο χρόνος που έχει παρέλθει από τις 8 η ώρα το πρωί. Τότε

$$y(T) = \frac{y_0}{y_0\,[\,1 - (2/23)^{T/4}\,] + (2/23)^{T/4}} = \frac{9}{10}$$

δηλαδή

$$10\,y_0 = 9\,y_0 - 9\,y_0\,(2/23)^{T/4} + 9\,(2/23)^{T/4} = 9\,y_0 + 9\,(1 - y_0)\,(2/23)^{T/4}$$

λύνοντας την τελευταία ως προς $(2/23)^{T/4}$ έχουμε

$$\left(\frac{2}{23}\right)^{T/4} = \frac{y_0}{9\,(1 - y_0)}$$

και λύνοντας την τελευταία ως προς T παίρνουμε

$$T = \frac{4}{\ln(2/23)}\,\ln\left[\frac{y_0}{9\,(1 - y_0)}\right] = \frac{4}{\ln(2/23)}\,\ln\left[\frac{2}{207}\right] \approx 7.59855 \text{ ώρες}$$

Άρα, $T \approx 7 + \frac{6}{10} = 7 + \frac{36}{60}$ ώρες, δηλαδή 7 ώρες και 36 λεπτά μετά τις 8 η ώρα το πρωί (ή στις 3 : 36 μ.μ.) το 90% των κατοίκων θα έχει ακούσει την φήμη.