1 Οι πραγματικοί αριθμοί

1.1 Σύνολα αριθμών

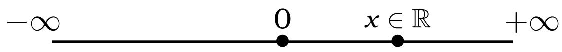
Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Οι ακέραιοι διαμερίζονται σε άρτιους και περιττούς ανάλογα αν ένας ακέραιος διαιρείται με το δύο ή όχι αντίστοιχα. Το μηδέν είναι άρτιος.

Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} = \{x \ : \ x = \dfrac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0\}$

Το σύνολο των θετικών ρητών $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x > 0\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και παριστάνεται με την πραγματική ευθεία



Το σύνολο των θετικών πραγματικών $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$

Το σύνολο των αρνητικών πραγματικών $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}$

Έστω A, B δυο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, δηλαδή $A, B \subset \mathbb{R}$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ ορίζεται ως το σύνολο των ζευγαριών (a, b) όπου το a διατρέχει το A και το b διατρέχει το B, δηλαδή $A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A\,,\ b \in B\}$.

1.2 Διαστήματα

Έστω $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$. Διάφορα κλειστά, ανοικτά, ανοικτά-κλειστά, κλειστά-ανοικτά διαστήματα στον $\mathbb{R}$ είναι

$[a, \beta] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq \beta\}$, $\qquad [a, \beta) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < \beta\}$

$(a, \beta] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq \beta\}$, $\qquad (a, \beta) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < \beta\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$, $\qquad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$

$(-\infty, \beta) = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$, $\qquad (-\infty, \beta] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq \beta\}$ $\qquad (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Όταν το άκρο ενός διαστήματος στον $\mathbb{R}$ είναι $\pm\infty$ τότε το διάστημα είναι πάντα ανοικτό στο άκρο αυτό και σημειώνεται με παρένθεση. Τα $\pm\infty$ δεν θεωρούνται αριθμοί.

Θεώρημα 1.1. *Το $\mathbb{Q}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{R}$ που δεν είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}$.*

Απόδειξη: Έστω $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ τέτοιος που $y^2 = 2$. Θα δείξουμε ότι ο y δεν ανήκει στους ρητούς, $y \notin \mathbb{Q}$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $y \in \mathbb{Q}$, με $y = m/n$ όπου m, n θετικοί ακέραιοι και μ.κ.δ.(m, n)=1, δηλαδή το κλάσμα m/n είναι ανάγωγο. Ειδικότερα οι m, n δεν είναι και οι δυο άρτιοι. Έχουμε ότι $m^2 = 2\,n^2$, άρα ο m είναι άρτιος, (το τετράγωνο περιττού είναι περιττός). Έστω $m = 2k$, k θετικός ακέραιος. Τότε $n^2 = 2k^2$ και συνεπώς και ο n είναι άρτιος. Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι μ.κ.δ.(m, n)=1 κι έτσι οι m, n δεν μπορούν να είναι και οι δυο άρτιοι. Άρα η υπόθεση με την οποία ξεκινήσαμε $y \in \mathbb{Q}$ είναι λάθος, άρα $y \notin \mathbb{Q}$. □

1.3 Αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ και το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι διατεταγμένα σώματα.

1.3.1 Διατεταγμένα σώματα

Ορισμός 1.2. Ένα μή κενό σύνολο Σ λέγεται διατεταγμένο σώμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Αξιώματα της πρόσθεσης

Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x + y$ και λέγεται το άθροισμα των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x + y$ λέγεται πρόσθεση κι ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Προσεταιριστική $\forall x, y, z \in \Sigma$ ισχύει ότι $(x + y) + z = x + (y + z)$

- Αντιμεταθετική $\forall x, y \in \Sigma$ ισχύει ότι $x + y = y + x$

- Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με 0 τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \Sigma\,, \quad x + 0 = 0 + x = x$$

- Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου. Για κάθε στοιχείο x του Σ υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται με $-x$ τέτοιο ώστε

$$x + (-x) = (-x) + x = 0\,.$$

Η αφαίρεση στο Σ ορίζεται από την σχέση

$$x - y = x + (-y) \qquad \forall x, y \in \Sigma \,.$$

β) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού

Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x\,y$ και λέγεται το γινόμενο των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x\,y$ λέγεται πολλαπλασιασμός κι ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

• Προσεταιριστική $\forall x, y, z \in \Sigma$ ισχύει ότι $(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$

• Αντιμεταθετική $\forall x, y \in \Sigma$ ισχύει ότι $x\,y = y\,x$

• Ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με 1 τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \Sigma \,, \quad x\,1 = 1\,x = x$$

• Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου. Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο x του Σ, υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται με x^{-1} τέτοιο ώστε

$$x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1 \,, \qquad x \neq 0 \,.$$

Η διαίρεση στο Σ ορίζεται από την σχέση

$$\frac{x}{y} = x\,y^{-1} \qquad \forall x, y \in \Sigma \,, \quad y \neq 0 \,.$$

γ) Επιμεριστική ιδιότητα

Η επιμεριστική ιδιότητα συνδέει τον πολλαπλασιασμό με πρόσθεση:

$$\forall x, y, z \in \Sigma \qquad \text{ισχύει} \qquad x\,(y + z) = x\,y + x\,z \,.$$

δ) Ιδιότητες της διάταξης

Υπάρχει ένα υποσύνολο Θ του Σ, που λέγεται το σύνολο των θετικών στοιχείων του Σ, το οποίο ορίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες

• Για κάθε στοιχείο x του Σ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$x \in \Theta \,, \qquad -x \in \Theta \,, \qquad x = 0 \,.$$

• Αν $x, y \in \Theta$ τότε $x + y \in \Theta$ και $x\,y \in \Theta$.

Το σύνολο Θ ορίζει μια διάταξη στο σώμα Σ ως εξής: Λέμε ότι $x > y$ αν και μόνο αν $x - y \in \Theta$. Γράφοντας $x \geq 0$ εννοούμε ότι $x > y$ ή $x = y$. Από τον ορισμό του Θ προκύπτει ότι

$$x \in \Theta \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \,.$$

Από τις ιδιότητες του Θ έπονται οι παρακάτω ιδιότητες της διάταξης $>$:

• (νόμος της τριχοτομίας) Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$x > y\,, \qquad x < y\,, \qquad x = y\,.$$

• (μεταβατική ιδιότητα) Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$.

• (νόμος διαγραφής για την πρόσθεση) Αν $x > y$ τότε για κάθε z ισχύει ότι $x + z > y + z$

• (νόμος διαγραφής για τον πολ/σμό) Αν $x > y$ και $z > 0$, τότε $x z > y z$.

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι το τυπικό παράδειγμα ενός διατεταγμένου σώματος. Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμοί με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι διατεταγμένο σώμα.

Μια ιδιότητα που διαφοροποιεί το $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$ είναι το αξίωμα της πληρότητας που εξετάζουμε παρακάτω.

1.3.2 Το αξίωμα της πληρότητας

Από την στιγμή που σ' ένα διατεταγμένο σώμα Σ έχουμε ορίσει μια διάταξη $>$ μπορούμε να μιλάμε για υποσύνολα του Σ που είναι άνω ή κάτω φραγμένα.

Ορισμός 1.3. Έστω ένα διατεταγμένο σώμα Σ. Ένα υποσύνολο A του Σ λέγεται

• άνω φραγμένο, αν υπάρχει $a \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $x \leq a$, για κάθε $x \in A$,

• κάτω φραγμένο, αν υπάρχει $b \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $b \leq x$, για κάθε $x \in A$,

• φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Κάθε στοιχείο του Σ που ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό λέγεται άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα του A.

Ορισμός 1.4. α) Έστω A ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το στοιχείο $a \in \Sigma$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A αν

• το a είναι άνω φράγμα του A και

• αν a_1 είναι ένα άνω φράγμα του A τότε $a \leq a_1$.

β) Έστω A ένα κάτω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το στοιχείο $a \in \Sigma$ είναι μέγιστο κάτω φράγμα του A αν

• το a είναι κάτω φράγμα του A και

• αν a_1 είναι ένα κάτω φράγμα του A τότε $a \geq a_1$.

Στην περίπτωση που υπάρχουν, θα συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του A με $\sup A$ (supremum του A), και το μέγιστο κάτω φράγμα του A με $\inf A$ (infimum του A).

Προσοχή!!! Τα $\sup A$, $\inf A$ μπορεί να είναι στοιχεία του A, αλλά μπορεί και να μην είναι. Στην περίπτωση που $\sup A \in A$, $\inf A \in A$, τότε τα $\sup A$ και $\inf A$ είναι το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο του A, αντίστοιχα, δηλαδή $\sup A = \max A$ και $\inf A = \min A$.

Παράδειγμα α) Έστω $A = [0, 1)$. Τότε $\sup A = 1 \notin A$, $\inf A = 0 \in A$.
β) Έστω $A = (1, 3]$. Τότε $\inf A = 1 \notin A$, $\sup A = 3 \in A$.

> **Το αξίωμα της πληρότητας:** Λέμε ότι ένα διατεταγμένο σώμα Σ ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας αν κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του Σ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $a \in \Sigma$.

Ένα διατεταγμένο σώμα Σ που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας λέγεται *πλήρως διατεταγμένο σώμα.*

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών **δεν** είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα, δηλαδή υπάρχει μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα (στο $\mathbb{Q}$). Πράγματι, ας θεωρήσουμε το υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ με

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$$

Το A είναι μη κενό αφού $1 \in A$ και το A είναι άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το 2, αφού $2 > 0$ και $2^2 = 4 > 2 > x^2$, οπότε $x < 2$ για κάθε $x \in A$. Παραλείποντας μια αυστηρή απόδειξη, αν υπήρχε το "ελάχιστο άνω φράγμα" του A αυτό θα ήταν το $\sqrt{2}$, το οποίο όμως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 1.1 ότι "λείπει" από το $\mathbb{Q}$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ισχύει το αξίωμα της πληρότητας.

Αξίωμα της πληρότητας για τους πραγματικούς αριθμούς: Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $a \in \mathbb{R}$.

> Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.

1.4 Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών

Έστω ε και a πραγματικοί αριθμοί, $\varepsilon, a \in \mathbb{R}$ με $\varepsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\,\varepsilon > a$.

Απόδειξη: Θα πάμε με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\,\varepsilon > a$. Δηλαδή για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n\,\varepsilon \leq a$. Τότε το υποσύνολο $A = \{n\,\varepsilon \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ των πραγματικών είναι άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το a. Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του A, ας το πούμε $\beta = \sup A \in \mathbb{R}$. Προφανώς $\beta - \varepsilon < \beta$, άρα το $\beta - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως μπορούμε να βρούμε φυσικό $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0\varepsilon > \beta - \varepsilon$. Έστω τώρα $n_1 = n_0 + 1$ ο επόμενος φυσικός από τον n_0. Τότε η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$n_0\,\varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (n_1 - 1)\,\varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n_1\,\varepsilon - \varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n_1\,\varepsilon > \beta$$

Άτοπο, γιατί το β είναι άνω φράγμα του A (και μάλιστα το ελάχιστο). □

Ουσιαστικά, η Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών μας λέει ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (Σκεφτείτε την Αρχιμήδεια ιδιότητα για $\varepsilon = 1$).

1.5 Ακέραιο μέρος, άρρητοι αριθμοί και πυκνότητα ρητών και αρρήτων στους πραγματικούς

Πρόταση 1.5. *Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $m \leq x < m + 1$. Ο ακέραιος m λέγεται το* **ακέραιο μέρος** *του x και συμβολίζεται με $[x]$.*

Για παράδειγμα $[2.7] = 2$, $[-2.7] = -3$, $[\pi] = 3$.

Πρόταση 1.6. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, υπάρχει ρητός p με την ιδιότητα $x < p < y$.*

Η προηγούμενη πρόταση μας πληροφορεί για την πυκνότητα των ρητών αριθμών στους πραγματικούς και ουσιαστικά είναι απόρροια της Αρχιμήδειας ιδιότητας των πραγματικών και της ύπαρξης του ακεραίου μέρους.

Ορισμός 1.7. Είδαμε ότι υπάρχουν πραγματικοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί αριθμοί, π.χ. ο $\sqrt{2}$. Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός λέγεται **άρρητος**.

Πρόταση 1.8. *Οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, υπάρχει άρρητος a τέτοιος ώστε $x < a < y$.*

1.6 Απόλυτη τιμή

Ορισμός 1.9. (Απόλυτη τιμή) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$|a| = \begin{cases} a & \text{αν} \quad a \geq 0\,, \\ \\ -a & \text{αν} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Το $|a|$ λέγεται **απόλυτη τιμή** του a. Αν τοποθετήσουμε τον a σε ένα σημείο της πραγματικής ευθείας σκεφτόμαστε το $|a|$ ως την απόσταση του a από το 0. Από τον ορισμό προκύπτει ότι $|-a| = |a|$ και ότι $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Διακρίνοντας περιπτώσεις για το a εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$|a| \leq \varepsilon \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$|a| \geq \varepsilon \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad a \leq -\varepsilon \quad \text{ή} \quad a \geq \varepsilon$$

Με τον ίδιο τρόπο (διακρίνοντας περιπτώσεις) εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τον b με τον $-b$ παίρνουμε ότι ισχύει και

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

1.7 Ασκήσεις

Άσκηση 1 Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, min των παρακάτω συνόλων

$$\begin{aligned}
&(1)\quad A=\{x\in\mathbb{R}, x\geq 2\}\\
&(2)\quad B=\{x\in\mathbb{R}: x=-n^2\,,\quad n=1,2,3\ldots\}\\
&(3)\quad C=\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x<1+\frac{1}{n}\,,\quad n=1,2,3\ldots\}
\end{aligned}$$

Άσκηση 2 Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, min των παρακάτω συνόλων

$$\begin{aligned}
&(1)\quad A=\{x\in\mathbb{R}, x>0\ : 0<x^2-1\leq 2\}\\
&(2)\quad B=\{x\in\mathbb{Q}: x\geq 0, 0<x^2-1\leq 2\}\\
&(3)\quad C=\{x\in\mathbb{R}: x^2+x+1\geq 0\}\\
&(4)\quad D=\{x\in\mathbb{R}: x^2+x+1<0\}\\
&(5)\quad E=\{x\in\mathbb{R}: x<0, x^2+x-1<0\}\\
&(6)\quad F=\{x\in\mathbb{Q}: (x-1)(x+\sqrt{2})<0\}
\end{aligned}$$

Άσκηση 3 Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το A είναι μονοσύνολο αν και μόνο αν $\sup A=\inf A$.
(Ένα σύνολο A λέγεται μονοσύνολο αν περιέχει ένα και μόνο ένα στοιχείο, $A=\{a\}$)

Άσκηση 4 Δείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(i)\quad \text{Αν}\quad x<y+\varepsilon\quad\text{για κάθε}\quad \varepsilon>0\,,\quad\text{τότε}\quad x\leq y\,.\\
&(ii)\quad \text{Αν}\quad x\leq y+\varepsilon\quad\text{για κάθε}\quad \varepsilon>0\,,\quad\text{τότε}\quad x\leq y\,.\\
&(iii)\quad \text{Αν}\quad |x-y|\leq \varepsilon\quad\text{για κάθε}\quad \varepsilon>0\,,\quad\text{τότε}\quad x=y\,.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5 Να βρεθούν οι τιμές του x που ικανοποιούν τις ισότητες

$$(i)\quad |5x+4|=-1,\quad (ii)\quad |3x+2|=5,\quad (iii)\quad \left|\frac{x-3}{x-4}\right|=5,\quad (iv)\quad |4x+5|=|8x-3|$$

Άσκηση 6 Να βρεθεί για ποιές τιμές του x ικανοποιούνται οι ανισότητες

$$(i)\quad \left|\frac{3-2x}{2+x}\right|\leq 4,\quad (ii)\quad |3x+5|\geq 4,\quad (iii)\quad \frac{1}{|x-4|}-\frac{1}{|x+7|}<0\,.$$

2 Αντιστοιχίες - Συναρτήσεις

2.1 Αντιστοιχίες

Ορισμός 2.1. Έστω δυο μη κενά σύνολα A και B. Λέμε ότι έχουμε μια *αντιστοιχία ή διμελή σχέση* με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης το B αν και μόνο αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα τουλάχιστο στοιχείο x του A με ένα ή περισσότερα στοιχεία y του B.

Συμβολικά γράφουμε $f : A \to B$ και διαβάζουμε, η f είναι μια αντιστοιχία με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης B. Για τα στοιχεία έχουμε

$$x \xrightarrow{f} y, \qquad \text{ή} \qquad A \ni x \xrightarrow{f} y \in B$$

και διαβάζουμε: το x ανήκει στο A μέσω της f αντιστοιχεί στο y ανήκει στο B.

Ορισμός 2.2. Ονομάζουμε τύπο μιας αντιστοιχίας $f : A \to B$ την συμβολική έκφραση $x \to y$ με την οποία καθορίζεται ο τρόπος που συνδέονται τα αντίστοιχα στοιχεία. Στην έκφραση $x \xrightarrow{f} y$ το x ονομάζεται αρχέτυπο και το y εικόνα του x μέσω της f.

Ορισμός 2.3. Ονομάζουμε *πεδίο ορισμού (domain of definition)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $D(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$D(f) = \{x \in A \quad : \quad \exists\, y \in B, \qquad \text{με} \qquad x \xrightarrow{f} y\}$$

Ορισμός 2.4. Ονομάζουμε *πεδίο τιμών (range)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $R(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$R(f) = \{y \in B \quad : \quad \exists\, x \in A, \qquad \text{με} \qquad x \xrightarrow{f} y\}$$

Ορισμός 2.5. Ονομάζουμε *γράφημα (graph)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $\Gamma(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times B \quad : \quad x \xrightarrow{f} y\}$$

Από τους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι

$$D(F) \subseteq A, \qquad R(f) \subseteq B, \qquad \Gamma(F) \subseteq D(f) \times R(f)$$

και από τον ορισμό της αντιστοιχίας

$$D(f) \neq \varnothing, \qquad R(f) \neq \varnothing, \qquad \Gamma(F) \neq \varnothing$$

Η συμβολική έκφραση $X \subseteq Y$ δηλώνει ότι το σύνολο X είναι γενικά υποσύνολο του συνόλου Y, με την έννοια ότι κάθε στοιχείο του συνόλου X περιέχεται στο σύνολο Y, όμως μπορεί και κάθε στοιχείο το Y να περιέχεται στο X ή αλλιώς τα δυο σύνολα X, Y να είναι ίσα. Όταν γνωρίζουμε ότι το σύνολο X είναι γνήσιο υποσύνολο Y, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του συνόλου Y το οποίο δεν περιέχεται στο σύνολο X μπορούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\subset$. Για παράδειγμα

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ορισμός 2.6. Αν κάθε στοιχείο του A για την αντιστοιχία $f : A \to B$ είναι αρχέτυπο, δηλαδή $D(f) = A$, και κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα δηλαδή $R(f) = B$, τότε λέμε ότι έχουμε μια αντιστοιχία **του** A **επί του** B,

Ορισμός 2.7. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **του** A **στο** B αν και μόνο αν $D(f) = A$, και $R(f) \subset B$, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία του B που δεν είναι εικόνες μέσω της f στοιχείων του A.

Ορισμός 2.8. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **από το** A **στο** B αν και μόνο αν $D(f) \subset A$, και $R(f) \subset B$.

Ορισμός 2.9. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **από το** A **επί του** B αν και μόνο αν $D(f) \subset A$, και $R(f) = B$.

Ορισμός 2.10. Μια αντιστοιχία $f : A \to B$ λέγεται **μονοσήμαντη ή μονότιμη** αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $x \in D(f)$ έχει μέσω της f ως εικόνα ένα και μόνο στοιχείο $y \in B$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η f θα λέμε ότι είναι πλειότιμη.

Παράδειγμα 2.11. Έστω τα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Ορίζουμε την αντιστοιχία $f : A \to B$ ως εξής:

$$1 \xrightarrow{f} 2, \qquad 1 \xrightarrow{f} 6, \qquad 2 \xrightarrow{f} 4, \qquad 2 \xrightarrow{f} 6$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D(f) = \{1, 2\}$, το πεδίο τιμών της f είναι το $R(f) = \{2, 4, 6\}$ και το γράφημα της f είναι το $\Gamma(f) = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (2, 6)\}$.
Επίσης $D(f) \times R(f) = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$. Παρατηρούμε ότι

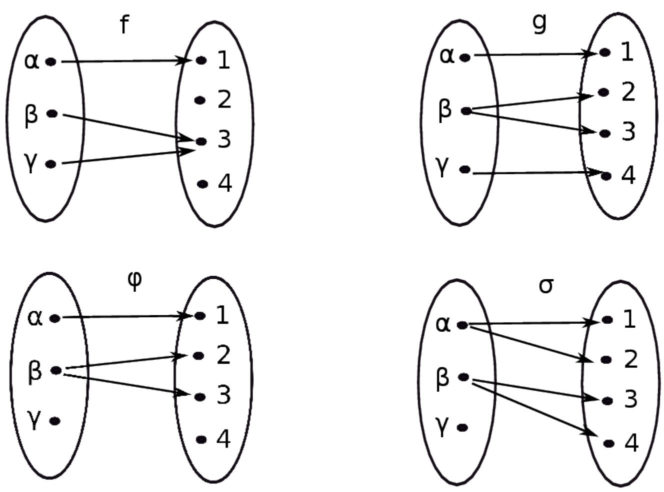
$$D(f) \subset A, \qquad R(f) \subset B, \qquad \Gamma(f) \subset D(f) \times R(f)$$

Η f είναι μια αντιστοιχία "από το A στο B" και επιπλέον η f είναι πλειότιμη (γιατί;).

Παράδειγμα 2.12. Έστω $A = \{\alpha, \beta.\gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Ορίζουμε τις αντιστοιχίες

$$\begin{array}{lllllll}
f : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{f} 1, & \beta \xrightarrow{f} 3, & \gamma \xrightarrow{f} 3, & \\
g : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{g} 1, & \beta \xrightarrow{g} 2, & \beta \xrightarrow{g} 3, & \gamma \xrightarrow{g} 4, \\
\varphi : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{\varphi} 1, & \beta \xrightarrow{\varphi} 2, & \beta \xrightarrow{\varphi} 3, & \\
\sigma : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{\sigma} 1, & \beta \xrightarrow{\sigma} 2, & \beta \xrightarrow{\sigma} 3, & \beta \xrightarrow{\sigma} 4\,.
\end{array}$$

Η f είναι αντιστοιχία "του A στο B", γιατί $D(f) = A$, $R(f) \subset B$.
Η g είναι αντιστοιχία "του A επί του B", γιατί $D(f) = A$, $R(f) = B$.
Η φ είναι αντιστοιχία "από το A στο B", γιατί $D(f) \subset A$, $R(f) \subset B$.
Η σ είναι αντιστοιχία "από το A στο B", γιατί $D(f) \subset A$, $R(f) \subset B$.
Από τις παραπάνω αντιστοιχίες μόνο η f είναι μονοσήμαντη.



Σχήμα 1: Οι αντιστοιχίες f, g, φ και σ του Παραδείγματος 2.12

Παράδειγμα 2.13. Δίνεται η αντιστοιχία $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $x \xrightarrow{f} y$ έτσι ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Να βρεθούν α) το πεδίο ορισμού και β) το πεδίο τιμών της f.

α) Στο πεδίο ορισμού της f ανήκουν εκείνα μόνο τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Δηλαδή

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad y^2 = 1 - x^2\}$$

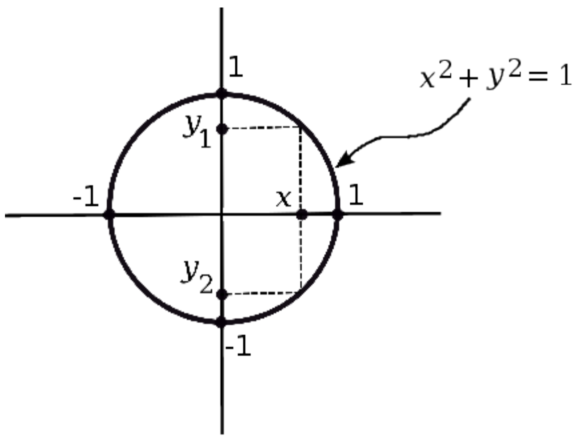
Αλλά για να υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $y^2 = 1 - x^2$ αρκεί και πρέπει $1 - x^2 \geq 0$. Συνεπώς

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

β) Με παρόμοιο τρόπο όπως προηγουμένως για το πεδίο τιμών της f έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 = 1\} = \\ & \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 = 1 - y^2\} = \\ & \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad 1 - y^2 \geq 0\} = \\ & \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad -1 \leq y \leq 1\} = \\ & [-1, 1] \end{aligned}$$

Η αντιστοιχία f συσχετίζει τα σημεία του επιπέδου $x - y$ τα οποία ανήκουν σε ένα κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα μονάδα. Προφανώς η f δεν είναι μονοσήμαντη αφού οποιοδήποτε $x \in [-1, 1]$ μέσω της f συσχετίζεται με δυο τιμές: την $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ και την $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$.



Σχήμα 2: Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f του Παραδείγματος 2.13

2.2 Συναρτήσεις

Ορισμός 2.14. Έστω δυο μή-κενά σύνολα A και B. Κάθε **μονοσήμαντη** αντιστοιχία του A στο B ονομάζεται *απεικόνιση ή συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B. Πιο συγκεκριμένα, ονομάζουμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B κάθε νόμο f μέσω του οποίου το κάθε $x \in A$ συσχετίζεται με *ένα και μόνο ένα* στοιχείο του B. Συμβολικά έχουμε

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \in B \qquad \text{ή} \qquad y = f(x)$$

Το x που εκφράζει το τυχαίο στοιχείο του συνόλου A λέγεται *ανεξάρτητη μεταβλητή* της f και το αντίστοιχο $y \in B$ λέγεται *εξαρτημένη μεταβλητή* ή *τιμή* της συνάρτησης f στο x.

Θα λέμε "δίνεται η συνάρτηση $f : A \to B$" και η λέξη συνάρτηση υπονοεί ότι η αντιστοιχία f είναι *μονοσήμαντη* του A στο $R(f) \subseteq B$. Επιπλέον, στον ορισμό της συνάρτησης έχουμε ότι $D(f) = A$, $R(f) \subseteq B$.

Μια συνάρτηση f είναι γνωστή αν γνωρίζουμε:
- το πεδίο ορισμού της $D(f)$,
- το πεδίο τιμών της $R(f)$, και
- τον τύπο της f μέσω του οποίου το κάθε $x \in D(f)$ αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα $y \in R(f)$.

Οι συναρτήσεις $f : A \to B$ που θα ασχοληθούμε είναι τέτοιες ώστε τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, γι' αυτό ονομάζονται πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

Ορισμός 2.15. Αν A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε κάθε συνάρτηση f μέσω της οποίας κάθε πραγματικός αριθμός $a \in A$ απεικονίζεται στον πραγματικό αριθμό y, ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πραγματική μεταβλητή.

Παράδειγμα 2.16. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x$ ή $y = 2x$.

Η συνάρτηση έχει ορισθεί πλήρως αφού $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}$ και γνωρίζουμε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 2.17. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 2$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι $D(f) = \mathbb{R}$, και το πεδίο τιμών $R(f) = [2, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.18. Είναι γνωστό ότι κάθε μή-αρνητικός πραγματικός έχει μια μόνο τετραγωνική ρίζα, ενώ οι αρνητικοί πραγματικοί δεν έχουν τετραγωνική ρίζα στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$. Αφού αναφερόμαστε σε συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής μπορούμε να καθορίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\} = [0, +\infty]$$

Παράδειγμα 2.19. Δίνεται η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ x^2 & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού είναι $D(f) = \mathbb{R}$, και το πεδίο τιμών $R(f) = \mathbb{R}^+$.

2.2.1 Η ισότητα στο σύνολο των συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = |x|$ και $g(x) = \sqrt{x^2}$. Παρατηρούμε ότι $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ και

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{έχουμε} \qquad f(x) = g(x)$$

Επειδή οι f, g έχουν αυτές τις ιδιότητες λέγονται ίσες.

Ορισμός 2.20. Δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες και θα σημειώνουμε $f = g$ αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους έχουν ίσες τιμές.

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad D(f) = D(g) \quad \text{και} \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in D(f) = D(g)$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι αναγκαστικά $R(f) = R(g)$.

Αν τουλάχιστον μια από τις δυο συνθήκες δεν ισχύει, δηλαδή $D(f) \neq D(g)$ ή αν υπάρχει $x \in D(f) = D(g)$ για το οποίο $f(x) \neq g(x)$ οι f, g λέγονται διάφορες.

Αν $A \subseteq D(f) \cap D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε μπορούμε να πούμε ότι $f = g$ είναι ίσες στο A.

Παράδειγμα 2.21. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x}$$

Προφανώς $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ και για το πεδίο ορισμού της g έχουμε

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^3 + x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x(x^2+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Επιπλέον, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ γιατί

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} = f(x)$$

άρα $f = g$

Παράδειγμα 2.22. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $\quad D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Επειδή $D(f) \neq D(g)$ οι f, g είναι διάφορες, $f \neq g$. Όμως στο $A = \mathbb{R} - \{1\}$ έχουμε

$$g(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x = f(x).$$

Άρα $f = g$ στο A.

Παράδειγμα 2.23. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x > 0 \\ \\ 2x+1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 3x & \text{αν} \quad x > 0 \\ \\ 2x+1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

έχουμε $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, αλλά υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ όπου $f(x) \neq g(x)$. Για παράδειγμα $f(2) = 4$ και $g(2) = 6$, $f(2) \neq g(2)$, άρα $f \neq g$.

Παρατηρούμε ότι $f = g$ στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γιατί $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

2.2.2 Η άλγεβρα των συναρτήσεων

Ορισμός 2.24. Ονομάζουμε άθροισμα των συναρτήσεων f, g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f+g$ και έχει τύπο $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$.

Ορισμός 2.25. Ονομάζουμε γινόμενο των συναρτήσεων f, g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f\,g$ και έχει τύπο $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$ και $D(f\,g) = D(f) \cap D(g)$.

Ορισμός 2.26. Ονομάζουμε γινόμενο πραγματικού αριθμού a επί την συνάρτηση f την συνάρτηση που συμβολίζουμε με af και έχει τύπο $(af)(x) = af(x)$ και $D(af) = D(f)$.
Αν $a = -1$ έχουμε την αντίθετη συνάρτηση της f δηλαδή την $-f(x)$.

Ορισμός 2.27. Ονομάζουμε διαφορά της συνάρτησης g από την συνάρτηση f την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f-g$ και έχει τύπο $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ και $D(f-g) = D(f) \cap D(g)$.

Ορισμός 2.28. Ονομάζουμε πηλίκο της συνάρτησης f δια της συνάρτησης g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $\dfrac{f}{g}$ και έχει τύπο $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ και $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$.

Παράδειγμα 2.29. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2x$, και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Προφανώς $D(f) = \mathbb{R}$ και $D(g) = [-1, 1]$. Το κοινό πεδίο ορισμού είναι $D(f) \cap D(g) = [-1, 1]$.

$$\begin{array}{lcc} a) & (f+g)(x) = 2x + \sqrt{1-x^2} & D(f+g) = [-1,1] \\ b) & (f-g)(x) = 2x - \sqrt{1-x^2} & D(f-g) = [-1,1] \\ c) & (f\,g)(x) = 2x\sqrt{1-x^2} & D(f\,g) = [-1,1] \\ d) & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}} & D\left(\dfrac{f}{g}\right) = (-1,1) \end{array}$$

Παράδειγμα 2.30. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$, και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ με πεδίο ορισμού $D(f) = [2, +\infty)$ και $D(g) = [-1, 1]$ αντίστοιχα. Επειδή $D(f) \cap D(g) = \varnothing$ οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\,g$, f/g δεν ορίζονται.

2.3 Ασκήσεις – 19/09/2012

Άσκηση 1. Αν η συνάρτηση f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

$$a)\ f(x)=\sqrt{2\,|x-2|+x-5} \qquad b)\ f(x)=\sqrt{|x+1|+|x-2|-5}$$
$$c)\ f(x)=\frac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{\sin x}$$

Λύση

a) Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που είναι κάτω από την ρίζα θα πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός. Επιπλέον παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας όρος που έχει απόλυτη τιμή και για αυτόν το όρο θα πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
D(f) &= \{x\in\mathbb{R} : 2\,|x-2|+x-5\geq 0\} \\
&= \left\{x\in\mathbb{R}\,,\quad \begin{array}{c} x-2\geq 0 \\ 2\,(x-2)+x-5\geq 0\end{array} \text{ ή } \begin{array}{c} x-2<0 \\ -2\,(x-2)+x-5\geq 0\end{array}\right\} \\
&= \left\{x\in\mathbb{R}\,,\quad \begin{array}{c} x\geq 2 \\ 3x-9\geq 0\end{array} \text{ ή } \begin{array}{c} x<2 \\ -x-1\geq 0\end{array}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}\,,\quad \begin{array}{c} x\geq 2 \\ x\geq 3\end{array} \text{ ή } \begin{array}{c} x<2 \\ x\leq -1\end{array}\right\} \\
&= \{x\in\mathbb{R}\,, x\geq 3 \quad \text{ή} \quad x\leq -1\} = (-\infty,-1]\cup[3,+\infty).
\end{aligned}$$

b) Έχουμε παρόμοιες διαπιστώσεις όπως προηγουμένως αλλά όμως τώρα έχουμε δυο όρους με απόλυτα και έτσι θα πρέπει να διακρίνουμε 4 περιπτώσεις ανάλογα αν οι όροι μέσα στα απόλυτα είναι θετικοί ή μη θετικοί πραγματικοί:
1) $x-2\geq 0$ και $x+1\geq 0$ που συναληθεύουν $x\geq 2$.
2) $x-2<0$ και $x+1>0$ που συναληθεύουν για $-1<x<2$,
3) $x+1\leq 0$ και $x-2<0$ που συναληθεύουν όταν $x\leq -1$ και
4) $x-2>0$ και $x+1<0$ η οποία δεν ικανοποιείται για κανένα x, οπότε έχουμε μόνο τις 3 προηγούμενες περιπτώσεις.

1) Αν $x\geq 2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0 \Rightarrow x+1+x-2-5\geq 0 \Rightarrow 2\,x\geq 6 \Rightarrow x\geq 3$$

που συναληθεύουν για $x\geq 3$.
2) Αν $-1<x<2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0 \Rightarrow x+1-(x-2)-5\geq 0 \Rightarrow 0>2$$

αδύνατον άρα δεν υπάρχουν x που να είναι στο πεδίο ορισμού στο διάστημα $(-1,2)$
3) Αν $x\leq -1$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0 \Rightarrow -(x+1)-(x-2)-5\geq 0 \Rightarrow 2\,x\leq 4 \Rightarrow x\leq -2$$

που συναληθεύουν για $x \leq -2$.

Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}: \quad x \geq 3 \quad \text{ή} \quad x \leq -2\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$$

c) Η συνάρτηση

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ορίζεται σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός από αυτά που μηδενίζεται η συνάρτηση $\cos x$, δηλαδή για $x \neq k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε για το πεδίο ορισμού της f θα πρέπει επιπλέον να μην μηδενίζεται και ο παρανομαστής $1 - \tan^2 x$. Ο παρανομαστής μηδενίζεται όταν $\tan x = \pm 1$ ή ισοδύναμα όταν $\cos x = \pm \sin x$. Το τελευταίο συμβαίνει όταν η γωνία x είναι ± 45 μοίρες ή $x = \pm\pi/4$ και προσαυξημένη κατά ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή όταν $x = k\pi \pm \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Άρα συνολικά έχουμε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}: \quad x \neq k\pi + \pi/2 \quad \text{και} \quad x \neq k\pi \pm \pi/4 \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Θα πρέπει και οι δυο ποσότητες που είναι κάτω από την ρίζα να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad 1 - x^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad \sin x \geq 0\}$$

Η $\sin x$ είναι θετικός αριθμός όταν η γωνία x είναι ανάμεσα σε 0 και π καθώς και προσαυξημένη με πλήρεις περιστροφές κατά γωνία 2π, δηλαδή $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Όμως τα διαστήματα $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ για $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο με το διάστημα $[-1, 1]$. Από την άλλη, για $k = 0$ το διάστημα $[0, \pi]$ έχει τομή (κοινά σημεία) με το $[-1, 1]$ το διάστημα $[0, 1]$.Άρα

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}: \quad 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$$

Λύση

Έχουμε μια ρητή συνάρτηση όπου ο παρανομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών της f έχουμε:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{y \in \mathbb{R}: \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x + 1}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}: \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad y x^2 + y x + y = x^2 + 4\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}: \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad (y - 1) x^2 + y x + (y - 4) = 0 \ (*)\} \end{aligned}$$

Αν $y = 1$ το τριώνυμο $(*)$ γίνεται $x = 3$, άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η f να έχει τιμή 1, συνεπώς $1 \in R(f)$.
Για $y \neq 1$, το τριώνυμο $(*)$ ως προς x έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$. ή ισοδύναμα

$$y^2 - 4(y-1)(y-4) \geq 0 \Rightarrow 3\,y^2 - 20\,y + 16 \leq 0 \Rightarrow \frac{10-2\sqrt{13}}{3} \leq y \leq \frac{10+2\sqrt{13}}{3}$$

Επειδή $1 \in [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$ έχουμε τελικά ότι

$$R(f) = [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$$

Άσκηση 3. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο τιμών της $f(x)$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$$

είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4},\ 1]$.
Λύση
Έχουμε πρώτα απ'όλα ότι $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad y = \frac{x+\lambda}{x^2+1}\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad y\,x^2 - x + (y-\lambda) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad 1 - 4\,y\,(y-\lambda) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} \leq y \leq \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\} \\ &= \left[\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\right] \end{aligned}$$

Για να είναι $R(f) = [-1/4, 1]$, αρκεί και πρέπει να υπάρχει λ τέτοιο που

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = -\dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = \sqrt{\lambda^2+1} \\[2ex] 2 - \lambda = \sqrt{\lambda^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = 2 - \lambda \\[2ex] (2-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \\[2ex] -\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{3}{4} \\[2ex] \frac{25}{16} = \frac{25}{16} \\[2ex] -\frac{1}{2} \leq \lambda = \frac{3}{4} \leq 2 \end{array}\right\}$$

Άρα για $\lambda = \frac{3}{4}$ η f έχει $R(f) = [-\frac{1}{4}, 1]$
Προσοχή!!! Είναι λάθος να απαιτήσουμε $-\frac{1}{4} \leq \frac{x+\lambda}{x^2+1} \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γιατί ναι μεν οι τιμές της f θα είναι στο $[-\frac{1}{4}, 1]$ όμως από μόνο της η απαίτηση αυτή δεν είναι αρκετή να μας εξασφαλίσει ότι το πεδίο τιμών της f είναι όλο το διάστημα $[-\frac{1}{4}, 1]$.

Άσκηση 4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

Να δειχθεί ότι $f \neq g$.

Λύση

Για να ισχύει $f = g$ θα πρέπει $D(f) = D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D(f) = D(g)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad \frac{x}{x-1} \geq 0 \quad \text{και} \quad x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x(x-1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad (x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1) \quad \text{και} \quad x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x > 1\} \\ &= (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 1\} = (1, +\infty)$. Αφού $D(f) \neq D(g)$, τότε $f \neq g$.

Παρατήρηση για επιπλέον ανάλυση: Παρατηρούμε ότι υπάρχει κοινό πεδίο ορισμού των f, g, το διάστημα $A = D(f) \cap D(g) = (1, +\infty)$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x > 0$ και $x > 1$, οπότε

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = g(x) \qquad \forall x \in A$$

Οπότε αν περιορίσουμε τις τιμές του x στο διάστημα A έχουμε ότι $f = g$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άσκηση 5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού για κάθε μια από τις συναρτήσεις f, g, f/g, g/f και $f + g$.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τα πεδία ορισμού των f, g καθώς και το κοινό πεδίο ορισμού τους. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 4 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2] \\ D(g) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 0\} = [0, +\infty). \end{aligned}$$

$$A = D(f) \cap D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \text{και} \quad x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 2\} = [0, 2]$$

$$\begin{aligned} D(f+g) &= A = [-2, 2] \\ D(f/g) &= A - \{x \in \mathbb{R} : \quad g(x) = 0\} = A - \{x \in \mathbb{R} : \quad x = 0\} = [0, 2] - \{0\} = (0, 2]. \\ D(g/f) &= A - \{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = 0\} = A - \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 = 4\} = [0, 2] - \{-2, 2\} = [0, 2). \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{2\,a^2\,x + a}{x + 1 - a}, \qquad g(x) = \frac{(3\,a - 1)\,x + a}{x + a}.$$

Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός a έτσι ώστε οι συναρτήσεις f, g να είναι ίσες.

Λύση

Αρχικά θα πρέπει $D(f) = D(g)$. Έχουμε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq a - 1\} \qquad \text{και} \qquad D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq -a\}$$

Για να είναι $D(f) = D(g)$ πρέπει και αρκεί $a - 1 = -a \Leftrightarrow a = 1/2$. Για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε

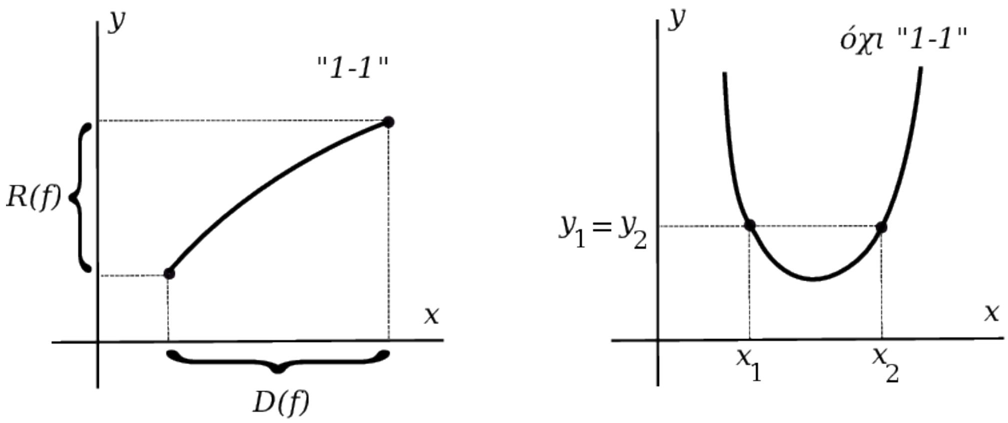
$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2x+1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{(\frac{3}{2} - 1)x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

Έτσι για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε $D(f) = D(g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, συνεπώς για $a = \frac{1}{2}$ οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

2.4 Η αντίστροφη μιας συνάρτησης

Ορισμός 2.31. Μια συνάρτηση f λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή πιο απλά "$1-1$" αν για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ή ισοδύναμα αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.



Σχήμα 3: Παράδειγμα δυο συναρτήσεων από τις οποίες η συνάρτηση στα αριστερά είναι "$1-1$" ενώ η συνάρτηση στα δεξιά δεν είναι "$1-1$".

Ορισμός 2.32. Ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση μιας "$1-1$" συνάρτησης f, την συνάρτηση που συμβολίζουμε με f^{-1} και η οποία αντιστοιχεί το κάθε $y \in R(f)$ στο μοναδικό $x \in D(f)$ για το οποίο ισχύει $y = f(x)$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $D(f^{-1}) = R(f)$, $R(f^{-1}) = D(f)$, $(f^{-1})^{-1} = f$ και ότι η f^{-1} δεν ορίζεται αν η f δεν είναι "$1-1$". Συμβολικά γράφουμε

$$x \xrightarrow{f} y \quad , \quad y \xrightarrow{f^{-1}} x$$

Προσοχή!!! Δεν πρέπει να συγχέουμε την συνάρτηση f^{-1} με την συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$.

2.4.1 Εύρεση τύπου της αντίστροφης συνάρτησης

Αν η f είναι "$1-1$" τότε για κάθε $y \in R(f)$ θα υπάρχει ένα και μόνο ένα $x \in D(f)$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Το x αυτό προσδιορίζεται λύνοντας τον τύπο της f ως προς x, απαιτώντας το $x \in D(f)$.

Για παράδειγμα, για την $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ έχουμε:

α) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty)$.

β) Η f είναι "$1-1$" γιατί αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \sqrt{x_1 - 2} = 1 + \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x_1 - 2})^2 = (\sqrt{x_2 - 2})^2 \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

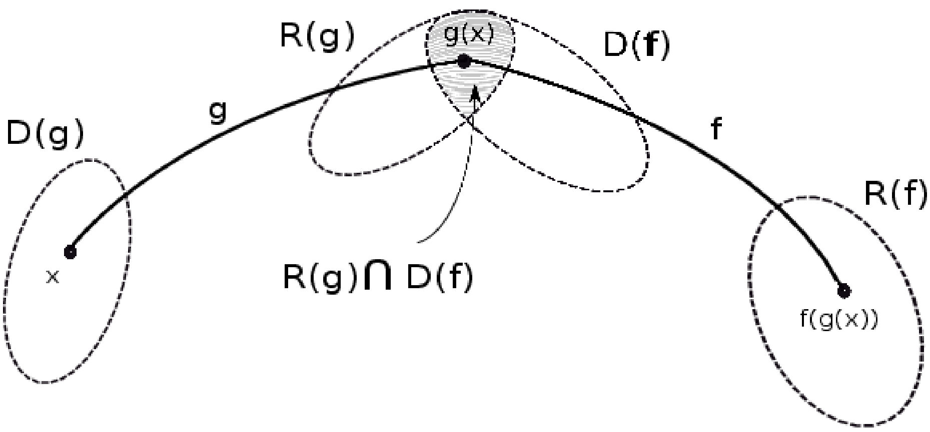
συνεπώς η f^{-1} υπάρχει.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + \sqrt{x-2} \\ \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = y - 1 \\ \\ x - 2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 2 = (y-1)^2 \\ \\ y - 1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y^2 - 2\,y + 3 \\ \\ y \geq 1 \end{array}\right\}$$

Αντιστρέφοντας τον ρόλο της εξαρτημένης με την ανεξάρτητη μεταβλητή $x \leftrightarrow y$ παίρνουμε $y = x^2 + 2\,x + 3$ με $x \geq 1$ ή αλλιώς $f^{-1}(x) = x^2 - 2\,x + 3$, με $D(f^{-1}) = [1, +\infty)$.

2.5 Σύνθεση συναρτήσεων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο συναρτήσεις τις f, g. Αν το πεδίο τιμών της g έχει τομή με το πεδίο ορισμού της f δηλαδή $R(g) \cap D(f) \neq \varnothing$ τότε ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ που λέγεται η σύνθεση της g με την f, η οποία έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ και πεδίο ορισμού $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : \quad g(x) \in D(f)\}$ και τιμές στο $R(f)$.



Σχήμα 4: Η σύνθεση $f \circ g$ γενικά ορίζεται όταν $R(g) \cap D(f) \neq \varnothing$.

Στην ειδική περίπτωση που το πεδίο τιμών της g είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή $R(g) \subset D(f)$, η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται και το πεδίο ορισμού της είναι το $D(g)$.

Όταν $R(g) \cap D(f) = \varnothing$ τότε η $f \circ g$ δεν ορίζεται γιατί δεν υπάρχει $x \in D(g)$ για το οποίο η τιμή $g(x)$ να ανήκει στο $D(f)$ κι έτσι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε την $f(g(x))$.

Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ αν ορίζονται δεν πρέπει να συγχέονται μεταξύ τους γιατί είναι γενικά διαφορετικές (άνισες) συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2.33. Έστω $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [0, +\infty)$, $D(g) = \mathbb{R}$, $R(g) = [-1, 1]$. Επειδή $R(g) \cap D(f) = [-1, 1] \neq \varnothing$ η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται και έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$.

Από την άλλη, επειδή $R(f) \cap D(g) = [0, +\infty] \neq \varnothing$ ορίζεται και η συνάρτηση $g \circ f$ η οποία έχει τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$.

2.6 Μονοτονία συναρτήσεων

Ορισμός 2.34. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \uparrowtail \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ορισμός 2.35. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \downarrowtail \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Ορισμός 2.36. Μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \uparrow \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2).$$

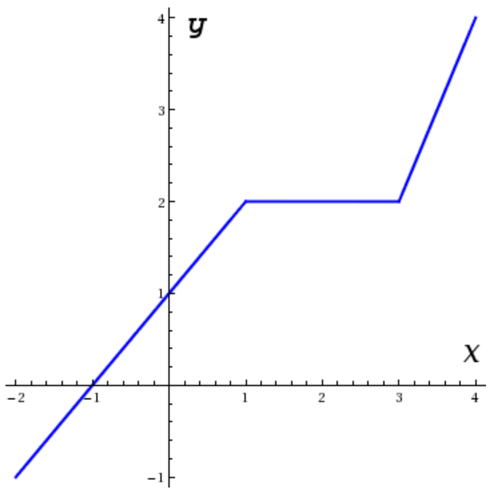
Ορισμός 2.37. Μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \downarrow \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Παράδειγμα 2.38.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x > 1 \\ 2 & \text{αν} \quad \le x \le 3 \\ 2x-4 & \text{αν} \quad x > 3 \end{cases}$$

Από την γραφική παράσταση της $f(x)$ παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(3, +\infty)$, ενώ στο διάστημα $[1, 3]$ έχει σταθερή τιμή. Πράγματι



Σχήμα 5: Η γραφική παράσταση της $f(x)$.

α) Αν $x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 1) - (x_2 + 1) = x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

β) Αν $x_1 < 1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 < 2 \Rightarrow f(x_1) < 2$ και $f(x_2) = 2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
γ) Αν $1 < x_1 < 3 < x_2$ τότε $x_1 < 1 \Rightarrow x_1 + 1 < 2 \Rightarrow f(x_1) < 2$ και $x_2 > 3 \Rightarrow 2\,x_2 > 6 \Rightarrow 2\,x_2 - 4 > 2$, άρα $f(x_1) < 2 < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
δ) Αν $1 \leq x_1 \leq 3 < x_2$, τότε $f(x_1) = 2$ και $2\,x_2 > 6 \Rightarrow 2\,x - 4 > 2 \Rightarrow f(x_2) > 2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
ε) Αν $3 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) = (2\,x_1 - 4) - (2\,x_2 - 4) = 2(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
στ) Αν $1 \leq x_1 < x_2 \leq 3 \Rightarrow f(x_1) = 2 = f(x_2)$.

Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι αύξουσα ($\uparrow$) σε όλο το $\mathbb{R}$.

2.7 Ακρότατα συνάρτησης

Ορισμός 2.39. Ονομάζουμε περιοχή $\varpi(x_0)$ του πραγματικού αριθμού x_0 κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, για παράδειγμα $\varpi(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Ορισμός 2.40. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στο $x_0 \in D(f)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αν και μόνο αν υπάρχει μια τουλάχιστον περιοχή $\varpi(x_0)$ του x_0 έτσι ώστε για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται η τοπικά μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

Ορισμός 2.41. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στο $x_0 \in D(f)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο αν και μόνο αν υπάρχει μια τουλάχιστον περιοχή $\varpi(x_0)$ του x_0 έτσι ώστε για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται η τοπικά ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

Αν οι παραπάνω ορισμοί ισχύουν για κάθε $x \in D(f)$ κι όχι μόνο σε μια περιοχή του x_0 λέμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (ολικό ελάχιστο), αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.42. Για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ γνωρίζουμε ότι $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$ για κάθε $x \in D(f)\mathbb{R}$. Άρα η f παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή 1 και ολικά ελάχιστη τιμή -1. Τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ που συμβαίνει αυτό είναι

$$\sin x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2\,k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2\,k\pi + \frac{3\,\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Παράδειγμα 2.43. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2\,x}{x^2 + 1}$, όπου $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών της f έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad y = \frac{2\,x}{x^2 + 1}\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad y\,x^2 - 2\,x + y = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad 4 - 4\,y^2 \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad -1 \leq y \leq 1\} = [-1,\ 1] \end{aligned}$$

Συνεπώς $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι τιμές αυτές επιτυγχάνονται όταν η διακρίνουσα του τριωνύμου $y x^2 - 2x + y$ είναι μηδέν $\Delta = 0$. Τότε η ρίζα του τριωνύμου $a x^2 + b x + c = 0$ είναι

$$x = \frac{-b}{4\,a} = \frac{2}{2\,y} = \frac{1}{y}$$

Άρα $y = 1$ με $x = 1$ και $y = -1$ με $x = -1$.

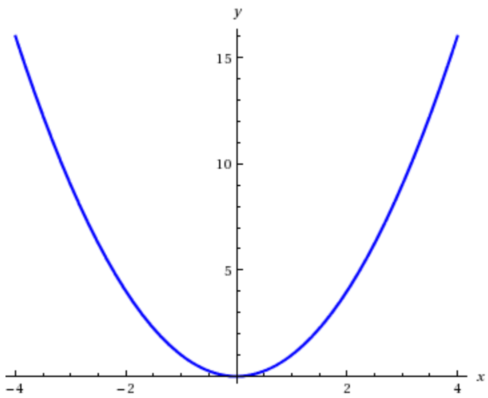
2.8 Φράγματα

Ορισμός 2.44. α) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη άνω άν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M έτσι ώστε $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in D(f)$.
β) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη κάτω άν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός N έτσι ώστε $N \leq f(x)$, για κάθε $x \in D(f)$.
γ) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη άν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί M, N έτσι ώστε $N \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in D(f)$.
Το M λέγεται ένα άνω φράγμα της f και το N ένα κάτω φράγμα της f. Αν η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (ελάχιστο) τότε η ολικά μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της f είναι και ένα άνω (κάτω) φράγμα της f. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μια συνάρτηση που είναι φραγμένη είναι και απόλυτα φραγμένη, δηλαδή $|f(x)| \leq K$, για κάθε $x \in D(f)$, και το αντίστροφο. Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί αυτό αφού αν $N \leq f(x) \leq M$, αν πάρουμε $K = \max\{|M|, |N|\}$, τότε $|f(x)| \leq K$. Το αντίστροφο είναι προφανές αφού $|f(x)| \leq K \Rightarrow -K \leq f(x) \leq K$.

2.9 Χρήσιμες κατηγορίες συναρτήσεων

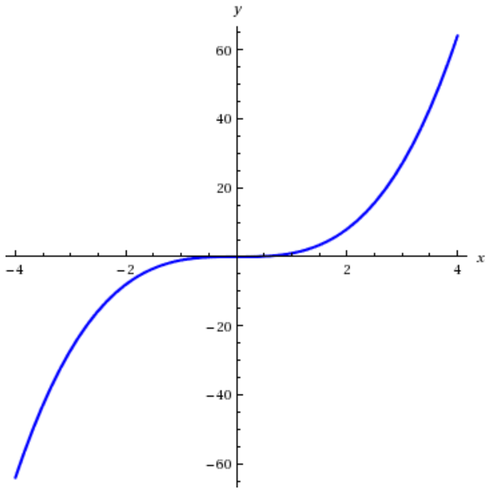
Ορισμός 2.45. Μια συνάρτηση f λέγεται άρτια αν και μόνο αν $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 6: Η γραφική παράσταση της άρτιας (γαιτί;) συνάρτησης $f(x) = x^2$.

Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y.

Ορισμός 2.46. Μια συνάρτηση f λέγεται περιττή αν και μόνο αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

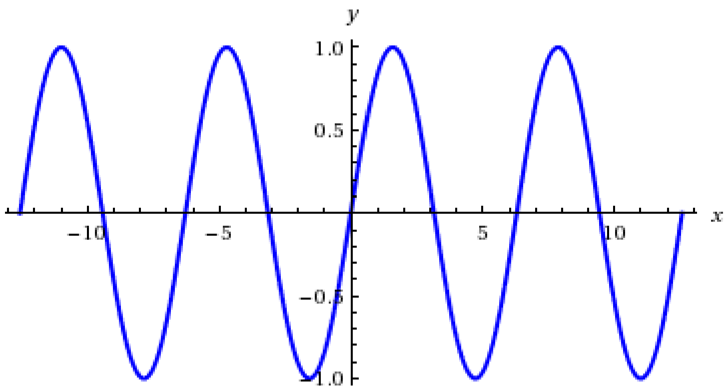


Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της περιττής (γιατί;) συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή $(0, 0)$ των αξόνων.

Ορισμός 2.47. Μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική αν και μόνο υπάρχει πραγματικός αριθμός $\omega \neq 0$ και ανεξάρτητος από το x έτσι ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x + \omega \in D(f) \quad \Rightarrow f(x + \omega) = f(x).$$



Σχήμα 8: Η γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \sin x$ με μικρότερη περίοδο $\omega = 2\,\pi$.

Η γραφική παράσταση κάθε περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται κάθε περίοδο ω.

Ορισμός 2.48. Ονομάζουμε πολυωνυμική συνάρτηση την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ και τύπο

$$f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$$

όπου $a_0, a_1, \cdots a_n$ πραγματικοί αριθμοί και n μη αρνητικός ακέραιος.

Ορισμός 2.49. Αν $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ πολυωνυμικές συναρτήσεις τότε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

πεδίο ορισμού $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad B(x) \neq 0\}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$, λέγεται ρητή συνάρτηση.

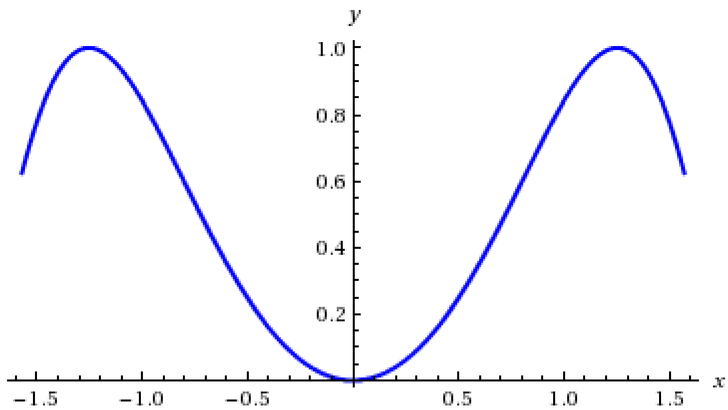
2.10 Βασικά Θεωρήματα

Πρόταση 2.50. *Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη τότε η f είναι "$1-1$" και συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} η οποία έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.*

Πρόταση 2.51. *Δίνονται οι γνήσια μονότονες συναρτήσεις f, g κι έστω ότι ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια αύξουσα, ενώ αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια φθίνουσα.*

Παράδειγμα 2.52. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2)$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$. Έστω $h(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, οπότε $f = g \circ h$.

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$R(h)$	$\frac{\pi^2}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi^2}{4}$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	



Σχήμα 9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin(x^2)$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$.