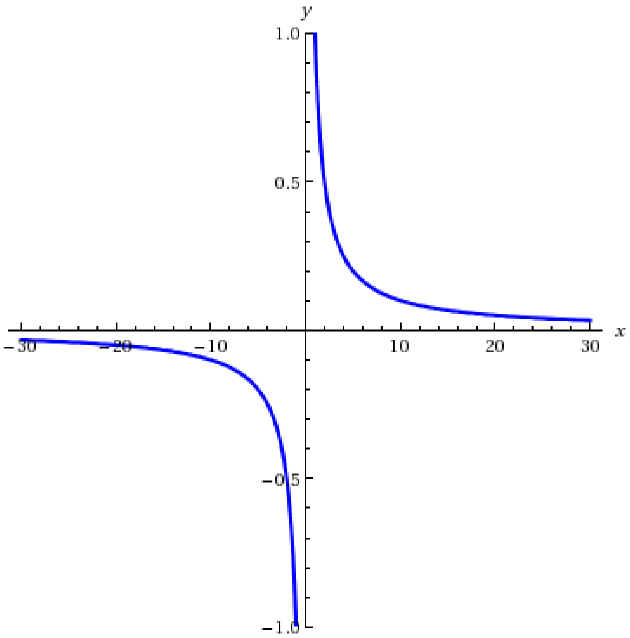
# 3 Όρια συναρτήσεων

## 3.1 Εισαγωγικές έννοιες.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ όπου $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$. Είναι




Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1/x$.

φυσικό να αναζητήσουμε την τιμή της $f(x)$ όταν το $x$ παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές τιμές ή αλλιώς όπως θα λέμε η ανεξάρτητη μεταβλητή $x$ τείνει στο $+\infty$. Είναι προφανές ότι αν στο κλάσμα $1/x$ ο παρανομαστής γίνεται όσο μεγάλος θετικός αριθμός θέλουμε ($x \to +\infty$), το κλάσμα $1/x$ γίνεται αντίστοιχα όσο μικρός θετικός αριθμός θέλουμε ($y \to 0^+$), δηλαδή η τιμή της $f(x)$ τείνει να γίνει 0 από θετικές τιμές.

Επειδή η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση, το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων κι έχουμε αντίστοιχες διαπιστώσεις όταν το $x$ παίρνει πολύ μεγάλες αρνητικές τιμές ($x \to -\infty$). Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της $f(x)$ γίνεται πολύ κοντά στο 0 από αρνητικές τιμές.

Είναι τώρα φυσικό να αναζητήσουμε την τιμή της συνάρτησης όταν το $x$ παίρνει τιμές κοντά στο 0 από αριστερά ($x < 0$) και δεξιά ($x > 0$), γνωρίζοντας βέβαια ότι $0 \notin D(f)$. Με παρόμοιες διαπιστώσεις όπως προηγουμένως και από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι όταν το $x \to 0^+$ τότε $f(x) \to +\infty$, και αντίστοιχα όταν το $x \to 0^-$, τότε $f(x) \to -\infty$.

Από την παραπάνω ανάλυση ανακύπτει το αρχικό ερώτημα για ποιά "σημεία" $x$ μπορούμε να αναζητούμε πως συμπεριφέρονται οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$.

*Ορισμός* 3.1. Ένα σημείο $x_0$ ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της** $f(x)$ αν και μόνο αν σε κάθε περιοχή $\varpi(x_0)$ του $x_0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του $D(f)$

διαφορετικό από το $x_0$ [1], δηλαδή $\varpi(x_0) \cap D(f) - \{x_0\} \neq \varnothing$.

Για παράδειγμα, αφού η συνάρτηση $f(x) = 1/x$, ορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$ το οποίο είναι μια περιοχή του $+\infty$, τότε το "σημείο" $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$, και έχει νόημα να αναζητούμε τις οριακές τιμές της $f(x)$ καθώς το $x$ τείνει στο $+\infty$.

**Το σημείο συσσώρευσης του $D(f)$ μπορεί να ανήκει στο $D(f)$, αλλά μπορεί να μήν ανήκει στο $D(f)$.** Για παράδειγμα το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$ της συνάρτησης $f(x) = 1/x$, αλλά δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $D(f)$.

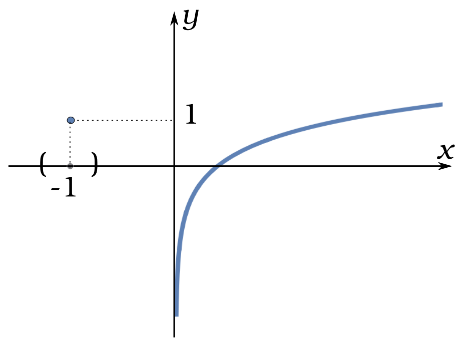
**Για να μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχει η οριακή τιμή συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \to x_0$, πρέπει και αρκεί το $x_0$ να είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$, κι όχι απαραίτητα σημείο του $D(f)$.** Με πιό απλά λόγια, όταν αναζητάμε τις οριακές τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει με τις τιμές της $f(x)$ σε κάθε γειτονιά του $x_0$, αλλά όχι ακριβώς πάνω στο $x_0$, το οποίο σημείο $x_0$ ενδεχομένως να μην ανήκει καν στο πεδίο ορισμού $D(f)$ της $f(x)$.

*Ορισμός* 3.2. Ένα σημείο $x_0$, το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$ λέγεται **μεμονωμένο σημείο του $D(f)$**. Δηλαδή, ένα σημείο $x_0$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f(x)$ αν και μόνο αν $(i)$ $x_0 \in D(f)$ και $(ii)$ υπάρχει περιοχή του $x_0$, έστω $\varpi(x_0)$, τέτοια ώστε το μοναδικό κοινό σημείο της $\varpi(x_0)$ με το πεδίο ορισμού $D(f)$ να είναι το $x_0$, δηλαδή $\varpi(x_0) \cap D(f) = \{x_0\}$. Σύμφωνα με τον ορισμό ένα μεμονωμένο σημείο του $D(f)$, αναγκαστικά ανήκει στο $D(f)$.

Για παράδειγμα, το σημείο $x_0 = -1$ είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της $f(x)$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \ln x\,, & \text{αν} \quad x > 0\,, \\ 1\,, & \text{αν} \quad x = -1\,, \end{cases}$$

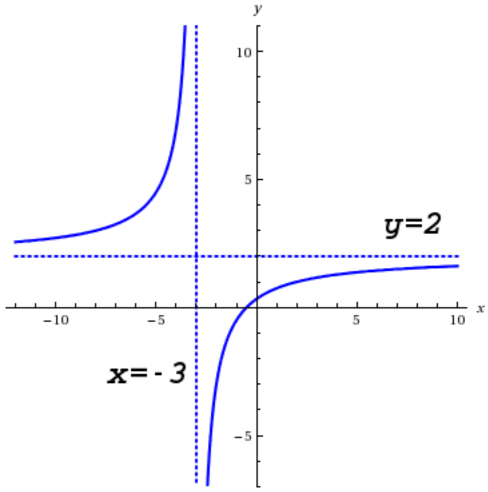
αφού $-1 \in D(f)$ και υπάρχει περιοχή του $-1$, (για παράδειγμα το ανοικτό διάστημα $I = (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$, με κάθε $0 < \varepsilon < 1$) όπου το μοναδικό κοινό σημείο του διαστήματος $I$ με το πεδίο ορισμού $D(f)$ της $f(x)$ είναι το σημείο $x_0 = -1$.




## 3.2 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to +\infty$

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ όπου $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) = \mathbb{R} - \{-3\}$. Ορίζεται λοιπόν το διάστημα $(-3, +\infty)$ οπότε μπορούμε ν' αναζητήσουμε που

[1] άρα θα περιέχει άπειρα σημεία του $D(f)$, αφού αυτό συμβαίνει για κάθε περιοχή $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, με $\varepsilon \in \mathbb{R}$,



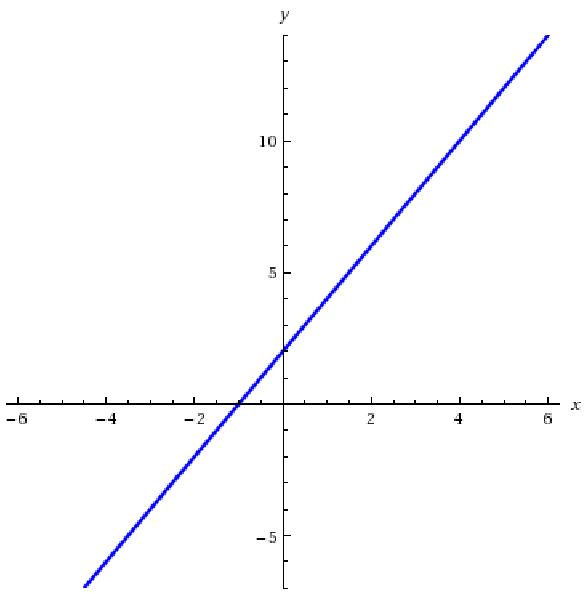

Σχήμα 11: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

τείνουν οι τιμές της $f(x)$ καθώς το $x$ τείνει στο $+\infty$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3} = \frac{x(2+1/x)}{x(1+3/x)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

*Ορισμός* 3.3. Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $L$ τέτοιος που οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ να είναι αυθαίρετα κοντά στην τιμή $L$, καθώς το $x$ παίρνει αυθαίρετα θετικά μεγάλες τιμές ($x \to +\infty$), θα λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι ο αριθμός $L$, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$




Σχήμα 12: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x + 2$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση $f(x) = 3x + 2$ όπου $D(f) = \mathbb{R}$. Άρα μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ καθώς το $x$ απειρίζεται θετικά. Είναι προφανές ότι όταν το $x \to +\infty$, τότε η $f(x) \to +\infty$.

*Ορισμός* 3.4. Θα λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $+\infty$ $(-\infty)$ καθώς το $x \to +\infty$ αν και μόνο αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα θετικά (αρνητικά) μεγάλες όταν το $x \to +\infty$, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} = \pm\infty\,.$$

*Παράδειγμα* 3.5. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(1, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2(3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{3 + 0 + 0}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

*Παράδειγμα* 3.6. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 4}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(2, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 4} = \frac{x\,(1 + \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \frac{1}{x}\,\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0\,\frac{1 + 0}{1 - 0} = 0 \cdot 1 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

*Παράδειγμα* 3.7. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 1}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(-1, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 1} = \frac{x^2\,(2 + \frac{1}{x^2})}{x(1 + \frac{1}{x})} = x\,\frac{2 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty\,\frac{2 + 0}{1 + 0} = +\infty \cdot 2 = +\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

*Παράδειγμα* 3.8. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 2+x-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2-x-2 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$.

Άρα το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει γιατί υπάρχει μια περιοχή του $+\infty$ στη οποία η $f(x)$ δεν ορίζεται, π.χ. η $(2, +\infty)$.

*Παράδειγμα* 3.9. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \sin x$$

$D(f) = \mathbb{R}$, άρα μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Ας "πάμε" στο θετικό άπειρο με δυο διαφορετικούς τρόπους:

$$a) \quad x = 2\,n\,\pi \qquad b) \quad x' = 2\,n\,\pi + \pi/2\,, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών μπορούμε να συμπεράνουμε εύκολα ότι καθώς το $n$ διατρέχει τους φυσικούς αριθμούς, οι πραγματικοί αριθμοί $x$ και $x'$ μας οδηγούν σε οποιονδήποτε μεγάλο θετικό πραγματικό θέλουμε, δηλαδή $x \to +\infty$ και $x' \to +\infty$. Όμως:

$$\sin x = \sin(2\,n\,\pi) = 0\,, \qquad \sin x' = \sin(2\,n\,\pi + \pi/2) = 1$$

Συνεπώς το $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ δεν υπάρχει, αφού αν υπήρχε θα έπρεπε $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = \lim\limits_{x'\to+\infty} \sin x'$.

## 3.3 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to -\infty$

*Ορισμός* 3.10. Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $L$ στον οποίο η $f(x)$ παίρνει τιμές αυθαίρετα κοντά στον $L$, καθώς το $x \to -\infty$, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $L$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

*Ορισμός* 3.11. Αν η $f(x)$ παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές (αρνητικές) τιμές καθώς το $x \to -\infty$, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $+\infty$ ($-\infty$ αντίστοιχα) και γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

*Παρατήρηση* 3.12. Για να μπορούμε να μιλάμε για το όριο της $f(x)$ όταν το $x \to -\infty$, αρκεί η $f$ να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$.

*Παράδειγμα* 3.13. Έστω $f(x) = 2\,x^2 + 3\,x + 1$, με πεδίο ορισμού $D(f) = \mathbb{R}$. Συνεπώς μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = x^2\,(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} (+\infty)\,(1+0+0) = +\infty$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} = +\infty$.

*Παράδειγμα* 3.14. Έστω $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x+2}$, με πεδίο ορισμού $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Αφού η $f$ ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, -2)$ μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Σε αυτό το διάστημα για πολύ μεγάλα αρνητικά $x$ έχουμε ότι $x-1<0$, άρα $|x-1| = -(x-1)$ και διάφορα από το $-2$, $x \neq -2$, οπότε

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2} = \frac{-(x-1)}{x+2} = \frac{x\,(-1+1/x)}{x\,(1+2/x)} = \frac{-1+1/x}{1+2/x} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{-1+0}{1+0} = -1$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} = -1$.

## 3.4 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ κι ας αναζητήσουμε που τείνουν οι τιμές της $f$ καθώς το $x$ πλησιάζει το σημείο 3, που είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \overset{x\to3}{\longrightarrow} \frac{3}{2} \qquad \text{άρα} \qquad \lim_{x\to3} f(x) = \frac{3}{2}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 2 \end{cases}$$

κι ας αναζητήσουμε το όριο της $f$ καθώς το $x \to 2$. Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της $f$ στην περιοχή του $x = 2$ κι όχι τι γίνεται με την τιμή της συνάρτησης ακριβώς για $x = 2$. Δηλαδή μας ενδιαφέρει τι τιμές παίρνει η $f$ καθώς το $x \to 2$ σε ένα διάστημα της μορφής $(a, 2) \cup (2, b)$, με $a < 2 < b$. Σημειώνουμε ότι μπορεί η $f(x)$ να μην ορίζεται για $x = 2$ αλλά το $\lim_{x\to2} f(x)$ να υπάρχει! Οπότε η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι ότι $\lim_{x\to2} = 4$.

*Ορισμός* 3.15. Θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο πραγματικός αριθμός $L$ καθώς η αναξάρτητη μεταβλητή $x$ τείνει στον πραγματικό αριθμό $x_0$ αν και μόνο αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα κοντινές στο $L$ για κάθε περιοχή του $x_0$ αλλά με $x \neq x_0$.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο της $f$ καθώς $x \to 2$.

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Σε κάθε περιοχή $(a, 2) \cup (2, b)$ έχουμε ότι $(x-2)^2 \to 0$, κι επειδή $(x-2)^2 > 0$ έχουμε $\dfrac{1}{(x-2)^2} \to +\infty$.

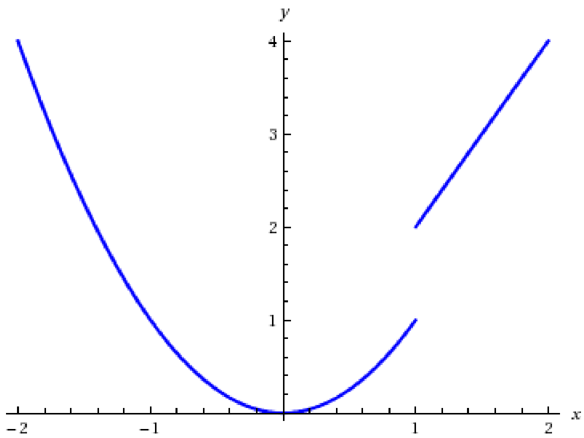
*Ορισμός* 3.16. Θα λέμε ότι το όριο της $f$ είναι το $+\infty$, $(-\infty)$ καθώς το $x \to x_0$ αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα μεγάλες θετικά (αρνητικά) καθώς το $x$ στο πεδίο ορισμού $D(f)$ πλησιάζει το $x_0$ και αυτό συμβαίνει σε κάθε περιοχή του $x_0$ με $x \neq x_0$.

### 3.4.1 Πλευρικά όρια

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \leq 1 \\ 2\,x & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

με $D(f) = \mathbb{R}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ καθώς το $x$ τείνει στο σημείο 1. Μπορούμε να πλησιάσουμε το $x = 1$ από δυο περιοχές την $(a, 1)$ και την $(1, b)$ όπου $a < 1 < b$. Αν πλησιάσουμε το 1 με $x > 1$ λέμε ότι έχουμε το της $f$ από δεξιά του 1, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ κι αν $x < 1$ λέμε ότι έχουμε το όριο της $f$ από αριστερά του 1, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$




Σχήμα 13: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

*Ορισμός* 3.17. Θα λέμε ότι η $f$ έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ (ή $\pm\infty$) καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ από δεξιά αν οι τιμές της $f$ γίνονται αυθαίρετα κοντά στο $L$ (ή θετικά-αρνητικά μεγάλες) καθώς το $x$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά το $x_0$ σε κάθε περιοχή με $x > x_0$. Το όριο αυτό το σημειώνουμε με

$$\lim_{x\to x_0^+} = L \;\; (\text{ή} \pm \infty)$$

*Ορισμός* 3.18. Θα λέμε ότι η $f$ έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ (ή $\pm\infty$) καθώς το $x$ τείνει στο $x_0$ από αριστερά αν οι τιμές της $f$ γίνονται αυθαίρετα κοντά στο $L$ (ή θετικά-αρνητικά μεγάλες) καθώς το $x$ πλησιάζει αυθαίρετα κοντά το $x_0$ σε κάθε περιοχή με $x < x_0$. Το όριο αυτό το σημειώνουμε με

$$\lim_{x\to x_0^-} = L \;\; (\text{ή} \pm \infty)$$

Τα όρια που ορίσαμε προηγουμένως λέγονται **πλευρικά όρια** της $f(x)$.

*Παρατήρηση* 3.19. Αν η $f$ ορίζεται στο διάστημα $(a, x_0)$ αλλά όχι στο $(x_0, b)$ τότε $x < x_0$ οπότε έχει νόημα να αναζητούμε μόνο το όριο $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Για παράδειγμα, $f(x) = \sqrt{1-x}$ με $D(f) = (-\infty, 1)$ και άρα

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

*Παρατήρηση* 3.20. Αν η $f$ ορίζεται σε διάστημα $(x, x_0) \cup (x_0, b)$ κι έχουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

*Παρατήρηση* 3.21. Αν κάποιο πλευρικό όριο έχει νόημα αλλά δεν υπάρχει τότε είναι φανερό ότι δεν υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

*Παρατήρηση* 3.22. Έστω ότι η $f$ ορίζεται σε διάστημα $(x, x_0) \cup (x_0, b)$. Τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ είναι ισοδύναμο με το να συμβαίνει $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$.

*Παράδειγμα* 3.23. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$. Επειδή το $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο αριστερά και δεξιά του $x = 1$.

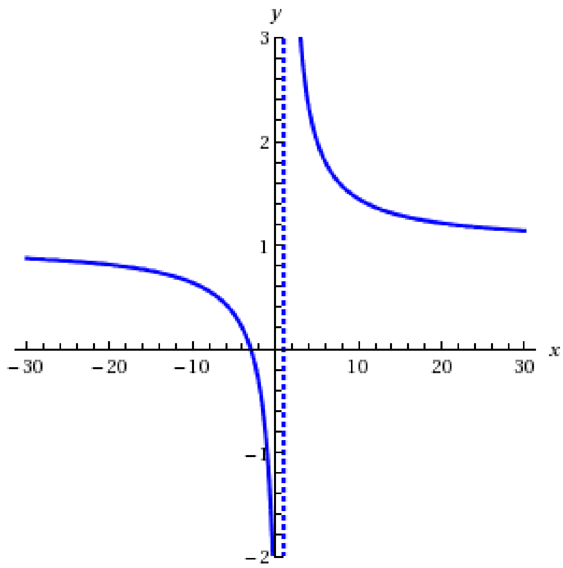
Στην περιοχή $(1, +\infty)$, τότε $x - 1 > 0$ και $x + 3 > 0$, άρα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$$

Σε μια περιοχή $(1 - \varepsilon, 1)$ με $\varepsilon$ πολύ μικρό τότε $x - 1 < 0$ και $x + 3 > 0$ άρα

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty$$

Αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.



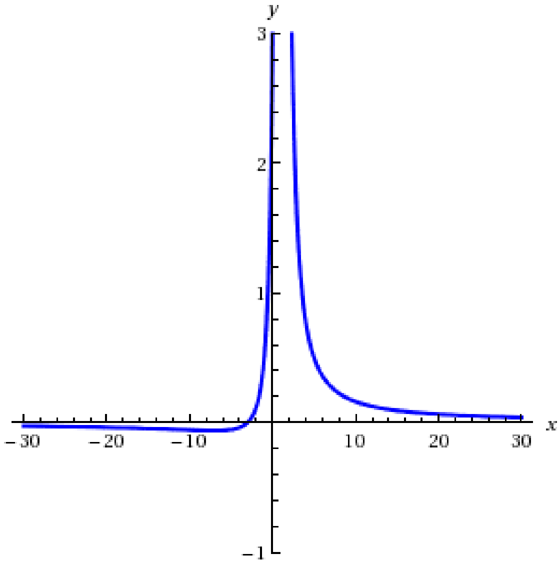

Σχήμα 14: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του παραδείγματος 3.23.

*Παράδειγμα* 3.24. Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$. Επειδή το $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο αριστερά και δεξιά του $x = 1$.

Σε αυτή την περίπτωση όμως $(x-1)^2 > 0$ και $x+3 > 0$ σε κάθε περιοχή κοντά στο 1 αλλά με $x \neq 1$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^2} = +\infty$$

και αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.




Σχήμα 15: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του παραδείγματος 3.24.

*Παράδειγμα* 3.25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$.

## 3.5 Ιδιότητες ορίων

Επειδή οι παρακάτω ιδιότητες ορίων ισχύουν τόσο όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή σε πραγματικό αριθμό, όσο και όταν $x \to \pm\infty$, θα συμβολίζουμε με $\overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Έτσι αν το $x$ τείνει στο $x_0$ που μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$ θα γράφουμε $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} (f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$, εκτός από τις περιπτώσεις: $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$.

2. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)$ υπάρχει και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} (f(x) \pm g(x))$

3. Αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} (f(x) \pm g(x))$ μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.

Για παράδειγμα, το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει και το $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x}$ δεν υπάρχει αλλά για την συνάρτηση $f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}=1$ το όριο καθώς το $x$ τείνει στο 0 είναι 1.

4. Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell_1\in\overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}(f(x)\,g(x))=\ell_1\,\ell_2$, εκτός από τις περιπτώσεις: $0\,(+\infty)$, $(+\infty)\,0, 0\,(-\infty), (-\infty)\,0$.

5. Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell_1\in\overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$, εκτός από τις περιπτώσεις: $\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, \frac{+\infty}{0}, \frac{-\infty}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\ell_1}{0}$ όπου $\ell_1\in\mathbb{R}$, $\ell_1\neq 0$, (απροσδιόριστες μορφές).
   Σημειώνουμε ότι ισχύει $\frac{0}{+\infty}=0$, και $\frac{0}{-\infty}=0$.

6. Αν για κάθε $x$ που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ και $x\neq x_0$ έχουμε $|f(x)|\leq|g(x)|$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=0$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=0$

7. Έστω ότι για κάθε $x$ που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ με $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)\leq g(x)$.
   Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=+\infty$, ενώ
   αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=-\infty$.

8. Αν για κάθε $x$ που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ με $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)\leq g(x)$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell_1\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)\leq\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, ή ισοδύναμα $\ell_1\leq\ell_2$.

9. (*Θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων ή θεώρημα παρεμβολής.*) Αν για κάθε $x$ που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ με $x\neq x_0$ έχουμε $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ και
   $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} h(x)=\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell$.

10. Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}|f(x)|=|\ell|$.

11. Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=0$ και η $g(x)$ είναι φραγμένη στην περιοχή του $x_0$, δηλαδή $|g(x)|\leq M$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}(f(x)\,g(x))=0$.

Οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν ακόμα κι όταν έχουμε γνήσιες ανισότητες ($<$, αντί $\leq$).

## 3.6 Βασικά όρια συναρτήσεων

1. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} x^k = x_0^k, \qquad k\in\mathbb{N}.$

2. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} a\,x^k = a\,x_0^k, \qquad k\in\mathbb{N}.$

3. Αν $f(x) = a_k\,x^k + a_{k-1}\,x^{k-1} + +a_1\,x + a_0$ πολυώνυμο, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty, \qquad k\in\mathbb{N}.$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ αν $k$ άρτιος φυσικός, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ αν $k$ περιττός φυσικός.

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ και γενικότερα $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, $k\in\mathbb{N}$.

7. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, άρα το $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

8. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} \cos x = \cos x_0$

9. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} \tan x = \tan x_0$ με $x_0 \neq k\,\pi + \pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$.

10. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} \mathrm{cotan}\, x = \mathrm{cotan}\, x_0$ με $x_0 \neq k\,\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

11. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

12. $\lim\limits_{x\to x_0\in\mathbb{R}} a^x = a^{x_0}$ με $a>0$, $x_0\in\mathbb{R}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ αν $a>1$,

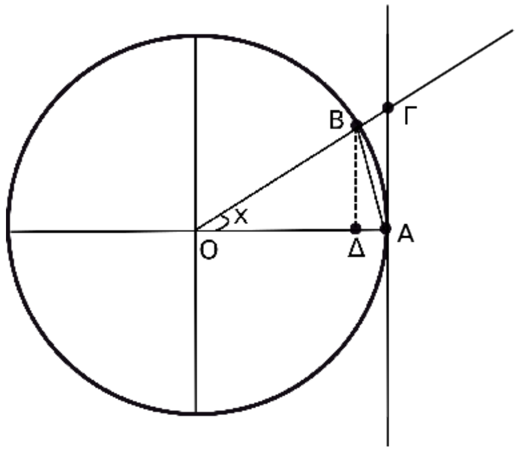
    $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ αν $0<a<1$,

14. $\lim\limits_{x\to x_0} \log x = \log x_0$, $x_0>0$.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim\limits_{x\to0^+} \log x = \lim\limits_{x\to0} \log x = -\infty.$

Παρακάτω θα αποδείξουμε το βασικό όριο 11, δηλαδή ότι $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$, όπου $x$ το μέτρο τόξου σε ακτίνια.
Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος. Επειδή ο κύκλος είναι τριγωνομετρικός ισχύουν $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$, $\mathrm{B\Delta} = \sin x$, $\mathrm{O\Delta} = \cos x$, $\mathrm{A\Gamma} = \tan x$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$\text{εμβαδό τριγώνου OAB} < \text{εμβαδό κυκλικού τομέα OAB} < \text{εμβαδό τριγώνου ΟΑΓ} \qquad (*)$$




Σχήμα 16: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, όπου $x$ το μέτρο τόξου σε ακτίνια.

Όμως

$$\begin{aligned}
\text{εμβαδό τριγώνου OAB} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot \mathrm{B\Delta} = \frac{1}{2}\sin x \\
\text{εμβαδό κυκλικού τομέα OAB} &= \pi\,\mathrm{OA}^2\,\frac{x}{2\,\pi} = \frac{1}{2}\,x \\
\text{εμβαδό τριγώνου OA}\Gamma &= \frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot \mathrm{A\Gamma} = \frac{1}{2}\tan x
\end{aligned}$$

οπότε η ανισότητα $(*)$ γίνεται

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \Rightarrow \sin x < x < \tan x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall x \in (0, \pi/2)$$

Αν $x \in (-\pi/2, 0)$ τότε $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$, ή ισοδύναμα $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, οπότε

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2) \qquad (**)$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, και $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, εφαρμόζοντας το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων (θεώρημα παρεμβολής) στην ανισότητα $(**)$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

## 3.7 Ασκήσεις

**Άσκηση 1.** Αν υπάρχουν, να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x},\qquad b)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x},\qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x},\qquad d)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x},$$
$$e)\ \lim_{x\to0}x\,\sin(\frac{1}{x}),\qquad f)\ \lim_{x\to+\infty}x^2\,\sin(\frac{1}{x}),\qquad g)\ \lim_{x\to-\infty}x\,\sin(\frac{1}{x}),\qquad h)\ \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}.$$

**Απ.** $a)\ 2/\pi,\quad b)\ 0,\quad c)\ 0,\quad d)\ 0,\quad e)\ 0,\quad f)\ +\infty,\quad g)\ 1,\quad h)\ 1.$

**Άσκηση 2.** Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα όρια:

$$a)\ \lim_{x\to-\infty}\cos x,\qquad b)\ \lim_{x\to0}\sin(\frac{1}{x}),\qquad c)\ \lim_{x\to0}\frac{|x|}{x},\qquad d)\ \lim_{x\to0}\frac{|\sin x|}{x}.$$

**Άσκηση 3.** Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-1},\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3},\qquad c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^2-1},$$

$$d)\ \lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{|x|(x-1)}.$$

**Απ.** $a)\ 1,\quad b)\ 1/2,\quad c)\ 0,\quad d)\ -\infty.$

**Άσκηση 4.** Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x),\qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x).$$

**Απ.** $a)\ 1/2,\quad b)\ 0,\quad c)\ +\infty.$

**Άσκηση 5.** Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο

$$f=\begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x\le-1,\\ x^2+1 & \text{αν} \quad -1<x<0,\\ 1-x & \text{αν} \quad x>0.\end{cases}$$

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: $a)\ \lim_{x\to-1}f(x),\quad b)\ \lim_{x\to0}f(x),\quad c)\ \lim_{x\to4}f(x)$

**Απ.** $a)$ Δεν υπάρχει, $\quad b)\ 1,\quad c)\ -3.$

**Άσκηση 6.** Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός $a$, έτσι ώστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x),$$

να είναι πραγματικός αριθμός.

**Απ.** Για $a=1$ το όριο είναι $1/2$.