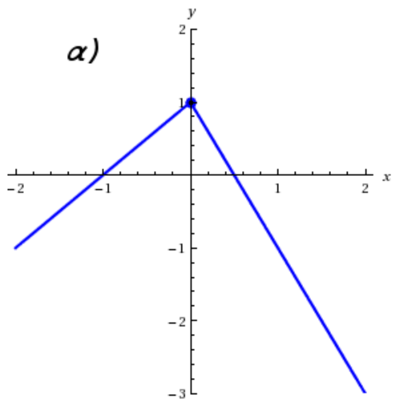
4 Συνέχεια συνάρτησης

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την έννοια της *συνέχειας* συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα πότε θα λέγεται μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και γενικότερα πότε θα λέγεται συνεχής σε κάποιο διάστημα ή ακόμα και σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Ας θεωρήσουμε τα παρακάτω παραδείγματα συναρτήσεων και ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο σημείο $x = 0$.

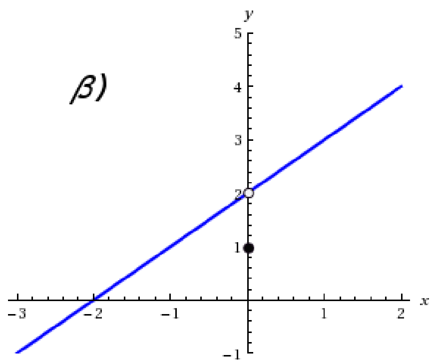
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x \le 0 \\ 1-2x & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.



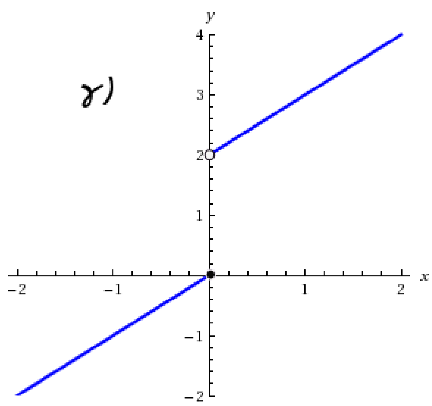
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.



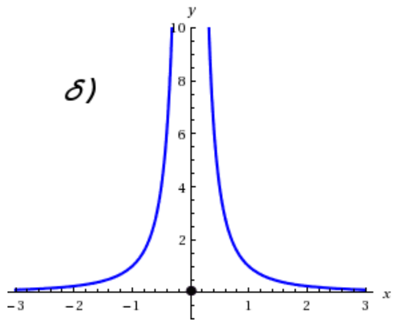
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \le 0 \\ x+2 & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$, και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+2) = 2$ δηλαδή $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} x$, άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.



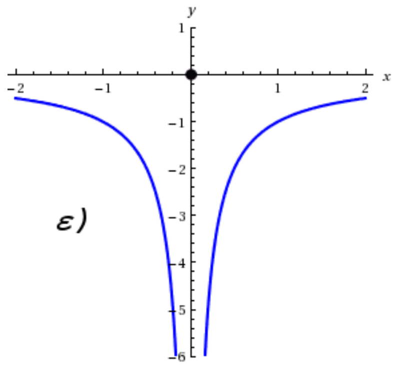
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 0$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, δηλαδή το όριο της συνάρτησης είναι $+\infty$, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

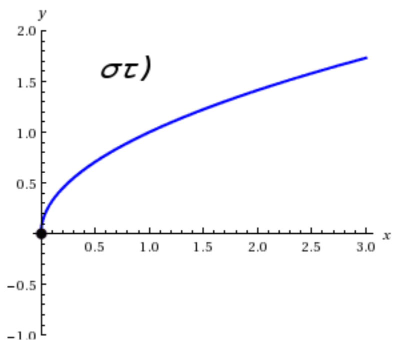


$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{|x|} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

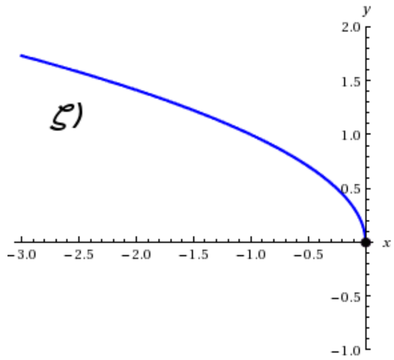
1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 0$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{|x|} = -\infty$, δηλαδή το όριο της συνάρτησης είναι $-\infty$, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.



Αν $f(x) = \sqrt{x}$ τότε $D(f) = [0, +\infty)$ και
1) Το $x = 0$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ και $f(0) = 0$,
2) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.



Αν $f(x) = \sqrt{-x}$ τότε $D(f) = (-\infty, 0]$ και
1) Το $x = 0$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ και $f(0) = 0$,
2) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x} = 0$,
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.



Στα παραδείγματα α), στ) και ζ) έχουμε συναρτήσεις που ορίζονται στο $x = 0$, υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Συναρτήσεις με αυτές τις ιδιότητες λέγονται συνεχείς στο μηδέν. Στα παραδείγματα β), γ), δ) και ε) έχουμε συναρτήσεις που ορίζονται στο $x = 0$, και το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ ή είναι διάφορο του $f(0)$ ή δεν υπάρχει ή είναι $\pm\infty$ οπότε και πάλι διάφορο του $f(0)$. Τις συναρτήσεις αυτές τις ονομάζουμε ασυνεχείς στο μηδέν.

Ορισμός 4.1. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο x_0, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του $D(f)$ ή $D(f) = [x_0, a)$ ή $D(f) = (b, x_0]$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ορισμός 4.2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται ασυνεχής στο x_0 του $D(f)$ αν και μόνο αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή αν ισχύει τουλάχιστον μια από τις παρακάτω συνθήκες
α) Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.
γ) Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, αλλά $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(0)$.

Ορισμός 4.3. Μια συνάρτηση f λέγεται από αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) συνεχής στο x_0 του $D(f)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (αντίστοιχα $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

Παρατήρηση 4.4. Αν μια συνάρτηση δεν είναι ορισμένη στο x_0 δηλαδή το x_0 δεν ανήκει στο $D(f)$ δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια της συνάρτησης στο x_0. Είναι γνωστό όμως ότι μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ αρκεί το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$. Σε μια τέτοια περίπτωση αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός ℓ τότε η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί ώστε να είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να πάρουμε ως τιμή της συνάρτησης στο x_0 το ℓ. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = x\,\sin(\frac{1}{x})$$

δεν ορίζεται στο 0 άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια της f στο μηδέν. Όμως

$$\lim_{x\to 0} x\,\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

Αν ορίσουμε την συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x\,\sin(\frac{1}{x}) & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

θα έχουμε επεκτείνει την f ώστε να είναι συνεχής στο μηδέν.

Παρατήρηση 4.5. Αν το x_0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού της f και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αλλά $\ell \neq f(0)$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x_0. Μια τέτοια ασυνέχεια λέμε ότι "αίρεται" ή "διορθώνεται" αρκεί να πάρουμε ως τιμή της f στο x_0 το ℓ. Αν η f είναι ασυνεχής επειδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ή επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε λέμε ότι η ασυνέχεια δεν διορθώνεται. Οπότε στο παράδειγμα β) η ασυνέχεια διορθώνεται αρκεί να πάρουμε $f(0) = 2$, ενώ στα παραδείγματα γ), δ) και ε) η ασυνέχεια δεν διορθώνεται.

Παρατήρηση 4.6. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 σημείο του πεδίου ορισμού της f, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα και $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι από αριστερά και από δεξιά συνεχής στο x_0.

Αλλά και αντίστροφα αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή αν η f είναι από αριστερά και δεξιά συνεχής στο x_0 τότε θα είναι και συνεχής στο x_0.

Ορισμός 4.7. Αν I ένα διάστημα του πεδίου ορισμού $D(f)$ της f θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο I αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in I$.

Ορισμός 4.8. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in D(f)$ σημείο του πεδίου ορισμού της.

4.1 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Ιδιότητα 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα I και στο $x_0 \in I$ οι f, g είναι συνεχείς, τότε στο x_0 θα είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $f\,g$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g ασυνεχής στο x_0 τότε οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $f\,g$ είναι ασυνεχείς στο x_0.

Ιδιότητα 2. *Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα I και στο $x_0 \in I$ είναι συνεχής με $f(x_0) \neq 0$, τότε η η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Ιδιότητα 3. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα I και στο $x_0 \in I$ οι f, g είναι συνεχείς με $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Ιδιότητα 4. *Αν οι συναρτήσεις g, f ορίζονται στα διαστήματα I_1, I_2 αντίστοιχα και για κάθε $x \in I_1$ έχουμε ότι $g(x) \in I_2$ τότε όπως γνωρίζουμε ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Με αυτές τις προϋποθέσεις αν η g είναι συνεχής στο $x_0 \in I_1$ και η f είναι συνεχής στο $g(x_0) \in I_2$ τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ θα είναι συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

4.2 Χαρακτηριστικές συνεχείς συναρτήσεις

1. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ με c σταθερός πραγματικός αριθμός είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_k\,x^k + a_{k-1}\,x^{k-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Η ρητή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{a_k\,x^k + a_{k-1}\,x^{k-1} + \cdots + a_1\,x + a_0}{b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + b_1\,x + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)}$$

   είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο $B(x_0) \neq 0$.

4. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in D(f) = [0, +\infty)$.

5. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7. Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{cotan}\, x$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

10. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a \neq 1$ και $a > 0$ είναι συνεχής για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

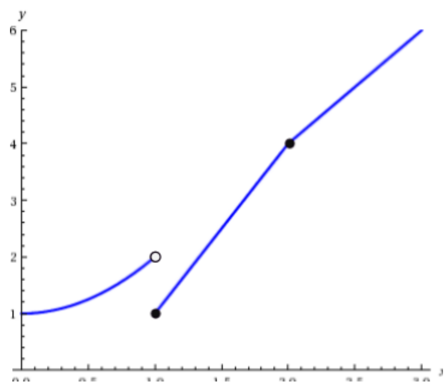
12. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $D(f) = (0, +\infty)$ και a σταθερός πραγματικός αριθμός είναι συνεχής σε κάθε $x \in D(f)$.

4.3 Παραδείγματα στην συνέχεια συναρτήσεων

Παράδειγμα 4.1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{αν} \quad 0 \le x < 1\,, \\ 3x - 2 & \text{αν} \quad 1 \le x < 2\,, \\ 2x & \text{αν} \quad x \ge 2\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια στα σημεία $x = 0$, $x = 1$ και $x = 2$.
Απάντηση:
α) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$ και η συνάρτηση ορίζεται στο $[0, 1)$ αλλά αριστερά του 0 δεν ορίζεται, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 1) = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 0$.
β) Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 1$ και $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + 1) = 2$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$



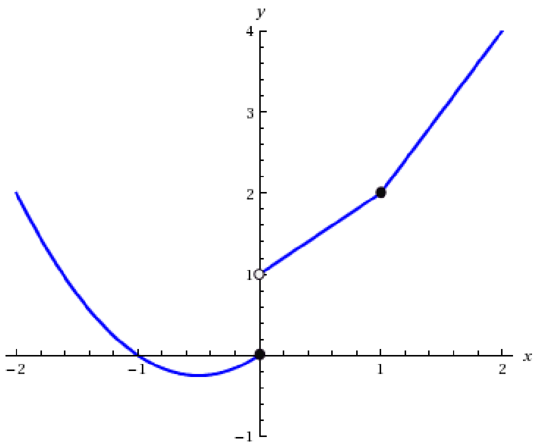
Σχήμα 17: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παρ. 4.1

$\lim_{x\to 1^+}(3x-2) = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$. Επομένως το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει και συνεπώς η f είναι ασυνεχής για $x = 1$. Όμως μπορούμε να πούμε ότι η f είναι από δεξιά συνεχής για $x = 1$ αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.
γ) Για $x = 2$ έχουμε $f(2) = 4$ και $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-2) = 4$, και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x) = 4$. Άρα υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 = f(2)$ συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

Παράδειγμα 4.2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{αν} \quad x \leq 0\,, \\ x+1 & \text{αν} \quad 0 < x < 1\,, \\ 2x & \text{αν} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια.
Απάντηση:
α) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = x^2 + x$
β) Για κάθε $x \in (0, 1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = x + 1$
γ) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = 2x$
δ) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$, ενώ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η f είναι ασυνεχής στο $x = 0$. Αλλά επειδή η $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ μπορούμε να πούμε ότι είναι από αριστερά συνεχής στο $x = 0$.
ε) Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2$. Επιπλέον $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x) = 2$, δηλαδή $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 1$.



Σχήμα 18: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παρ. 4.2

Παράδειγμα 4.3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \geq 2\,, \\ a\,x + 2 & \text{αν} \quad x < 2\,. \end{cases}$$

Να βρεθεί η πραγματική τιμή που πρέπει να πάρει το a για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x = 2$.

Απάντηση:

Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x = 2$ πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, δηλαδή $\lim_{x\to 2^+} x^2 = \lim_{x\to 2^-}(a\,x+2) = 2^2 \Rightarrow 2\,a + 2 = 4 \Rightarrow a = 1$.

Παράδειγμα 4.4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

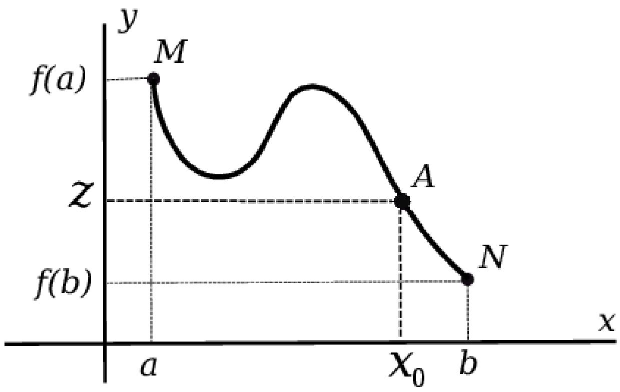
Απάντηση: Οι συναρτήσεις $g(x) = x$ και $h(x) = \sin x$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα το πηλίκο $f(x) = g(x)/h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο έχουμε $\sin x \neq 0$ δηλαδή $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ το οποίο άλλωστε είναι και το $D(f)$.

Παράδειγμα 4.5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x^2+2}$. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

Απάντηση: Οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$ και $h(x) = x^2 + 2$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή $D(g) = \mathbb{R}$ ορίζεται η $g \circ h$ για κάθε $x \in D(h) = \mathbb{R}$. Τότε όμως (από την ιδιότητα 4 συνεχών συναρτήσεων) η συνάρτηση $g \circ h$ είναι συνεχής για κάθε $x \in D(h) = \mathbb{R}$, δηλαδή η $g \circ h = g(h(x)) = e^{x^2+2}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.4 Δυο βασικές προτάσεις στις συνεχείς συναρτήσεις

Πρόταση 4.6. *(Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $f(a) \neq f(b)$ και z ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ του $f(a)$ και $f(b)$ τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0 \in (a,b)$ έτσι ώστε $f(x_0) = z$.*

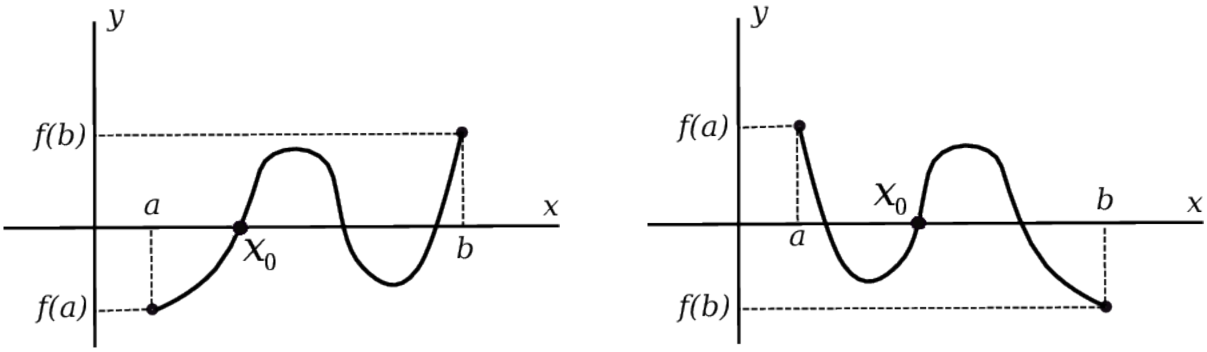


Σχήμα 19: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής

Γεωμετρικά το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής εκφράζει το γεγονός ότι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ που ενώνει τα σημεία $M(a, f(a))$, $N(b, f(b))$ του επιπέδου $x - y$ αναγκαστικά έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με την ευθεία $y = z$ ας το πούμε $A(x_0, z)$. Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης θα έχουμε $f(x_0) = z$.

Πρόταση 4.7. *(Θεώρημα Bolzano) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$.*

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano είναι ότι το διάγραμμα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ στο $[a,b]$ με $f(a)f(b) < 0$ αναγκαστικά τέμνει τον άξονα των x σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0 στο διάστημα (a,b).



Σχήμα 20: Το θεώρημα Bolzano είναι απλή συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, αφού από την $f(a)f(b) < 0$ έχουμε ότι $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$.

Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: *Αν η f συνεχής στο $[a,b]$ κι οι τιμές της f στα* *άκρα a, b του διαστήματος είναι ετερόσημες τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (a, b).*

Παράδειγμα 4.8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Απάντηση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \cos x - x$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων σε όλο το $\mathbb{R}$. Οι τιμές της f στα άκρα είναι $f(0) = \cos 0 - 0 = 1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, οπότε $f(0)f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Rightarrow \cos x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow \cos x_0 = x_0$. Άρα η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Παράδειγμα 4.9. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.
Απάντηση: Σε αυτό το παράδειγμα δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty$$

Συνεπώς υπάρχει κάποιος αριθμός a αρκετά μεγάλος αρνητικός (δεν είναι ανάγκη να του δώσουμε συγκεκριμένη τιμή) έτσι ώστε $f(a) = a^3 + 2a^2 + 3a + 1 < 0$. Από την άλλη έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0) = \lim_{x\to+\infty} x^3(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = +\infty$$

οπότε υπάρχει κάποιος αριθμός b αρκετά μεγάλος θετικός έτσι ώστε $f(b) = b^3 + 2b^2 + 3b + 1 > 0$. Δηλαδή $f(a)f(b) < 0$. Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει κάποιος πραγματικός $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$ ή αλλιώς $\xi^3 + 2\xi^2 + 3\xi + 1 = 0$, κι έτσι ο ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Παρατήρηση: Ο αναγνώστης ίσως να προσπαθήσει λίγο πολύ στην τύχη να βρει ένα διάστημα στο οποίο εντοπίζεται η ρίζα ξ (είναι η μόνη πραγματική ρίζα της εξίσωσης κι οι άλλες δυο ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές). Αν δοκιμάσει το διάστημα $(-1, 0)$ θα βρεί ότι ο ξ βρίσκεται στο διάστημα αυτό (γιατι;)

Παράδειγμα 4.10. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 + 20x + 3 = 0$ έχει *μόνο* μια πραγματική ρίζα στο $(-1, 1)$.
Απάντηση: Αν $f(x) = x^5 + 20x + 3$ έχουμε $f(-1) = -18$ και $f(1) = 24$ δηλαδή $f(-1)f(1) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, άρα υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Όμως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ γιατί για κάθε $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) - f(x_2) = x_1^5 + 20x_1 + 3 - (x_2^5 + 20x_2 + 3) = (x_1^5 - x_2^5) + 20(x_1 - x_2) < 0$ αφού $x_1 - x_2 < 0$ και $x_1^5 - x_2^5 < 0$. Έτσι βγαίνει το συμπέρασμα ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$, γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ στο $(-1, 1)$ τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ που είναι άτοπο αφού πρέπει $f(\rho_1) < f(\rho_2)$ επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[-1, 1]$.

4.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{αν} \quad x \geq 1\,, \\ 2\,x & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ -x & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια για $x = 0$ και για $x = 1$.

Άσκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{αν} \quad x \geq 0\,, \\ \beta + 2\sqrt{x^2+1} & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα a, β αν γνωρίζουμε ότι $f(1) = 2$ και ότι η f είναι συνεχής για $x = 0$.

Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{αν} \quad > 2\,, \\ a & \text{αν} \quad x = 2\,, \\ \beta + x^2 & \text{αν} \quad x < 2\,. \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα a, β αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής για $x = 2$.

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι στο διάστημα $(0, 1)$ η εξίσωση $x\,2^x = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{αν} \quad -2 \leq x < 0\,, \\ -x^2 - 2 & \text{αν} \quad 0 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Άσκηση 6. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x) = x^2\,, \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν} \quad x \geq 0\,, \\ x+1 & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f \circ g$ ως προς την συνέχεια.

Άσκηση 7. Να εξετασθούν ως προς την συνέχεια στο $x = 0$ οι παρακάτω συναρτήσεις. Αν είναι η f είναι ασυνεχής και η ασυνέχεια μπορεί να διορθωθεί να τροποποιήσετε κατάλληλα την τιμή της f στο $x=0$.

1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$ 3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ -1 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x & \text{αν} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$ 5) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x>0 \\ 1 & \text{αν} \quad x\leq 0 \end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(2x)+x^2}{x} & \text{αν} \quad x<0 \\ x^2-x+a & \text{αν} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Να προσδιορισθεί η τιμή του $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 9. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$|\sin x|\leq f(x)\leq |x| \qquad \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+5 & \text{αν} \quad x<2 \\ x^3+2x-9 & \text{αν} \quad x>2 \end{cases}$$

Μπορούμε να ορίσουμε το $f(2)$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής;

Άσκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & \text{αν} \quad x\neq 1 \\ 0 & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$$

Να εξετασθεί η συνάρτηση f ως προς την συνέχεια στο $x=1$.

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x+1} & \text{αν} \quad x < -1 \\ \\ \dfrac{x^2 - 4}{x+2} & \text{αν} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Να εξετασθεί η συνάρτηση f ως προς την συνέχεια στο $x = -1$.

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + \lambda x + \lambda^2 & \text{αν} \quad x < -2 \\ \\ 8x + \lambda & \text{αν} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

Να προσδιορισθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 14. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} a x^2 - x + \beta & \text{αν} \quad x < -1 \\ 1 & \text{αν} \quad x = -1 \\ \beta x^2 + a x - 1 & \text{αν} \quad x > -1 \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (a-1)x + \beta & \text{αν} \quad x < -1 \\ \\ \beta x - a & \text{αν} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Αν $f(2) = 0$, να προσδιορισθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 16. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ \\ \sin(a x) & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής;

Άσκηση 17. (*Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach*)
Έστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.