5 Παράγωγος συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Για κάθε $x_0 \in [a, b]$ ορίζουμε μια νέα συνάρτηση με τύπο

$$\Pi_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

με πεδίο ορισμού $D(\Pi_{x_0}) = D(f) - \{x_0\}$.
Την συνάρτηση Π_{x_0} την ονομάζουμε *πηλίκο διαφορών της f στο x_0*. Για την συνάρτηση αυτή μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της καθώς το x τείνει στο x_0. Το όριο $\lim_{x \to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός, $+\infty$, $-\infty$ ή να μην υπάρχει.

• Αν το $\lim_{x \to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ είναι πραγματικός αριθμός τότε ο αριθμός αυτός λέγεται *η πρώτη παράγωγος της f στο x_0*, και λέμε ότι η f παραγωγίζεται στο x_0.

• Αν το $\lim_{x \to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ είναι $\pm\infty$, ή δεν υπάρχει, λέμε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο x_0. Ειδικά αν το όριο είναι $\pm\infty$ μπορούμε να λέμε ότι η παράγωγος της f στο x_0 απειρίζεται θετικά, αντίστοιχα αρνητικά.

Παράδειγμα 5.1. Για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών της f στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Άρα η f παραγωγίζεται στο 0 ή έχει πρώτη παράγωγο στο 0 και είναι 1. Συνήθως σημειώνουμε τον αριθμό αυτό με $f'(0) = 1$.

Παράδειγμα 5.2. Για την συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών της f στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

Όμως από την Άσκηση 2.c σελ. 39, γνωρίζουμε ότι το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει, οπότε λέμε ότι η $f(x) = |x|$ δεν έχει πρώτη παράγωγο στο μηδέν ή ότι δεν παραγωγίζεται στο μηδέν.

Παράδειγμα 5.3. Για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty\,.$$

Επειδή το όριο είναι $+\infty$ λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, ή ότι η πρώτη παράγωγος της f στο μηδέν απειρίζεται θετικά.

Παράδειγμα 5.4. Για την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \le 1 \\ (x-2)^2 & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

έχουμε ότι το πηλίκο των διαφορών της f είναι

Αν $x<1$ $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$ και $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$

Αν $x>1$ $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{(x-2)^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-1}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{x-1}=x-3$

και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 1^+}(x-3)=-2$$

Αφού $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}$ δεν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}$, και συνεπώς η f δεν έχει πρώτη παράγωγο στο ένα. Επειδή όμως υπάρχει το $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός μπορούμε να λέμε ότι υπάρχει η από *αριστερή παράγωγος* της f στο $x=1$. Επίσης, επειδή υπάρχει το $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός μπορούμε να λέμε ότι υπάρχει η από *δεξιά παράγωγος* της f στο 1.

Ορισμός 5.5. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με $D(f)=[a,b]$ παραγωγίζεται στο σημείο $x_0\in[a,b]$ ή ότι υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Τον πραγματικό αυτό αριθμό τον ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f στο x_0 και τον συμβολίζουμε με $f'(x_0)$.

Ορισμός 5.6. Θα λέμε ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f με $D(f)=[a,b]$ απειρίζεται θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) στο σημείο $x_0\in[a,b]$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty \qquad (\text{αντίστοιχα} \quad -\infty)$$

Ορισμός 5.7. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με $D(f)=[a,b]$ παραγωγίζεται από αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) στο σημείο $x_0\in[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (\text{αντίστοιχα} \quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τον πραγματικό αυτό αριθμό τον ονομάζουμε αριστερή (αντ. δεξιά) παράγωγο της f στο x_0 και τον συμβολίζουμε με $f'(x_0^-)$ (αντ. $f'(x_0^+)$).

Πρόταση 5.8. *Έστω συνάρτηση f και $x_0\in D(f)$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν υπάρχει αριστερή και δεξιά παράγωγος της f στο x_0 και ισχύει $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$, τότε υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0 και ισχύει $f'(x_0)=f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$. Αντίστροφα, αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0 τότε υπάρχουν και οι $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ και ισχύει $f'(x_0^+)=f'(x_0^-)=f'(x_0)$.*

Είναι προφανές ότι αν δεν υπάρχει μια τουλάχιστον από τις πλευρικές παραγώγους της f στο x_0 τότε δεν υπάρχει η $f'(x_0)$, καθώς επίσης αν υπάρχουν οι $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ αλλά ισχύει ότι $f'(x_0^+)\neq f'(x_0^-)$ τότε και πάλι δεν υπάρχει η $f'(x_0)$.

5.1 Η συνάρτηση παραγώγου της f.

Αν σε κάθε $x_0 \in D(f)$ για το οποίο υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f αντιστοιχίσουμε τον πραγματικό αριθμό $f'(x_0)$ θα σχηματίσουμε μια μονοσήμαντη αντιστοιχία του συνόλου $D(f') = \{x_0 \in D(f) : \exists\, f'(x_0)\}$ στο $\mathbb{R}$, οπότε θα έχουμε μια συνάρτηση την οποία ονομάζουμε *συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f* ή πιο απλά *πρώτη παράγωγο της f*. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 5.9. Ονομάζουμε συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f ή πιο απλά πρώτη παράγωγο της f, την συνάρτηση με πεδίο ορισμού $D(f') = \{x_0 \in D(f) : \exists\, f'(x_0)\}$ και τύπο f' που ορίζεται από την αντιστοιχία

$$D(f') \ni x_0 \xrightarrow{f'} f'(x_0) \in \mathbb{R}\,.$$

Προσοχή !!! Δεν πρέπει να συγχέουμε την "πρώτη παράγωγο της f στο x_0" και την "πρώτη παράγωγο της f" μεταξύ τους. Η πρώτη είναι ένας πραγματικός αριθμός ενώ η δεύτερη είναι μια συνάρτηση.

Ορισμός 5.10. Ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0 \in D(f)$ την πρώτη παράγωγο στο x_0 της συνάρτησης πρώτης παραγώγου f'. Την δεύτερη παράγωγο στο x_0 της f συμβολίζουμε με $f''(x_0)$ δηλαδή $f''(x_0) = (f'(x))'_{x=x_0}$. Επαγωγικά, από την σχέση $f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'_{x=x_0}$ ορίζεται η n-οστή παράγωγος της f στο x_0.

Για το υπολογισμό της συνάρτησης πρώτης παραγώγου της f στο x_0 πρέπει να βρούμε το όριο του πηλίκου των διαφορών $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Μια χρήσιμη αντικατάσταση για την εύρεση αυτού του ορίου είναι η $x - x_0 = h$, οπότε επειδή $x \to x_0$ και $x \neq x_0$, τότε $h \to 0$, και $h \neq 0$, οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Επιπλέον, η αντικατάσταση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πιο εύκολα και την συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f αφού για το τυχαίο $x \in D(f)$ για το οποίο υπάρχει η πρώτη παράγωγος, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Για παράδειγμα, η πρώτη παράγωγος της $f(x) = x^2$ είναι

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2\,x+h) = 2\,x$$

και γενικά $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Έστω ότι η f είναι ορισμένη για κάθε $x \in [a, b]$ και έστω ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0 \in (a, b)$.

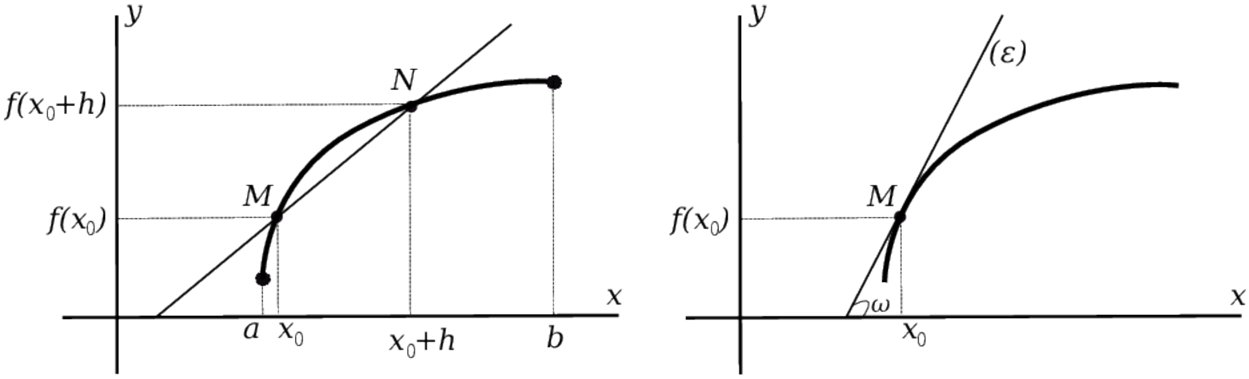
Ας θεωρήσουμε δυο σημεία $M(x_0, f(x_0)$ και $N(x_0 + h, f(x_0 + h))$ στο διάγραμμα της f. Η ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά ονομάζεται τέμνουσα του διαγράμματος και έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \qquad (*)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο N πλησιάζει το σημείο M κατά μήκος του διαγράμματος της f. Τότε το h πλησιάζει το 0 και παίρνοντας το όριο της εξίσωσης $(*)$ καθώς το $h \to 0$ δίνει

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (**)$$

Η $(**)$ είναι η εξίσωση μιας χαρακτηριστικής ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και λέγεται *εφαπτομένη της f στο σημείο* $M(x_0, f(x_0))$. Αλλά η εξίσωση ευθείας που περνάει από το $M(x_0, f(x_0))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$. Άρα το $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) της (ε), δηλαδή $\tan\omega = f'(x_0)$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των x με την ευθεία (ε).



Σχήμα 21: Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου: Το $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας στο διάγραμμα της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, δηλαδή $f'(x_0) = \tan\omega$

Άν $f'(x_0) = 0$ τότε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των x, ενώ αν $f'(x_0) = \pm\infty$ τότε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των y.

Παράδειγμα 5.11. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Να προσδιορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1, 2)$ να έχει κλίση $\lambda = 4$.
Απάντηση: Αφού το $M(1, 2)$ είναι σημείο του διαγράμματος της f θα πρέπει $f(1) = 2$, δηλαδή $1 + \alpha + \beta = 2$ ή $\alpha + \beta = 1$. Από την άλλη η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1, 2)$ έχει κλίση

4 άρα θα πρέπει $f'(1) = 4$. Όμως $f'(x) = 2\,x + a$, επομένως $f'(1) = 2 + a = 4$ ή $a = 2$. Τότε η σχέση $a + \beta = 1$ δίνει $\beta = -1$. Έτσι το πρόβλημα έχει λύση για $a = 2$, $\beta = -1$.

5.3 Κανόνες παραγώγισης

Πριν αναφέρουμε τους κανόνες της παραγώγισης αναφέρουμε μια βασική πρόταση η οποία συνδέει την παραγωγισιμότητα συναρτήσεων με την συνέχεια.

Πρόταση 5.12. *Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D(f)$ τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Απόδειξη: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 υπάρχει το $f'(x_0)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Τότε αν πάρουμε το όριο όταν το $x \to x_0$ στην ταυτότητα

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0)$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\,0 = 0$$

Δηλαδή $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού είναι δυνατόν μια συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 \in D(f)$ χωρίς να είναι η f παραγωγίσιμη στο x_0. Το κλασικό αντιπαράδειγμα είναι η $f(x) = |x|$ η οποία είνα συνεχής στο $x = 0$ αλλά όπως έχουμε δει δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν (σελ. 53, παράδειγμα 5.2). □

5.3.1 Κανόνας παραγώγισης αθροίσματος

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει και όταν έχουμε πεπερασμένο πλήθος προσθετέων.

5.3.2 Κανόνας παραγώγισης διαφοράς

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)}$$

5.3.3 Κανόνας παραγώγισης γινομένου (κανόνας του Leibniz)

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}$$

Αν $f(x) = c$ η σταθερή συνάρτηση τότε ο προηγούμενος κανόνας γίνεται $(c\, g(x))' = c\, g'(x)$ αφού $f'(x) = 0$.

5.3.4 Κανόνας παραγώγισης πηλίκου

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ και είναι $g(x) \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}}$$

Αν $f(x) = 1$, τότε ο προηγούμενος κανόνας γίνεται

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-\, g'(x)}{g^2(x)}}$$

5.3.5 Κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης - κανόνας της αλυσίδας

Αν f, g συναρτήσεις για τις οποίες $R(g) \cap D(f) \neq \varnothing$, τότε ορίζεται η $f \circ g$. Για κάθε x για το οποίο υπάρχει η $g'(x)$ και υπάρχει η $f'(t)$ με $t = g(x)$, τότε υπάρχει η $(f \circ g)'(x)$ και ισχύει

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(t)|_{t=g(x)}\, g'(x) = f'(g(x))\, g'(x)}$$

Για παράδειγμα αν $f(x) = \sin(h(x))$, τότε

$$\boxed{f'(x) = cos(h(x))\, h'(x)}$$

5.3.6 Κανόνας παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης

Για κάθε x για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ με $f'(x) \neq 0$ υπάρχει και η $(f^{-1}(x))'$ και ισχύει

$$\boxed{(f^{-1}(x))' = \left.\frac{1}{f'(t)}\right|_{t=f^{-1}(x)}}$$

Για παράδειγμα αν $f(x) = \sin x$, τότε για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ έχουμε

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin t)'} = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

δηλαδή

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1}$$

Συνάρτηση	Παράγωγος	Αντίστοιχη σύνθετη συνάρτηση	Παράγωγος
$y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$y' = n\,x^{n-1} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = g^n(x)\ n \in \mathbb{N}$	$y' = n\,g^{n-1}(x)\,g'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \sin(g(x))$	$y' = \cos(g(x))\,g'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \cos(g(x))$	$y' = -\sin(g(x))\,g'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = e^{g(x)}$	$y' = e^{g(x)}\,g'(x)$
$y = \log x$	$y' = \dfrac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = \log(g(x))$	$y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = \sqrt{g(x)}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\,g'(x)$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$	$y = \tan(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\,g'(x)$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi$	$y = \cot(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2(g(x))}\,g'(x)$
$y = x^a,\ a \in \mathbb{R}$	$y' = a\,x^{a-1} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = g^a(x)$	$y' = a\,g^{a-1}(x)\,g'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$	$y = \arcsin(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\,g'(x)$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$	$y = \arccos(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\,g'(x)$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \arctan(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{1+g^2(x)}\,g'(x)$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \operatorname{arccot}(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{1+g^2(x)}\,g'(x)$

Πίνακας 1: Παράγωγοι των κυριοτέρων στοιχειωδών συναρτήσεων

Επίσης μπορούμε να γνωρίζουμε ότι

- $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \log a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$
- $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \log a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ και $a > 0,\ a \neq 1$.

Πράγματι, $y = a^x \Rightarrow \log y = \log a^x \Rightarrow \log y = x \log a \Rightarrow (\log y)' = \log a \Rightarrow y'/y = \log a \Rightarrow y' = y \log a \Rightarrow y' = a^x \log a$.
Επιπλέον $y = \log_a x \Rightarrow a^y = x \Rightarrow \log a^y = \log x \Rightarrow y \log a = \log x \Rightarrow (y \log a)' = (\log x)' \Rightarrow y' \log a = 1/x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \log a}$.

5.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = |x-1| + 2$ δεν έχει παράγωγο για $x = 1$.

Άσκηση 2. Αν $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ να βρεθεί η $f'(0)$ και να εξετασθεί αν υπάρχει η $f'(3)$.

Άσκηση 3. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x\,|x|$. Να βρεθεί αν υπάρχει η $f'(0)$.

Άσκηση 4. Αν για την συνάρτηση f έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \le 2 \\ \alpha x + \beta & \text{αν} \quad x > 2 \end{cases}$$

να βρεθούν τα α, β ώστε να υπάρχει η $f'(2)$.

Άσκηση 5. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + q + 1 & \text{αν} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{αν} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

να βρεθούν τα α, β ώστε να υπάρχει η $f'(0)$ και να υπολογισθεί.

Άσκηση 6. Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τις παραγώγους καθώς και τις πλευρικές παραγώγους στο $x = 0$ των παρακάτω συναρτήσεων

$$1)\quad f(x) = 2\,, \quad 2)\; f(x) = 3x^2 - 5x + 3\,, \quad 3)\; f(x) = \tan x\,, \quad 4)\; f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x} & \text{αν} \quad x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{αν} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

$$5)\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \ne 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases} \qquad 6)\; f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{αν} \quad x > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ -1 - x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 7. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{αν} \quad x \ne 0 \\ \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της f σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει.

Άσκηση 8. Αν $x - x^2 \le f(x) \le x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχει το $f'(0)$ και να υπολογισθεί.

Άσκηση 9. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + 3x + \beta$. Να βρεθεί το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι:

α) παράλληλη προς τον άξονα των x
β) παράλληλη προς την ευθεία $2x - y = 3$
γ) παράλληλη προς την ευθεία $y = x$.

Άσκηση 10. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της υπερβολής $y = a^2/x$ στο σημείο $M(a, b)$ με τον άξονα των x.

Άσκηση 11. Να δειχθεί ότι η ευθεία $y = -x$ εφάπτεται στο διάγραμμα της $f(x) = x^2 + 3x + 4$ και να βρεθεί το σημείο επαφής.

Άσκηση 12. Να δειχθεί ότι στην παραβολή $f(x) = x^2 + a\,x + b$ η χορδή που διέρχεται από το σημείο με τετμημένες $x = a$ και $x = b$ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη στο σημείο $M\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

Άσκηση 13. Αν $f(x) = \sin x$ και $g(t) = \sin(t^2 - 1)$ να υπολογισθεί η $g'(1)$.

Άσκηση 14. Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

$$a)\ f(x) = x^x \quad b)\ f(x) = (x^2+1)^{x^2}, \quad c)\ f(x) = (\log x)^x, \quad d)\ f(x) = 5^{\sin x}$$

Άσκηση 15. Να βρεθεί η παράγωγος για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$a)\ f(x) = x^3\, e^x, \quad b)\ f(x) = \frac{x^2}{\log x}, \quad c)\ f(x) = e^x \cos x$$
$$d)\ x^3 \log x - \frac{1}{3}x^3, \quad e)\ f(x) = (x-1)\, 2^x, \quad f)\ f(x) = \frac{e^x}{x^2}.$$

Άσκηση 16. Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2\, e^x \cos x}{x+1}$$

Άσκηση 17. Αν $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ να δειχθεί ότι ισχύει

$$x\, y'' + \frac{1}{2} y' - \frac{1}{4}\, y = 0.$$

Άσκηση 18. Αν $y = a\, \cos(\lambda x) + b\, \sin(\lambda x)$ να δειχθεί ότι ισχύει $y'' + \lambda^2\, y = 0$.

Άσκηση 19. Αν $e^y = \dfrac{1}{x+1}$ να δειχθεί ότι ισχύει $x\, y' + 1 = e^y$.

Άσκηση 20. Δίνεται η καμπύλη $x^3 + y^3 = 3\,x\,y$ στο επίπεδο. Να βρεθεί η παράγωγος της $y = f(x)$ ως μια έκφραση των x, y και η εφαπτομένη στο σημείο $M(3/2, 3/2)$.

Άσκηση 21. Να βρεθούν οι κλίσεις των εφαπτομένων της καμπύλης $y^2 - x + 1 = 0$ στα σημεία $M_1(2, -1)$ και $M_2(2, 1)$.

Άσκηση 22. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της $y = f(x)$ η οποία δίνεται στην πεπλεγμένη μορφή $4\,x^2 - 2\,y^2 = 9$ σε συνάρτηση των x, y.