6 Εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών - Κανόνες L'Hôpital

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων συναρτήσεων στον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών ορίων. Όλες οι απροσδιόριστες μορφές μετατρέπονται στις απροσδιόριστες μορφές του τύπου $\frac{0}{0}$, ή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ο υπολογισμός αυτών των μορφών αυτών γίνεται αντίστοιχα χρησιμοποιώντας δυο κανόνες που είναι γνωστοί ως κανόνες L'Hôpital.

Ο πρώτος κανόνας L'Hôpital αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$.

Πρώτος Κανόνας L'Hôpital: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ και ότι $g(x) \neq 0$, και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.
Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει, με τις κατάλληλες προσαρμογές στις υποθέσεις, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Επιπλέον ο κανόνας ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Παράδειγμα 6.1. Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$. Στο $I = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\sin x \neq 0$ και $(\sin x)' = \cos x \neq 0$. Επίσης, $\lim_{x\to 0} e^x - 1 = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του πρώτου κανόνα L'Hôpital και υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0} e^x}{\lim_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$.

Ο δεύτερος κανόνας L'Hôpital αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, ή ακριβέστερα, σε μια γενίκευσή της.

Δεύτερος Κανόνας L'Hôpital: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ και ότι $g(x) \neq 0$, και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$.
Αν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει, με τις ανάλογες προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Επιπλέον ο κανόνας ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Στις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα L'Hôpital δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)$ ούτε ποιά ακριβώς είναι η τιμή του (αν υπάρχει). Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του Δεύτερου Κανόνα L'Hôpital, όπως διατυπώθηκε προηγουμένως.

Παράδειγμα 6.2. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \qquad b > 0,\ a > 1$$

Θα αντιμετωπίσουμε πρώτα την περίπτωση $b = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = 0$, με $a > 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $a^x \neq 0$ και $(a^x)' = a^x \log a \neq 0$. Επιπλέον έχουμε $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Για τον λόγο των παραγώγων έχουμε ότι

$$\frac{x'}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \log a} \qquad \text{και έχουμε ότι} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \log a} = 0$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα L'Hôpital $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(a^x)} = 0$. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται με βάση την ειδική αφού

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{x^b}{(a^{1/b})^{x\,b}} = \left(\frac{x}{(a^{1/b})^x}\right)^b = \left(\frac{x}{\gamma^x}\right)^b$$

όπου θέσαμε $\gamma = a^{1/b} > 1$. Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\gamma^x}\right)^b = 0^b = 0.$$

Παράδειγμα 6.3. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^b}{x^a}=0 \qquad a>0,\ b>0$$

Θα αντιμετωπίσουμε πρώτα την περίπτωση $b=1$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$, με $a>0$. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε $x^a\neq 0$ και $(x^a)'=a\,x^{a-1}\log a\neq 0$. Επιπλέον έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\log x=\lim_{x\to+\infty}x^a=+\infty$ οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Για τον λόγο των παραγώγων έχουμε

$$\frac{(\log x)'}{(a^x)'}=\frac{\frac{1}{x}}{a\,x^{a-1}}=\frac{1}{a\,x^a} \qquad \text{και έχουμε ότι} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a\,x^a}=0\,.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα L'Hôpital συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log x}{(a^x)}=0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό έχουμε ότι για την γενική περίπτωση $b>0$, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log a)^b}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x}{x^{a/b}}\right)^b=0^b=0\,.$$

Παρατήρηση 6.4. *Το αντίστροφο των κανόνων L'Hôpital δεν ισχύει.* Δηλαδή είναι δυνατόν να έχουμε να υπολογίσουμε μια απροσδιόριστη μορφή ορίου και να μην υπάρχει το όριο των λόγων των παραγώγων, όμως το όριο του λόγου των συναρτήσεων που θέλουμε να υπολογίσουμε να υπάρχει!!

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$. Επειδή $x-\cos x>x-1$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(x-\cos x)=+\infty$. Επιπλέον, $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Το όριο όμως υπολογίζεται εύκολα γιατί

$$\frac{x-\cos x}{x}=1-\frac{\cos x}{x} \quad \text{και} \quad \left|\frac{\cos x}{x}\right|<\frac{1}{x} \qquad \forall x\in(0,+\infty)$$

κι επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων θα είναι και $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}=1$.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να εφαρμόσουμε τον Δεύτερο Κανόνα L'Hôpital. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{(x-cosx)'}{x'}=\frac{1+sinx}{1}=1+\sin x$ και το όριο $\lim_{x\to+\infty}(1+\sin x)$ δεν υπάρχει γιατί δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}\sin x$.

Συνεπώς, υπάρχει περίπτωση το όριο της απροσδιόριστης μορφής που θέλουμε να υπολογίσουμε να υπάρχει και οι κανόνες L'Hôpital να μην μας βοηθούν στον υπολογισμό του ορίου.

Υπάρχουν κι άλλες απροσδιόριστες μορφές, όμως όλες τους μπορούν να αναχθούν στις απροσδιόριστες μορφές για τις οποίες μπορούν να εφαρμοσθούν οι δυο κανόνες L'Hôpital. Πιο συγκεκριμένα, Οι απροσδιόριστες μορφές ορίων είναι:

α) Για την πρόσθεση: $(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty)$.

β) Για την αφαίρεση: $(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty)$.

γ) Για τον πολλαπλασιασμό: $0\,(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\,0$.

δ) Για την διαίρεση: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{a}{0}$ με $a \neq 0$.

ε) Για δυνάμεις: $(+\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}$.

Όλες οι απροσδιόριστες μορφές, εκτός από την $\dfrac{a}{0}$ με $a \neq 0$, ανάγονται με κατάλληλους μετασχηματισμούς στις απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Πράγματι:

1. Έστω $\lim f(x) = 0$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)\,g(x) = 0\,(\pm\infty)$. Τότε
$$\lim f(x)\,g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \qquad \text{ή} \qquad \lim f(x)\,g(x) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

2. Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = -\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim(f(x) + g(x)) = (+\infty) + (-\infty)$. Τότε
$$\lim f(x)\,g(x) = \lim \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}\right) f(x)\,g(x) = 0\,(-\infty)$$
οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση (1) απροσδιόριστης μορφής.

3. Έστω $\lim f(x) = 0$, όπου $f(x) > 0$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = 0^0$. Τότε
$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = 0\,(-\infty)$$
οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

4. Έστω ότι $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = (+\infty)^0$. Τότε
$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = 0\,(+\infty)$$
οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

5. Έστω ότι $\lim f(x) = 1$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = 1^{\pm\infty}$. Τότε
$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = (\pm\infty)\,0$$
οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

6.1 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να εξακριβώσετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του πρώτου ή δεύτερου κανόνα L'Hôpital, και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} x\log x,\qquad b)\ \lim_{x\to 0^+} x^x,\qquad c)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right),$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x},\qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3},\qquad f)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4},$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right),\qquad h)\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x,\qquad i)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{x}{x-1}},$$

Απ. $a)$ 0, $b)$ 1, $c)$ 0, $d)$ 0, $e)$ $\frac{1}{6}$, $f)$ $\frac{1}{4}$, $g)$ $\frac{1}{2}$, $h)$ 1, $i)$ e.

Άσκηση 2. Να εξακριβώσετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του πρώτου ή δεύτερου κανόνα L'Hôpital, και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x},\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x},\qquad c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{(\log x)^2}{x},$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\tan x},\qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2},\qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}.$$

Απ. $a)$ 0, $b)$ 1, $c)$ 0, $d)$ 1, $e)$ $\frac{1}{3}$, $f)$ 2.

Άσκηση 3. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^4},\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{1-\cos(4x)},\qquad c)\ \lim_{x\to 1}\frac{5x^7-6x^6+x}{(x-1)^2}.$$

Απ. $a)$ $+\infty$, $b)$ δεν υπάρχει, $c)$ 15.

Άσκηση 4. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x},\qquad b)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x+\log x},\qquad c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(1+e^{2x})}{x}.$$

Απ. $a)$ $\log 2$, $b)$ $+\infty$, $c)$ 2.

Άσκηση 5. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2 e^{2x}},\qquad b)\ \lim_{x\to +\infty} x^{1/x},\qquad c)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\log\frac{1}{x}\right).$$

Απ. $a)$ $+\infty$, $b)$ 1, $c)$ $+\infty$.