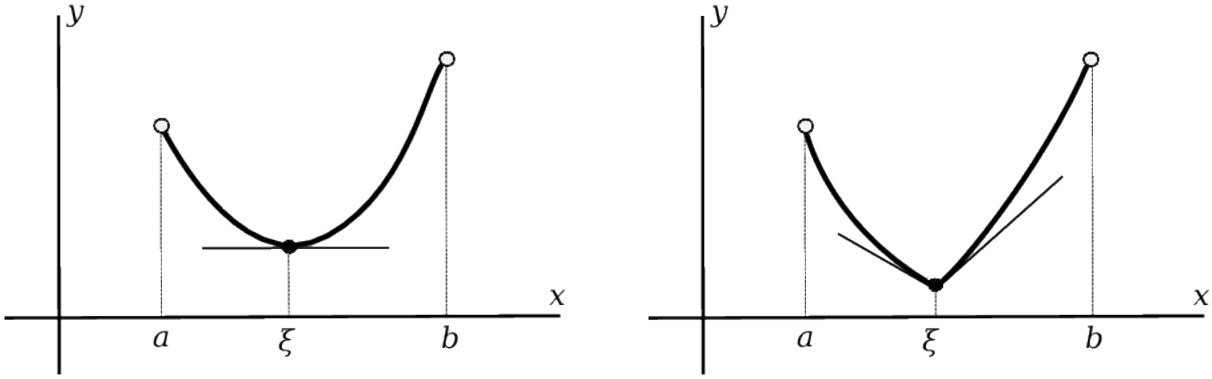
7 Τέσσερα σημαντικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού

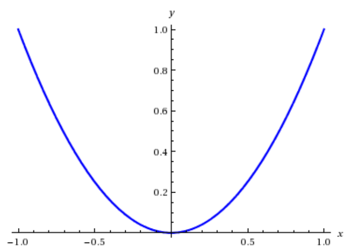
Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε τέσσερα σημαντικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού. Το πρώτο θεώρημα είναι το εξής.

Πρόταση 7.1. ***(Θεώρημα του Fermat)*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και έστω ξ σημείο στο (a, b). Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$, τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ,
(ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ και ισχύει $f'(\xi) = 0$.

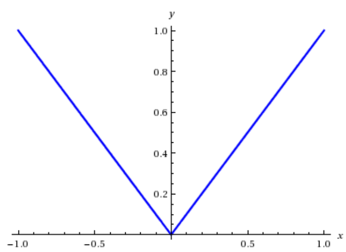


Σχήμα 22: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Fermat: Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το ξ και το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$, τότε είτε υπάρχει εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και η κλίση της είναι ίση με 0 (παράλληλη στον άξονα των x), είτε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ (σχήμα δεξιά).

Παράδειγμα 7.2. Το $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = x^2$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, και η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = 0$ είναι ίση με μηδέν, πράγματι, $(x^2)' = 2x|_{x=0} = 0$.



Παράδειγμα 7.3. Το $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = |x|$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αλλά η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο $x = 0$.

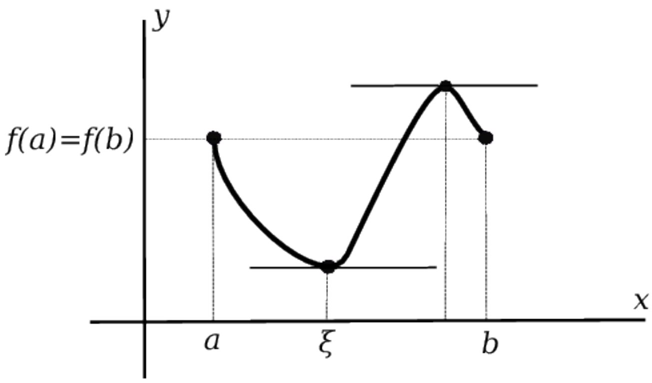


Το θεώρημα του Fermat έχει το εξής πόρισμα:

Υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου: Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα εξής σημεία:
(i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος,
(ii) τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και
(iii) τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0.
Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

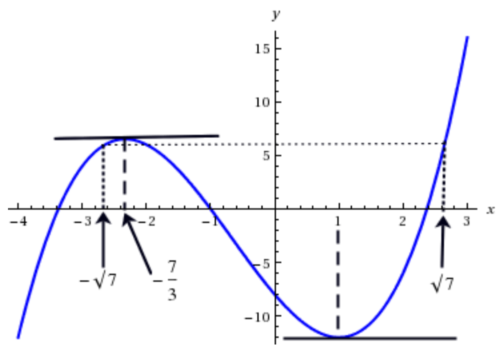
Το δεύτερο σημαντικό θεώρημα είναι το

Πρόταση 7.4. ***(Θεώρημα του Rolle)*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Αν είναι $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, b)$ ώστε να είναι $f'(\xi) = 0$.*



Σχήμα 23: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

Παράδειγμα 7.5. Η $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 8$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ και έχει παράγωγο στο $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ και οι τιμές της στα άκρα είναι $f(\sqrt{7}) = f(-\sqrt{7}) = 6$. Άρα υπάρχει κάποιο $\xi \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, στο οποίο η παράγωγος $f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$ είναι ίση με μηδέν. Για να βρούμε το ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 7 = 0$. Οι λύσεις είναι οι $x = -\frac{7}{3}$, $x = 1$ που ανήκουν και οι δύο στο διάστημα $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, αφού $-\sqrt{7} \approx -2.65 < -2.33 \approx -\frac{7}{3}$ και $1 < \sqrt{7} \approx 2.65$.



Παράδειγμα 7.6. Με την βοήθεια του θεωρήματος του Rolle θα δείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 + 6x + 1 = 0$ δεν μπορεί να έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και

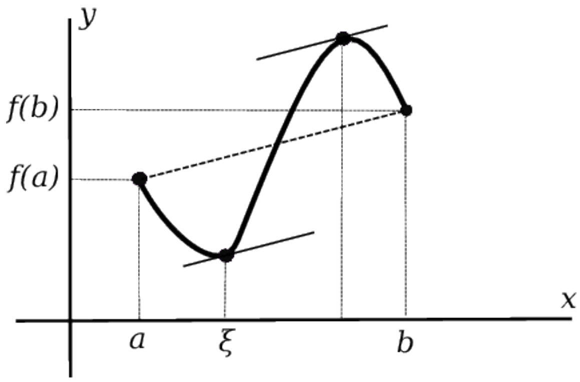
$[\rho_2, \rho_3]$ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x + 1$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στα διαστήματα (ρ_1, ρ_2) και (ρ_2, ρ_3) και είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και $f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ αφού οι ρ_i είναι ρίζες της $f(x) = 0$. Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

Όμως, $f'(x) = 3x^2 + 6$ και η εξίσωση $3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Άτοπο! και στο άτοπο φτάσαμε υποθέτοντας ότι η $f(x) = 0$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες, άρα δεν μπορεί να συμβαίνει αυτό.

Παράδειγμα 7.7. Με την βοήθεια του θεωρήματος του Rolle θα δείξουμε ότι η εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)$ την οποία όταν την παραγωγίσουμε μας δίνει την εξίσωση $6x^5 - 4x + 1$, δηλαδή $f(x) = x^6 - 2x^2 + x + c$. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και έχει παράγωγο στο $(0, 1)$ και $f(0) = f(1) = c$. Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα υπάρχει ένα $\xi \in (0, 1)$ που ικανοποιεί την εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$.

Πρόταση 7.8. ***Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange)*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε*

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



Σχήμα 24: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής Lagrange: Ο αριθμός $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ είναι η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Οπότε το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) έχει την γεωμετρική ερμηνεία ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει την ίδια κλίση, δηλαδή είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange), αφού αν $f(a) = f(b)$ τότε από το θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συμπεραίνουμε ότι για κάποιον ξ στο (a, b) είναι $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Άρα το θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συνεπάγεται το θεώρημα του Rolle. Από την άλλη το θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = (b-a)f(x) - (f(b)-f(a))x$ στο διάστημα $[a, b]$, οπότε τα δυο αυτά θεωρήματα είναι ισοδύναμα.

Παράδειγμα 7.9. Η $y = \sin x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. Άρα υπάρχει ξ στο $(0, \frac{\pi}{2})$ ώστε να είναι $\sin' \xi = \cos \xi = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$, ($\xi \approx 0.880689$).

Το τελευταίο σημαντικό θεώρημα είναι το

Πρόταση 7.10. ***Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy)*** *Έστω ότι οι $f(x)$ $g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b), έτσι ώστε (i) να είναι $g(a) \neq g(b)$ και (ii) σε κανένα x του (a, b) να μην ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$. Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε*

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής Cauchy αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = (g(a) - g(b))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$ στο διάστημα $[a, b]$. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) είναι ειδική περίπτωση του Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) παίρνοντας για $g(x) = x$. Προηγουμένως είδαμε ότι το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange). Οπότε το συμπέρασμα είναι ότι τα τρία θεωρήματα Rolle-Lagrange-Cauchy είναι ισοδύναμα.