8 Ακρότατα και μονοτονία

Πρόταση 8.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

1. *Η $y = f(x)$ είναι σταθερή στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

2. *Η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

3. *Η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

Μια παραλλαγή της προηγούμενης πρότασης είναι η παρακάτω

Πρόταση 8.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

1. *Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο I.*

2. *Αν είναι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο I.*

Παρατήρηση 8.3. Στις προηγούμενες προτάσεις όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$, και όμοια όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$.

Παρατήρηση 8.4. Δεν ισχύουν τα αντίστροφα των 1., 2. της πρότασης (8.2). Δηλαδή αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που προκύπτει από το γεγονός ότι είναι αύξουσα δηλαδή ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I. Ανάλογα ισχύουν, κι αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Για παράδειγμα η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά δεν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε σημείο στο $(-\infty, +\infty)$, αφού $(x^3)' = 3x^2$ και είναι > 0 για κάθε $x \neq 0$, αλλά είναι μηδέν για $x = 0$.

Παρατήρηση 8.5. Οι προηγούμενες προτάσεις ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ένωση κάποιων διαστημάτων τότε ενδέχεται τα συμπεράσματα να μην ισχύουν στις ενώσεις των διαστημάτων.
Για παράδειγμα: 1) η $f(x) = \frac{|x|}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι σταθερή στο $D(f)$. Είναι σταθερή -1 στο $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο $(0, +\infty)$.

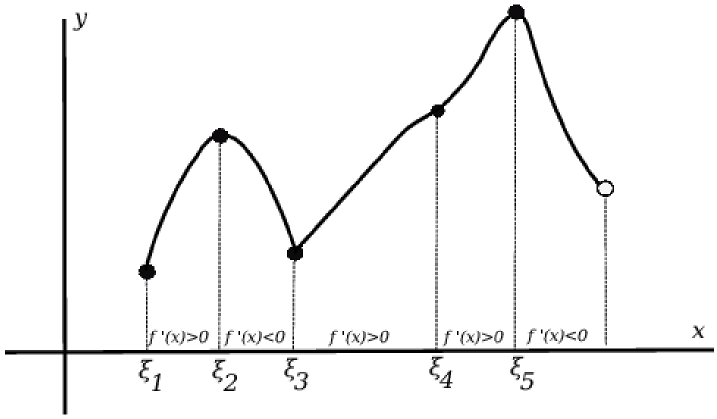
2) Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο $-\frac{1}{x^2} < 0$ στο πεδίο ορισμού της $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $D(f)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Υπάρχει ένας εύχρηστος τρόπος για να χαρακτηρίζουμε τα υποψήφια σημεία τοπικών ακροτάτων ξ_i μιας συνάρτησης $y = f(x)$ με βάση το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ δεξιά κι αριστερά των ξ_i.

Πρόταση 8.6. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I και είναι συνεχής σε κάποιο υποδιάστημα $(a, b) \subset I$ και ο ξ ανήκει στο (a, b).*

1. *Αν είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε σημείο x στο (a, ξ) και $f'(x) \leq 0$ για κάθε σημείο x στο (ξ, b), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.*

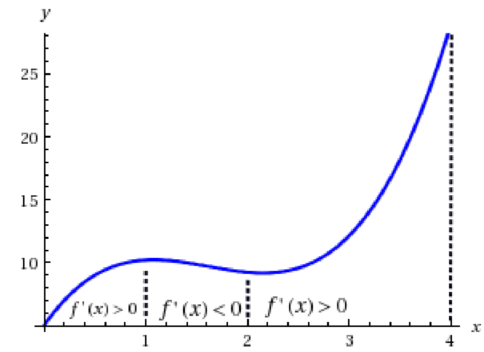
2. *Αν είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε σημείο x στο (a, ξ) και $f'(x) \geq 0$ για κάθε σημείο x στο (ξ, b), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.*



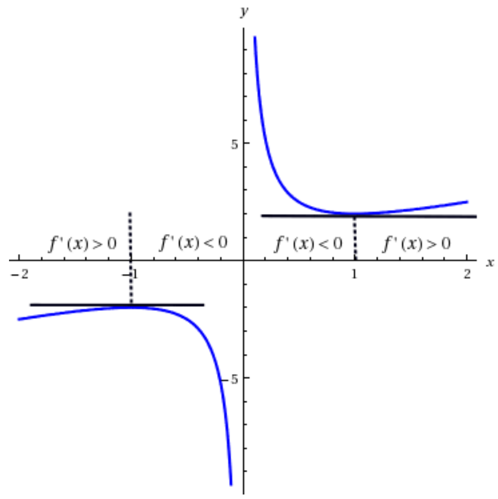
Σχήμα 25: Διαστήματα μονοτονίας και σημεία τοπικού ακροτάτου.

Χαρακτηρισμός υποψήφιων σημείων τοπικών ακροτάτων: Έστω ότι μας δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ σε κάποιο διάστημα (οποιουδήποτε τύπου) κι ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί όλα τα υποψήφια σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ τοπικού ακροτάτου (συμπεριλαμβανομένων και των πιθανών άκρων του διαστήματος) και η παράγωγος $f'(x)$ έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα ανοιχτά υποδιαστήματα που χωρίζονται από τα σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Τότε:
(i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου,
(ii) κάθε ξ_i που χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος είναι ετερόσημη είναι σημείο τοπικού ακροτάτου,
(iii) κάθε ξ_i που χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος είναι ομόσημη δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 8.7. Η $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ και έχει παράγωγο $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ στο $(0, 4)$. Η παράγωγος είναι θετική στο διάστημα $(0, 1)$ και στο $(2, 4)$, και είναι αρνητική στο διάστημα $(1, 2)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $[2, 4]$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$. Συνεπώς τα $x = 0$ και $x = 2$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της $f(x)$ και τα σημεία $x = 1$ και $x = 4$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου.



Παράδειγμα 8.8. Η $f(x) = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η παράγωγος είναι $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ και είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και αρνητική στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1)$ και στο $(1, +\infty)$, και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0)$ και στο $(0, 1]$. Συνεπώς το $x = -1$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $f(x)$ και το σημείο $x = 1$ και είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.



8.1 Ασκήσεις στις ενότητες 7 και 8

Άσκηση 1. Μπορεί η εξίσωση $x^3 - 12\,x = c$ να έχει δυο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2, 2]$; στο $(\infty, -2]$; στο $[2, +\infty)$;

Άσκηση 2. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = 2 - \sqrt[5]{x^2}$ και παρατηρούμε ότι έχει την ίδια τιμή 1 για $x = 1$ και $x = -1$. Υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(-1, 1)$ στον οποίο να μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης;

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x\,sinx + \cos x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις. Να προσδιορίσετε την θέση των λύσεων σε σχέση με το $x = 0$.

Άσκηση 4. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x = 1$; Η εξίσωση $e^x = 1 + x$;

Άσκηση 5. Να αποδειχτεί ότι: (i) $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (ii) $\log x \leq x - 1$ για κάθε x θετικό πραγματικό. (iii) $(1 + x)^a > 1 + a\,x$, αν $x > 0$ και $a > 1$.

Άσκηση 6. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) να δειχθεί ότι

$$n\,b^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < n\,a^{n-1}$$

όπου a, b θετικοί πραγματικοί με $b < a$ και n φυσικός $n > 1$.

Άσκηση 7. Να αποδειχθεί ότι $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + x + 1 & \text{με} \quad x \geq 1 \\ 2\,a\,x + 1 & \text{με} \quad x < 1 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του πραγματικού a η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$;

Άσκηση 9. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικών ακροτάτων στο πεδίο ορισμού καθεμιάς απο τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$i) \quad y = (x-1)\,\sqrt[3]{x^2}\,, \qquad (ii) \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x+4}\,, \qquad (iii) \quad y = x^2\,e^{-x}\,.$$

Άσκηση 10. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα

$$(i) \quad y = (x-1)\,|x| \text{ στο } [-1, 3] \quad (ii) \quad y = x + \frac{1}{x} \text{ στο } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \quad (iii) \quad y = e^x\,\sin x \text{ στο } [0, 2\,\pi]\,.$$

Άσκηση 11. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $y = \frac{x^2-75}{x-10}$ στο διάστημα $[0, 10)$. Ποιά είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό;

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$. Να δειχθεί ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $(-\infty, +\infty)$ αν και μόνο αν $a^2 \leq 3\,b$.

Άσκηση 13. Να δειχθεί ότι απ΄ όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $2\,a$, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Άσκηση 14. Να δειχθεί ότι απ΄ όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό k^2, το τετράγωγο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Άσκηση 15. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου παραλληλογράμμου μέγιστου εμβαδού, που δυο πλευρές του να βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες ορθογωνίου συστήματος και μια από τις κορυφές του πάνω στην ευθεία $x + y = 2$.

Άσκηση 16. Να δειχθεί ότι απ΄ όλα τα ισοσκελή τρίγωνα σταθερής περιμέτρου a, το ισόπλευρο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.