9 Δεύτερη παράγωγος κι εφαρμογές

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει τον x_0 και ότι η $f'(x)$ η οποία ορίζεται στο διάστημα αυτό έχει με την σειρά της παράγωγο στο x_0, δηλαδή υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$. Τότε το όριο αυτό ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της $y = f(x)$ και συμβολίζεται ως εξής

$$f''(x) \quad \text{ή} \quad \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x_0} \qquad \text{ή} \qquad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

9.1 Τοπικά ακρότατα

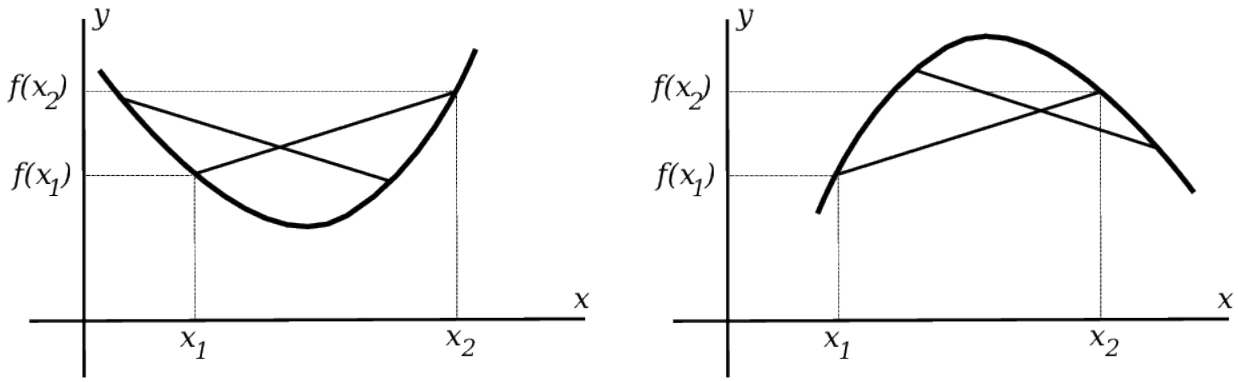
Κριτήριο δεύτερης παραγώγου: Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει πρώτη παράγωγο στο διάστημα (a, b), ο x_0 ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον x_0. Τότε:

(1) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) > 0$, τότε ο x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.

(2) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) < 0$, τότε ο x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

9.2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται ως **κυρτή στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Ομοίως, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται ως **κοίλη στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$.



Σχήμα 26: Κυρτή συνάρτηση (αριστερά) και κοίλη συνάρτηση (δεξιά).

Αυστηρά οι έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας διατυπώνονται ως εξής:
α) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \leq (1-t)f(x_1) + t f(x_2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

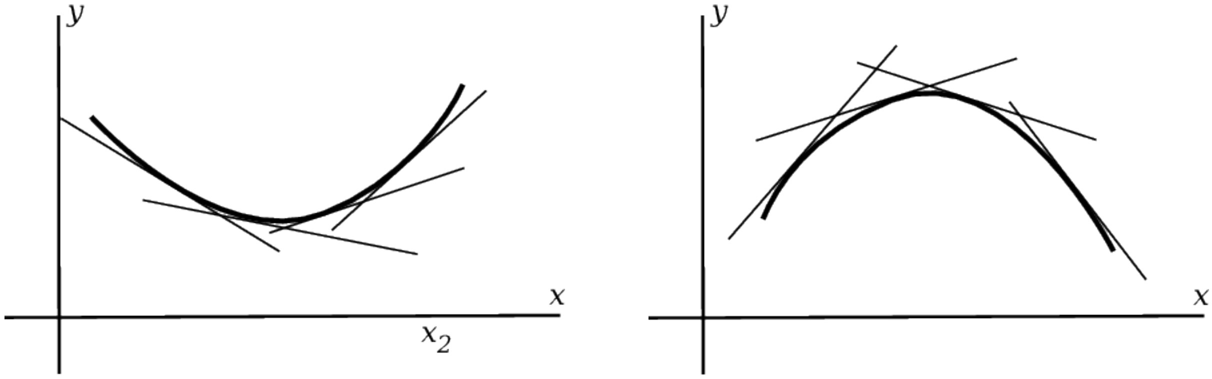
β) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + t x_2) \geq (1-t)f(x_1) + t f(x_2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Με τις παρακάτω προτάσεις μπορούμε να χαρακτηρίζουμε πότε μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα I.

Πρόταση 9.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I
2) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I.

Η προηγούμενη πρόταση έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο σε κάθε σημείο σε ένα διάστημα I και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{J}_x$ την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x, f(x))$. Η κλίση της $\mathcal{J}_x$ είναι ίση με $f'(x)$.Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν καθώς το x αυξάνεται η κάθε εφαπτόμενη ευθεία περιστρέφεται με φορά αντίθετη από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Ανάλογα, η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν καθώς το x αυξάνεται η κάθε εφαπτόμενη ευθεία περιστρέφεται με ίδια με την φορά των δεικτών του ρολογιού.



Σχήμα 27: Αύξουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κυρτή συνάρτηση (αριστερά). Φθίνουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κοίλη συνάρτηση (δεξιά).

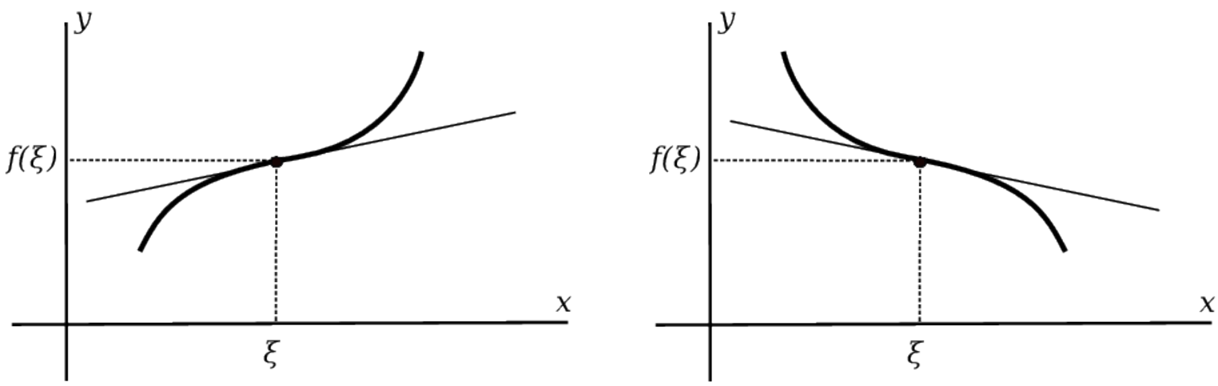
Μια παραλλαγή της προηγούμενης πρότασης είναι η ακόλουθη

Πρόταση 9.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

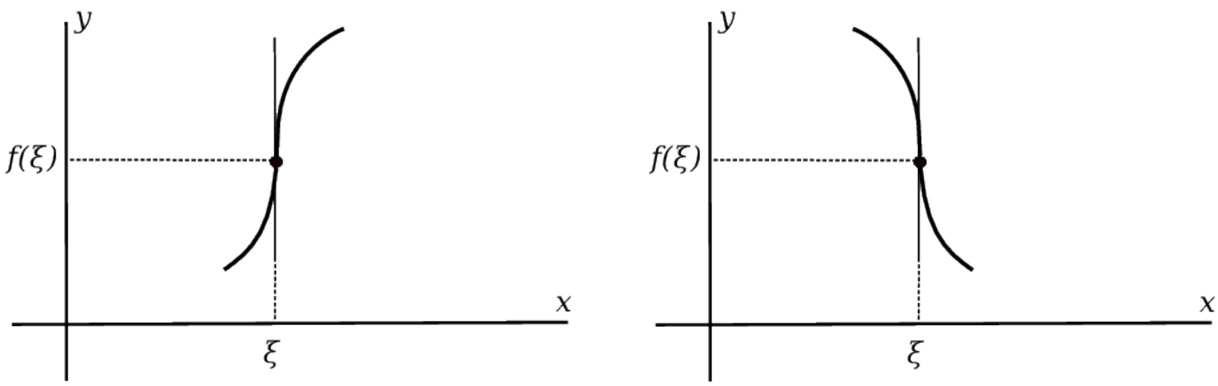
1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I.
2) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I.

9.3 Σημεία καμπής

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ότι ο ξ ανήκει στο (a, b). Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Ο ξ είναι **σημείο καμπής** της $y = f(x)$ αν το μέρος του γραφήματος που είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και δεξιά του και το μέρος γραφήματος που είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ κι αριστερά του είναι στα ίδια ημιεπίπεδα που ορίζει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα στο $(\xi, f(\xi))$. Επίσης, και συμβαίνει το ίδιο και η παράγωγο $f'(\xi)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$ θα λέμε και πάλι ότι το ξ είναι **σημείο καμπής** της $y = f(x)$. Με



Σχήμα 28: Σημείο καμπής όταν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός.



Σχήμα 29: Σημείο καμπής όταν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

τις παρακάτω προτάσεις έχουμε διάφορα κριτήρια για να αποφασίζουμε αν ο ξ είναι σημείο καμπής της $y = f(x)$.

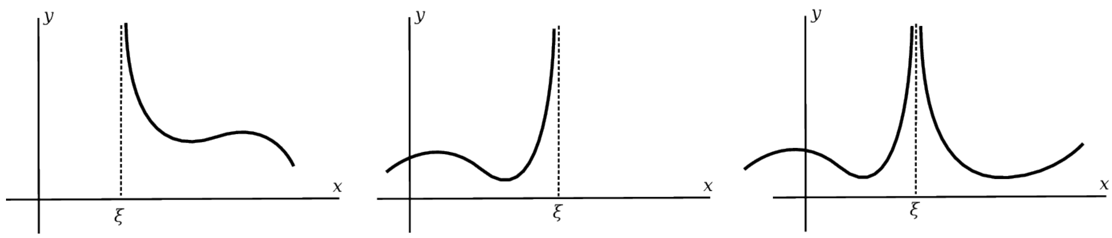
Πρόταση 9.3. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα $(c, \xi]$ και κοίλη σε κάποιο διάστημα (ξ, d) ή αντίθετα, αν είναι κοίλη σε κάποιο διάστημα $(c, \xi]$ και κυρτή σε κάποιο διάστημα (ξ, d), τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $y = f(x)$.*

Πρόταση 9.4. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (c, ξ) και $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (ξ, d) ή αντίθετα, αν είναι $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (c, ξ) και $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (ξ, d), τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $y = f(x)$.*

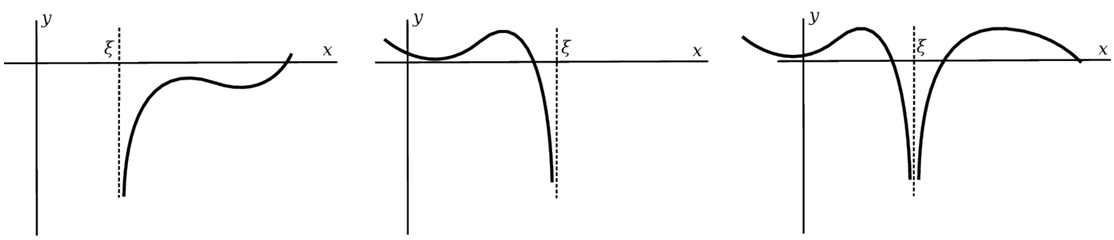
Παράδειγμα 9.5. Η $f(x) = x^3$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3\,x^2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6\,x$. Επειδή είναι $f''(x) \leq 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f''(x) \geq 0$ στο $(0, +\infty)$, ο $x = 0$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

9.4 Ασύμπτωτες

Ορισμός 9.6. Η ευθεία $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της $y = f(x)$ σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi^\pm} f(x) = \pm\infty$.



Σχήμα 30: $\lim_{x\to\xi^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ κατακόρυφη ασύμπτωτος στο $+\infty$.



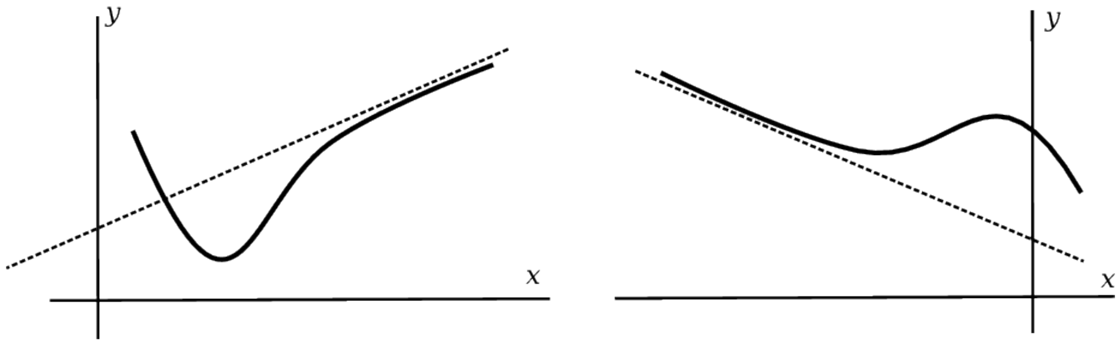
Σχήμα 31: $\lim_{x\to\xi^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ κατακόρυφη ασύμπτωτος στο $-\infty$.

Ορισμός 9.7. Μια ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται ως **(πλάγια) ασύμπτωτη στο** $+\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x) - \mu x - \nu\Big) = 0$$

Ορισμός 9.8. Μια ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται ως **(πλάγια) ασύμπτωτη στο** $-\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(-\infty, b)$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) - \mu x - \nu\Big) = 0$$



Σχήμα 32: Πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο $+\infty$ (αριστερά) και στο $-\infty$ (δεξιά). Το γράφημα της $y = f(x)$ προσεγγίζει την ευθεία ℓ κοντά στο $+\infty$ $(-\infty)$.

Τρόπος εύρεσης πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας: Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ (αντίστοιχα $(-\infty, b)$). Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \mu \in \mathbb{R} \qquad \Big(\text{αντίστοιχα} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \mu \in \mathbb{R}\Big)$$

και στην συνέχεια για τον συγκεκριμένο αριθμό $\mu \in \mathbb{R}$, το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x) - \mu x\Big) = \nu \in \mathbb{R} \qquad \Big(\text{αντίστοιχα} \qquad \lim_{x\to-\infty}\Big(f(x) - \mu x\Big) = \nu \in \mathbb{R}\Big)$$

τότε η ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) στο γράφημα της $y = f(x)$.

Η **οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία** στο γράφημα της $y = f(x)$ είναι μια ειδική περίπτωση πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας. Πράγματι, μια οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία είναι μια πλάγια ασύμπτωτη ευθεία με κλίση ίση με 0, ή ισοδύναμα $\mu = 0$, και $\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$.