Μαθηματικά για Βιολόγους

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Αναστάσιος Γ. Τόγκας

Πάτρα, Ιανουάριος 2016

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί

1.1 Σύνολα αριθμών

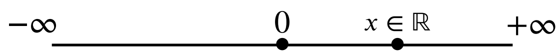
Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Το σύνολο των ακεραίων $\mathrm{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.
Οι ακέραιοι διαμερίζονται σε άρτιους και περιττούς ανάλογα αν ένας ακέραιος διαιρείται με το δύο ή όχι αντίστοιχα. Το μηδέν είναι άρτιος.

Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} = \{x \ : \ x = \dfrac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0\}$

Το σύνολο των θετικών ρητών $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x > 0\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και παριστάνεται με την πραγματική ευθεία



Το σύνολο των θετικών πραγματικών $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$

Το σύνολο των αρνητικών πραγματικών $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}$

Έστω A, B δυο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, δηλαδή $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathbb{R}$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ ορίζεται ως το σύνολο των ζευγαριών (a, b) όπου το a διατρέχει το A και το b διατρέχει το B, δηλαδή $A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A\,, \ b \in B\}$.

1.2 Διαστήματα

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Διάφορα κλειστά, ανοικτά, ανοικτά-κλειστά, κλειστά-ανοικτά διαστήματα στον $\mathbb{R}$ είναι

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R},\ \alpha \leq x \leq \beta\}$, $[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R},\ \alpha \leq x < \beta\}$

$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R},\ \alpha < x \leq \beta\}$, $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R},\ \alpha < x < \beta\}$

$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$, $(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$

$(-\infty, \beta) = \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$, $(-\infty, \beta] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq \beta\}$ $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Όταν το άκρο ενός διαστήματος στον $\mathbb{R}$ είναι $\pm\infty$ τότε το διάστημα είναι πάντα ανοικτό στο άκρο αυτό και σημειώνεται με παρένθεση. Τα $\pm\infty$ δεν θεωρούνται αριθμοί.

Θεώρημα 1.2.1. *Το $\mathbb{Q}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{R}$ που δεν είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}$.*

Απόδειξη: Έστω $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ τέτοιος που $y^2 = 2$. Θα δείξουμε ότι ο y δεν ανήκει στους ρητούς, $y \notin \mathbb{Q}$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $y \in \mathbb{Q}$, με $y = m/n$ όπου m, n θετικοί ακέραιοι και μ.κ.δ.(m, n)=1, δηλαδή το κλάσμα m/n είναι ανάγωγο. Ειδικότερα οι m, n δεν είναι και οι δυο άρτιοι. Έχουμε ότι $m^2 = 2\,n^2$, άρα ο m είναι άρτιος, (το τετράγωνο περιττού είναι περιττός). Έστω $m = 2k$, k θετικός ακέραιος. Τότε $n^2 = 2k^2$ και συνεπώς και ο n είναι άρτιος. Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι μ.κ.δ.(m, n)=1 κι έτσι οι m, n δεν μπορούν να είναι και οι δυο άρτιοι. Άρα η υπόθεση με την οποία ξεκινήσαμε $y \in \mathbb{Q}$ είναι λάθος, άρα $y \notin \mathbb{Q}$. □

1.3 Αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ και το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι διατεταγμένα σώματα.

1.3.1 Διατεταγμένα σώματα

Ορισμός 1.3.1. Ένα μή κενό σύνολο Σ λέγεται διατεταγμένο σώμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Αξιώματα της πρόσθεσης

Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x + y$ και λέγεται το άθροισμα των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x + y$ λέγεται πρόσθεση κι ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

• Προσεταιριστική $\forall x, y, z \in \Sigma$ ισχύει ότι $(x + y) + z = x + (y + z)$

• Αντιμεταθετική $\forall x, y \in \Sigma$ ισχύει ότι $x + y = y + x$

• Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με 0 τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \Sigma , \quad x + 0 = 0 + x = x$$

• Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου. Για κάθε στοιχείο x του Σ υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται με $-x$ τέτοιο ώστε

$$x + (-x) = (-x) + x = 0 \,.$$

Η αφαίρεση στο Σ ορίζεται από την σχέση

$$x - y = x + (-y) \qquad \forall x, y \in \Sigma \,.$$

β) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού

Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x\,y$ και λέγεται το γινόμενο των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x\,y$ λέγεται πολλαπλασιασμός κι ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

• Προσεταιριστική $\forall x, y, z \in \Sigma$ ισχύει ότι $(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$

• Αντιμεταθετική $\forall x, y \in \Sigma$ ισχύει ότι $x\,y = y\,x$

• Ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με 1 τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \Sigma , \quad x\,1 = 1\,x = x$$

• Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου. Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο x του Σ, υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται με x^{-1} τέτοιο ώστε

$$x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1 \,, \qquad x \neq 0 \,.$$

Η διαίρεση στο Σ ορίζεται από την σχέση

$$\frac{x}{y} = x\,y^{-1} \qquad \forall x, y \in \Sigma , \quad y \neq 0 \,.$$

γ) Επιμεριστική ιδιότητα

Η επιμεριστική ιδιότητα συνδέει τον πολλαπλασιασμό με πρόσθεση:

$$\forall x, y, z \in \Sigma \qquad \text{ισχύει} \qquad x\,(y + z) = x\,y + x\,z \,.$$

δ) Ιδιότητες της διάταξης

Υπάρχει ένα υποσύνολο Θ του Σ, που λέγεται το σύνολο των θετικών στοιχείων του Σ, το οποίο ορίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες

• Για κάθε στοιχείο x του Σ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$x \in \Theta, \qquad -x \in \Theta, \qquad x = 0.$$

• Αν $x, y \in \Theta$ τότε $x + y \in \Theta$ και $x\,y \in \Theta$.

Το σύνολο Θ ορίζει μια διάταξη στο σώμα Σ ως εξής: Λέμε ότι $x > y$ αν και μόνο αν $x - y \in \Theta$. Γράφοντας $x \geq 0$ εννοούμε ότι $x > y$ ή $x = y$. Από τον ορισμό του Θ προκύπτει ότι

$$x \in \Theta \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Από τις ιδιότητες του Θ έπονται οι παρακάτω ιδιότητες της διάταξης $>$:

• (νόμος της τριχοτομίας) Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$x > y, \qquad x < y, \qquad x = y.$$

• (μεταβατική ιδιότητα) Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$.

• (νόμος διαγραφής για την πρόσθεση) Αν $x > y$ τότε για κάθε z ισχύει ότι $x + z > y + z$

• (νόμος διαγραφής για τον πολ/σμό) Αν $x > y$ και $z > 0$, τότε $x\,z > y\,z$.

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι το τυπικό παράδειγμα ενός διατεταγμένου σώματος. Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμοί με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι διατεταγμένο σώμα.

Μια ιδιότητα που διαφοροποιεί το $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$ είναι το αξίωμα της πληρότητας που εξετάζουμε παρακάτω.

1.3.2 Το αξίωμα της πληρότητας

Από την στιγμή που σ' ένα διατεταγμένο σώμα Σ έχουμε ορίσει μια διάταξη $>$ μπορούμε να μιλάμε για υποσύνολα του Σ που είναι άνω ή κάτω φραγμένα.

Ορισμός 1.3.2. Έστω ένα διατεταγμένο σώμα Σ. Ένα υποσύνολο A του Σ λέγεται

• άνω φραγμένο, αν υπάρχει $a \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $x \leq a$, για κάθε $x \in A$,

• κάτω φραγμένο, αν υπάρχει $b \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $b \leq x$, για κάθε $x \in A$,

• φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Κάθε στοιχείο του Σ που ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό λέγεται άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα του A.

Ορισμός 1.3.3. α) Έστω A ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το στοιχείο $a \in \Sigma$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A αν
- το a είναι άνω φράγμα του A και
- αν a_1 είναι ένα άνω φράγμα του A τότε $a \leq a_1$.

β) Έστω A ένα κάτω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το στοιχείο $a \in \Sigma$ είναι μέγιστο κάτω φράγμα του A αν
- το a είναι κάτω φράγμα του A και
- αν a_1 είναι ένα κάτω φράγμα του A τότε $a \geq a_1$.

Στην περίπτωση που υπάρχουν, θα συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του A με $\sup A$ (supremum του A), και το μέγιστο κάτω φράγμα του A με $\inf A$ (infimum του A).

Προσοχή!!! Τα $\sup A$, $\inf A$ μπορεί να είναι στοιχεία του A, αλλά μπορεί και να μην είναι. Στην περίπτωση που $\sup A \in A$, $\inf A \in A$, τότε τα $\sup A$ και $\inf A$ είναι το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο του A, αντίστοιχα, δηλαδή $\sup A = \max A$ και $\inf A = \min A$.

Παράδειγμα α) Έστω $A = [0, 1)$. Τότε $\sup A = 1 \notin A$, $\inf A = 0 \in A$.
β) Έστω $\mathrm{A} = (1, 3]$. Τότε $\inf A = 1 \notin A$, $\sup A = 3 \in A$.

Το αξίωμα της πληρότητας: Λέμε ότι ένα διατεταγμένο σώμα Σ ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας αν κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του Σ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $a \in \Sigma$.

Ένα διατεταγμένο σώμα Σ που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας λέγεται *πλήρως διατεταγμένο σώμα.*

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών **δεν** είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα, δηλαδή υπάρχει μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα (στο $\mathbb{Q}$). Πράγματι, ας θεωρήσουμε το υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ me

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$$

Το A είναι μη κενό αφού $1 \in A$ και το A είναι άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το 2, αφού $2 > 0$ και $2^2 = 4 > 2 > x^2$, οπότε $x < 2$ για κάθε $x \in A$. Παραλείποντας μια αυστηρή απόδειξη, αν υπήρχε το ““ελάχιστο άνω φράγμα”” του A αυτό θα ήταν το $\sqrt{2}$, το οποίο όμως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 1.1 ότι ““λείπει”” από το $\mathbb{Q}$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ισχύει το αξίωμα της πληρότητας.

Αξίωμα της πληρότητας για τους πραγματικούς αριθμούς: Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\alpha \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.

1.4 Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών

Έστω ε και α πραγματικοί αριθμοί, $\varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}$ με $\varepsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\varepsilon > \alpha$.

Απόδειξη: Θα πάμε με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\varepsilon > \alpha$. Δηλαδή για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n\varepsilon \leq \alpha$. Τότε το υποσύνολο $A = \{n\varepsilon \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ των πραγματικών είναι άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το α. Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του A, ας το πούμε $\beta = \sup A \in \mathbb{R}$. Προφανώς $\beta - \varepsilon < \beta$, άρα το $\beta - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως μπορούμε να βρούμε φυσικό $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0\varepsilon > \beta - \varepsilon$. Έστω τώρα $n_1 = n_0 + 1$ ο επόμενος φυσικός από τον n_0. Τότε η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$n_0\,\varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (n_1 - 1)\,\varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n_1\,\varepsilon - \varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n_1\,\varepsilon > \beta$$

Άτοπο, γιατί το β είναι άνω φράγμα του A (και μάλιστα το ελάχιστο). □

Ουσιαστικά, η Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών μας λέει ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (Σκεφτείτε την Αρχιμήδεια ιδιότητα για $\varepsilon = 1$).

1.5 Ακέραιο μέρος, άρρητοι αριθμοί και πυκνότητα ρητών και αρρήτων στους πραγματικούς

Πρόταση 1.5.1. *Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $m \leq x < m + 1$. Ο ακέραιος m λέγεται το* **ακέραιο μέρος** *του x και συμβολίζεται με $[x]$.*

Για παράδειγμα $[2.7] = 2$, $[-2.7] = -3$, $[\pi] = 3$.

Πρόταση 1.5.2. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, υπάρχει ρητός p με την ιδιότητα $x < p < y$.*

Η προηγούμενη πρόταση μας πληροφορεί για την πυκνότητα των ρητών αριθμών στους πραγματικούς και ουσιαστικά είναι απόρροια της Αρχιμήδειας ιδιότητας των πραγματικών και της ύπαρξης του ακεραίου μέρους.

Ορισμός 1.5.3. Είδαμε ότι υπάρχουν πραγματικοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί αριθμοί, π.χ. ο $\sqrt{2}$. Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός λέγεται **άρρητος**.

Πρόταση 1.5.4. *Οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, υπάρχει άρρητος α τέτοιος ώστε $x < \alpha < y$.*

1.5.1 Απόλυτη τιμή

Ορισμός 1.5.5. (Απόλυτη τιμή) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$|a| = \begin{cases} a & \text{αν} \quad a \geq 0\,, \\ \\ -a & \text{αν} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Το $|a|$ λέγεται **απόλυτη τιμή** του a. Αν τοποθετήσουμε τον a σε ένα σημείο της πραγματικής ευθείας σκεφτόμαστε το $|a|$ ως την απόσταση του a από το 0. Από τον ορισμό προκύπτει ότι $|-a| = |a|$ και ότι $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Διακρίνοντας περιπτώσεις για το a εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$|a| \leq \varepsilon \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$|a| \geq \varepsilon \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad a \leq -\varepsilon \quad \text{ή} \quad a \geq \varepsilon$$

Με τον ίδιο τρόπο (διακρίνοντας περιπτώσεις) εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τον b με τον $-b$ παίρνουμε ότι ισχύει και

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$$

1.6 Ασκήσεις

Άσκηση 1 Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, min των παρακάτω συνόλων

$$\begin{aligned} &(1) \quad A = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\} \\ &(2) \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -n^2\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\} \\ &(3) \quad C = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq x < 1 + \frac{1}{n}\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\} \end{aligned}$$

Άσκηση 2 Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, min των παρακάτω συνόλων

$$\begin{aligned} &(1) \quad A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \,:\, 0 < x^2 - 1 \leq 2\} \\ &(2) \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x \geq 0, 0 < x^2 - 1 \leq 2\} \\ &(3) \quad C = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + x + 1 \geq 0\} \\ &(4) \quad D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + x + 1 < 0\} \\ &(5) \quad E = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 0, x^2 + x - 1 < 0\} \\ &(6) \quad F = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\} \end{aligned}$$

Άσκηση 3 Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το A είναι μονοσύνολο αν και μόνο αν $\sup A = \inf A$.
(Ένα σύνολο A λέγεται μονοσύνολο αν περιέχει ένα και μόνο ένα στοιχείο, $A = \{a\}$)

Άσκηση 4 Δείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$

$$
\begin{array}{rllll}
(i) & \text{Αν} \quad x < y + \varepsilon & \text{για κάθε} \quad \varepsilon > 0\,, & \text{τότε} \quad x \le y\,. \\
(ii) & \text{Αν} \quad x \le y + \varepsilon & \text{για κάθε} \quad \varepsilon > 0\,, & \text{τότε} \quad x \le y\,. \\
(iii) & \text{Αν} \quad |x - y| \le \varepsilon & \text{για κάθε} \quad \varepsilon > 0\,, & \text{τότε} \quad x = y\,.
\end{array}
$$

Άσκηση 5 Να βρεθούν οι τιμές του x που ικανοποιούν τις ισότητες

$$(i) \quad |5x + 4| = -1, \quad (ii) \quad |3x + 2| = 5, \quad (iii) \quad \left|\frac{x-3}{x-4}\right| = 5, \quad (iv) \quad |4x + 5| = |8x - 3|$$

Άσκηση 6 Να βρεθεί για ποιές τιμές του x ικανοποιούνται οι ανισότητες

$$(i) \quad \left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \le 4, \quad (ii) \quad |3x + 5| \ge 4, \quad (iii) \quad \frac{1}{|x-4|} - \frac{1}{|x+7|} < 0\,.$$

Κεφάλαιο 2

Αντιστοιχίες - Συναρτήσεις

2.1 Αντιστοιχίες

Ορισμός 2.1.1. Έστω δυο μη κενά σύνολα A και B. Λέμε ότι έχουμε μια *αντιστοιχία ή διμελή σχέση* με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης το B αν και μόνο αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα τουλάχιστο στοιχείο x του A με ένα ή περισσότερα στοιχεία y του B.

Συμβολικά γράφουμε $f : A \to B$ και διαβάζουμε, η f είναι μια αντιστοιχία με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης B. Για τα στοιχεία έχουμε

$$x \xrightarrow{f} y, \qquad \text{ή} \qquad A \ni x \xrightarrow{f} y \in B$$

και διαβάζουμε: το x ανήκει στο A μέσω της f αντιστοιχεί στο y ανήκει στο B.

Ορισμός 2.1.2. Ονομάζουμε τύπο μιας αντιστοιχίας $f : A \to B$ την συμβολική έκφραση $x \to y$ με την οποία καθορίζεται ο τρόπος που συνδέονται τα αντίστοιχα στοιχεία. Στην έκφραση $x \xrightarrow{f} y$ το x ονομάζεται αρχέτυπο και το y εικόνα του x μέσω της f.

Ορισμός 2.1.3. Ονομάζουμε *πεδίο ορισμού (domain of definition)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $D(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$D(f) = \{x \in A \quad : \quad \exists\, y \in B, \qquad \text{με} \qquad x \xrightarrow{f} y\}$$

Ορισμός 2.1.4. Ονομάζουμε *πεδίο τιμών (range)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $R(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$R(f) = \{y \in B \quad : \quad \exists\, x \in A, \qquad \text{με} \qquad x \xrightarrow{f} y\}$$

Ορισμός 2.1.5. Ονομάζουμε *γράφημα (graph)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $\Gamma(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times B \quad : \quad x \xrightarrow{f} y\}$$

Από τους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι

$$D(F) \subseteq A, \qquad R(f) \subseteq B, \qquad \Gamma(F) \subseteq D(f) \times R(f)$$

και από τον ορισμό της αντιστοιχίας

$$D(f) \neq \varnothing, \qquad R(f) \neq \varnothing, \qquad \Gamma(F) \neq \varnothing$$

Η συμβολική έκφραση $X \subseteq Y$ δηλώνει ότι το σύνολο X είναι γενικά υποσύνολο του συνόλου Y, με την έννοια ότι κάθε στοιχείο του συνόλου X περιέχεται στο σύνολο Y, όμως μπορεί και κάθε στοιχείο το Y να περιέχεται στο X ή αλλιώς τα δυο σύνολα X, Y να είναι ίσα. Όταν γνωρίζουμε ότι το σύνολο X είναι γνήσιο υποσύνολο Y, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του συνόλου Y το οποίο δεν περιέχεται στο σύνολο X μπορούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\subset$. Για παράδειγμα

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ορισμός 2.1.6. Αν κάθε στοιχείο του Α για την αντιστοιχία $f : A \to B$ είναι αρχέτυπο, δηλαδή $D(f) = A$, και κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα δηλαδή $R(f) = B$, τότε λέμε ότι έχουμε μια αντιστοιχία **του A επί του B**,

Ορισμός 2.1.7. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **του A στο** Β αν και μόνο αν $D(f) = A$, και $R(f) \subset B$, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία του B που δεν είναι εικόνες μέσω της f στοιχείων του A.

Ορισμός 2.1.8. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **από το A στο** Β αν και μόνο αν $D(f) \subset A$, και $R(f) \subset B$.

Ορισμός 2.1.9. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **από το A επί του** Β αν και μόνο αν $D(f) \subset A$, και $R(f) = B$.

Ορισμός 2.1.10. Μια αντιστοιχία $f : A \to B$ λέγεται **μονοσήμαντη ή μονότιμη** αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $x \in D(f)$ έχει μέσω της f ως εικόνα ένα και μόνο στοιχείο $y \in B$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η f θα λέμε ότι είναι πλειότιμη.

Παράδειγμα 2.1.11. Έστω τα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Ορίζουμε την αντιστοιχία $f : A \to B$ ως εξής:

$$1 \overset{f}{\to} 2, \qquad 1 \overset{f}{\to} 6, \qquad 2 \overset{f}{\to} 4, \qquad 2 \overset{f}{\to} 6$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D(f) = \{1, 2\}$, το πεδίο τιμών της f είναι το $R(f) = \{2, 4, 6\}$ και το γράφημα της f είναι το $\Gamma(f) = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (2, 6)\}$.
Επίσης $D(f) \times R(f) = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$. Παρατηρούμε ότι

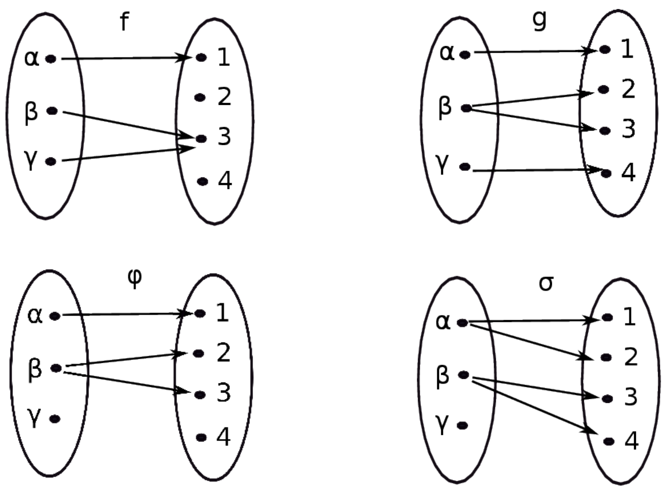
$$D(f) \subset A, \qquad R(f) \subset B, \qquad \Gamma(f) \subset D(f) \times R(f)$$

Η f είναι μια αντιστοιχία ““από το A στο Β”” και επιπλέον η f είναι πλειότιμη (γιατί?).

Παράδειγμα 2.1.12. Έστω $A = \{\alpha, \beta.\gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Ορίζουμε τις αντιστοιχίες

$$\begin{array}{llllll} f : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{f} 1, & \beta \xrightarrow{f} 3, & \gamma \xrightarrow{f} 3, & \\ g : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{g} 1, & \beta \xrightarrow{g} 2, & \beta \xrightarrow{g} 3, & \gamma \xrightarrow{g} 4, \\ \varphi : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{\varphi} 1, & \beta \xrightarrow{\varphi} 2, & \beta \xrightarrow{\varphi} 3, & \\ \sigma : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{\sigma} 1, & \beta \xrightarrow{\sigma} 2, & \beta \xrightarrow{\sigma} 3, & \beta \xrightarrow{\sigma} 4\,. \end{array}$$

Η f είναι αντιστοιχία ""του A στο B"", γιατί $D(f) = A$, $R(f) \subset B$.
Η g είναι αντιστοιχία ""του A επί του B"", γιατί $D(f) = A$, $R(f) = B$.
Η φ είναι αντιστοιχία ""από το A στο B"", γιατί $D(f) \subset A$, $R(f) \subset B$.
Η σ είναι αντιστοιχία ""από το A στο B"", γιατί $D(f) \subset A$, $R(f) \subset B$.
Από τις παραπάνω αντιστοιχίες μόνο η f είναι μονοσήμαντη.



Σχήμα 2.1: Οι αντιστοιχίες f, g, φ και σ του Παραδείγματος 2.12

Παράδειγμα 2.1.13. Δίνεται η αντιστοιχία $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $x \xrightarrow{f} y$ έτσι ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Να βρεθούν α) το πεδίο ορισμού και β) το πεδίο τιμών της f.

α) Στο πεδίο ορισμού της f ανήκουν εκείνα μόνο τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Δηλαδή

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad y^2 = 1 - x^2\}$$

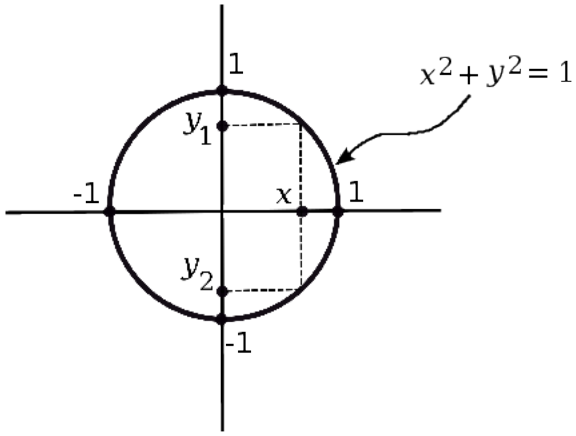
Αλλά για να υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $y^2 = 1 - x^2$ αρκεί και πρέπει $1 - x^2 \geq 0$. Συνεπώς

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

β) Με παρόμοιο τρόπο όπως προηγουμένως για το πεδίο τιμών της f έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} \ : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 = 1\} = \\ &\{y \in \mathbb{R} \ : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 = 1 - y^2\} = \\ &\{y \in \mathbb{R} \ : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad 1 - y^2 \geq 0\} = \\ &\{y \in \mathbb{R} \ : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad -1 \leq y \leq 1\} = \\ &[-1, 1] \end{aligned}$$

Η αντιστοιχία f συσχετίζει τα σημεία του επιπέδου $x - y$ τα οποία ανήκουν σε ένα κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα μονάδα. Προφανώς η f δεν είναι μονοσήμαντη αφού οποιοδήποτε $x \in [-1, 1]$ μέσω της f συσχετίζεται με δυο τιμές: την $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ και την $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$.



Σχήμα 2.2: Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f του Παραδείγματος 2.13

2.2 Συναρτήσεις

Ορισμός 2.2.1. Έστω δυο μή-κενά σύνολα A και B. Κάθε **μονοσήμαντη** αντιστοιχία του A στο B ονομάζεται *απεικόνιση ή συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B. Πιο συγκεκριμένα, ονομάζουμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B κάθε νόμο f μέσω του οποίου το κάθε $x \in A$ συσχετίζεται με *ένα και μόνο ένα* στοιχείο του B. Συμβολικά έχουμε

$$\mathrm{A} \ni x \xrightarrow{f} y \in B \qquad \text{ή} \qquad y = f(x)$$

Το x που εκφράζει το τυχαίο στοιχείο του συνόλου A λέγεται *ανεξάρτητη μεταβλητή* της f και το αντίστοιχο $y \in B$ λέγεται *εξαρτημένη μεταβλητή* ή *τιμή* της συνάρτησης f στο x.

Θα λέμε ““δίνεται η συνάρτηση $f\,:\,A \to B$”” και η λέξη συνάρτηση υπονοεί ότι η αντιστοιχία f είναι *μονοσήμαντη* του A στο $R(f) \subseteq$ B. Επιπλέον, στον ορισμό της συνάρτησης έχουμε ότι $D(f) = A$, $R(f) \subseteq B$.

Μια συνάρτηση f είναι γνωστή αν γνωρίζουμε:
• το πεδίο ορισμού της $D(f)$,
• το πεδίο τιμών της $R(f)$, και
• τον τύπο της f μέσω του οποίου το κάθε $x \in D(f)$ αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα $y \in R(f)$.

Οι συναρτήσεις $f : A \to B$ που θα ασχοληθούμε είναι τέτοιες ώστε τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, γι' αυτό ονομάζονται πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

Ορισμός 2.2.2. Αν A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε κάθε συνάρτηση f μέσω της οποίας κάθε πραγματικός αριθμός $a \in A$ απεικονίζεται στον πραγματικό αριθμό y, ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πραγματική μεταβλητή.

Παράδειγμα 2.2.3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x$ ή $y = 2x$.

Η συνάρτηση έχει ορισθεί πλήρως αφού $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}$ και γνωρίζουμε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 2.2.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 2$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι $D(f) = \mathbb{R}$, και το πεδίο τιμών $R(f) = [2, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.2.5. Είναι γνωστό ότι κάθε μή-αρνητικός πραγματικός έχει μια μόνο τετραγωνική ρίζα, ενώ οι αρνητικοί πραγματικοί δεν έχουν τετραγωνική ρίζα στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$. Αφού αναφερόμαστε σε συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής μπορούμε να καθορίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\} = [0, +\infty]$$

Παράδειγμα 2.2.6. Δίνεται η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ \\ x^2 & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού είναι $D(f) = \mathbb{R}$, και το πεδίο τιμών $R(f) = \mathbb{R}^+$.

Η ισότητα στο σύνολο των συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = |x|$ και $g(x) = \sqrt{x^2}$. Παρατηρούμε ότι $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ και

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{έχουμε} \qquad f(x) = g(x)$$

Επειδή οι f, g έχουν αυτές τις ιδιότητες λέγονται ίσες.

Ορισμός 2.2.7. Δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες και θα σημειώνουμε $f = g$ αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους έχουν ίσες τιμές.

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad D(f) = D(g) \quad \text{και} \quad f(x) = g(x) \quad \forall x \in D(f) = D(g)$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι αναγκαστικά $R(f) = R(g)$.

Αν τουλάχιστον μια από τις δυο συνθήκες δεν ισχύει, δηλαδή $D(f) \neq D(g)$ ή αν υπάρχει $x \in D(f) = D(g)$ για το οποίο $f(x) \neq g(x)$ οι f, g λέγονται διάφορες.

Αν $A \subseteq D(f) \cap D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε μπορούμε να πούμε ότι $f = g$ είναι ίσες στο A.

Παράδειγμα 2.2.8. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x}$$

Προφανώς $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ και για το πεδίο ορισμού της g έχουμε

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^3 + x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x(x^2+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Επιπλέον, $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ γιατί

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} = f(x)$$

άρα $f = g$

Παράδειγμα 2.2.9. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$$

$D(f) = \mathbb{R}, \quad D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Επειδή $D(f) \neq D(g)$ οι f, g είναι διάφορες, $f \neq g$. Όμως στο $A = \mathbb{R} - \{1\}$ έχουμε

$$g(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x = f(x).$$

Άρα $f = g$ στο A.

Παράδειγμα 2.2.10. ’Εστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x > 0 \\ \\ 2x+1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 3x & \text{αν} \quad x > 0 \\ \\ 2x+1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

έχουμε $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$, αλλά υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ όπου $f(x) \neq g(x)$. Για παράδειγμα $f(2) = 4$ και $g(2) = 6$, $f(2) \neq g(2)$, άρα $f \neq g$.

Παρατηρούμε ότι $f = g$ στο διάστημα $(-\infty, 0]$, γιατί $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$.

Η άλγεβρα των συναρτήσεων

Ορισμός 2.2.11. Ονομάζουμε άθροισμα των συναρτήσεων f, g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f+g$ και έχει τύπο $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$.

Ορισμός 2.2.12. Ονομάζουμε γινόμενο των συναρτήσεων f, g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f\,g$ και έχει τύπο $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$ και $D(f\,g) = D(f) \cap D(g)$.

Ορισμός 2.2.13. Ονομάζουμε γινόμενο πραγματικού αριθμού a επί την συνάρτηση f την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $a\,f$ και έχει τύπο $(a\,f)(x) = a\,f(x)$ και $D(a\,f) = D(f)$.
Αν $a = -1$ έχουμε την αντίθετη συνάρτηση της f δηλαδή την $-f(x)$.

Ορισμός 2.2.14. Ονομάζουμε διαφορά της συνάρτησης g από την συνάρτηση f την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f-g$ και έχει τύπο $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ και $D(f-g) = D(f) \cap D(g)$.

Ορισμός 2.2.15. Ονομάζουμε πηλίκο της συνάρτησης f δια της συνάρτησης g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $\dfrac{f}{g}$ και έχει τύπο $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ και $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$.

Παράδειγμα 2.2.16. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2\,x$, και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. Προφανώς $D(f) = \mathbb{R}$ και $D(g) = [-1, 1]$. Το κοινό πεδίο ορισμού είναι $D(f) \cap D(g) = [-1, 1]$.

$$
\begin{array}{lll}
a) & (f+g)(x) = 2\,x + \sqrt{1-x^2} & D(f+g) = [-1,1] \\
b) & (f-g)(x) = 2\,x - \sqrt{1-x^2} & D(f-g) = [-1,1] \\
c) & (f\,g)(x) = 2\,x\,\sqrt{1-x^2} & D(f\,g) = [-1,1] \\
d) & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2\,x}{\sqrt{1-x^2}} & D\left(\dfrac{f}{g}\right) = (-1,1)
\end{array}
$$

Παράδειγμα 2.2.17. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$, και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ με πεδίο ορισμού $D(f) = [2, +\infty)$ και $D(g) = [-1, 1]$ αντίστοιχα. Επειδή $D(f) \cap D(g) = \varnothing$ οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\,g$, f/g δεν ορίζονται.

2.2.1 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Αν η συνάρτηση f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

$$
\begin{array}{llll}
a) & f(x) = \sqrt{2\,|x-2| + x - 5} & b) & f(x) = \sqrt{|x+1| + |x-2| - 5} \\
c) & f(x) = \dfrac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x} & d) & f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{\sin x}
\end{array}
$$

Λύση
a) Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που είναι κάτω από την ρίζα θα πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας όρος που έχει απόλυτη τιμή και για αυτόν το όρο θα πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, 2\,|x-2| + x - 5 \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}, \quad \begin{matrix} x-2 \geq 0 \\ 2\,(x-2)+x-5 \geq 0 \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} x-2 < 0 \\ -2\,(x-2)+x-5 \geq 0 \end{matrix} \} \\
&= \{x \in \mathbb{R}, \quad \begin{matrix} x \geq 2 \\ 3\,x-9 \geq 0 \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} x < 2 \\ -x-1 \geq 0 \end{matrix} \} = \{x \in \mathbb{R}, \quad \begin{matrix} x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} x < 2 \\ x \leq -1 \end{matrix} \} \\
&= \{x \in \mathbb{R}\,, x \geq 3 \quad \text{ή} \quad x \leq -1\} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty).
\end{aligned}$$

b) Έχουμε παρόμοιες διαπιστώσεις όπως προηγουμένως αλλά όμως τώρα έχουμε δυο όρους με απόλυτα και έτσι θα πρέπει να διακρίνουμε 4 περιπτώσεις ανάλογα αν οι όροι μέσα στα απόλυτα είναι θετικοί ή μη θετικοί πραγματικοί:
1) $x-2 \geq 0$ και $x+1 \geq 0$ που συναληθεύουν $x \geq 2$.
2) $x-2 < 0$ και $x+1 > 0$ που συναληθεύουν για $-1 < x < 2$,
3) $x+1 \leq 0$ και $x-2 < 0$ που συναληθεύουν όταν $x \leq -1$ και
4) $x-2 > 0$ και $x+1 < 0$ η οποία δεν ικανοποιείται για κανένα x, οπότε έχουμε μόνο τις 3 προ-ηγούμενες περιπτώσεις.

1) Αν $x \geq 2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1| + |x-2| - 5 \geq 0 \Rightarrow x+1+x-2-5 \geq 0 \Rightarrow 2\,x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$$

που συναληθεύουν για $x \geq 3$.
2) Αν $-1 < x < 2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1| + |x-2| - 5 \geq 0 \Rightarrow x+1-(x-2)-5 \geq 0 \Rightarrow 0 > 2$$

αδύνατον άρα δεν υπάρχουν x που να είναι στο πεδίο ορισμού στο διάστημα $(-1, 2)$
3) Αν $x \leq -1$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1| + |x-2| - 5 \geq 0 \Rightarrow -(x+1)-(x-2)-5 \geq 0 \Rightarrow 2\,x \leq 4 \Rightarrow x \leq -2$$

που συναληθεύουν για $x \leq -2$.

Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 3 \quad \text{ή} \quad x \leq -2\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$$

c) Η συνάρτηση

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ορίζεται σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός από αυτά που μηδενίζεται η συνάρτηση $\cos x$, δηλαδή για $x \neq k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε για το πεδίο ορισμού της f θα πρέπει επιπλέον να μην μηδενίζεται και ο παρανομαστής

$1-\tan^2 x$. Ο παρανομαστής μηδενίζεται όταν $\tan x = \pm 1$ ή ισοδύναμα όταν $\cos x = \pm \sin x$. Το τελευταίο συμβαίνει όταν η γωνία x είναι ± 45 μοίρες ή $x = \pm\pi/4$ και προσαυξημένη κατά ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή όταν $x = k\pi \pm \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Άρα συνολικά έχουμε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq k\pi + \pi/2 \quad \text{και} \quad x \neq k\pi \pm \pi/4 \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Θα πρέπει και οι δυο ποσότητες που είναι κάτω από την ρίζα να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad 1 - x^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad \sin x \geq 0\}$$

Η $\sin x$ είναι θετικός αριθμός όταν η γωνία x είναι ανάμεσα σε 0 και π καθώς και προσαυξημένη με πλήρεις περιστροφές κατά γωνία 2π, δηλαδή $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Όμως τα διαστήματα $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ για $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο με το διάστημα $[-1, 1]$. Από την άλλη, για $k = 0$ το διάστημα $[0, \pi]$ έχει τομή (κοινά σημεία) με το $[-1, 1]$ το διάστημα $[0, 1]$.Άρα

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2+x+1}$$

Λύση

'Εχουμε μια ρητή συνάρτηση όπου ο παρανομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών της f έχουμε:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad y = \frac{x^2+4}{x^2+x+1}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad yx^2 + yx + y = x^2 + 4\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad (y-1)x^2 + yx + (y-4) = 0 \ (*)\} \end{aligned}$$

Αν $y = 1$ το τριώνυμο $(*)$ γίνεται $x = 3$, άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η f να έχει τιμή 1, συνεπώς $1 \in R(f)$.

Για $y \neq 1$, το τριώνυμο $(*)$ ως προς x έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$. ή ισοδύναμα

$$y^2 - 4(y-1)(y-4) \geq 0 \Rightarrow 3y^2 - 20y + 16 \leq 0 \Rightarrow \frac{10-2\sqrt{13}}{3} \leq y \leq \frac{10+2\sqrt{13}}{3}$$

Επειδή $1 \in [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$ έχουμε τελικά ότι

$$R(f) = [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$$

Άσκηση 3. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο τιμών της $f(x)$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$$

είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4},\ 1]$.

Λύση

Έχουμε πρώτα απ'όλα ότι $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad y = \frac{x+\lambda}{x^2+1}\} = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad yx^2 - x + (y-\lambda) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad 1 - 4y(y-\lambda) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} \leq y \leq \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\} \\ &= \left[\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\right] \end{aligned}$$

Για να είναι $R(f) = [-1/4, 1]$, αρκεί και πρέπει να υπάρχει λ τέτοιο που

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = \sqrt{\lambda^2+1} \\ \\ 2 - \lambda = \sqrt{\lambda^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = 2 - \lambda \\ \\ (2-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \\ \\ -\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{3}{4} \\ \\ \frac{25}{16} = \frac{25}{16} \\ \\ -\frac{1}{2} \leq \lambda = \frac{3}{4} \leq 2 \end{array}\right\}$$

Άρα για $\lambda = \frac{3}{4}$ η f έχει $R(f) = [-\frac{1}{4}, 1]$

Προσοχή!!! Είναι λάθος να απαιτήσουμε $-\frac{1}{4} \leq \frac{x+\lambda}{x^2+1} \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γιατί ναι μεν οι τιμές της f θα είναι στο $[-\frac{1}{4}, 1]$ όμως από μόνο της η απαίτηση αυτή δεν είναι αρκετή να μας εξασφαλίσει ότι το πεδίο τιμών της f είναι όλο το διάστημα $[-\frac{1}{4}, 1]$.

Άσκηση 4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

Να δειχθεί ότι $f \neq g$.

Λύση

Για να ισχύει $f = g$ θα πρέπει $D(f) = D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D(f) = D(g)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \quad \frac{x}{x-1} \geq 0 \quad \text{και} \quad x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad x(x-1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \quad (x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1) \quad \text{και} \quad x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x > 1\} \\ &= (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \quad x > 1\} = (1, +\infty)$. Αφού $D(f) \neq D(g)$, τότε $f \neq g$.

Παρατήρηση για επιπλέον ανάλυση: Παρατηρούμε ότι υπάρχει κοινό πεδίο ορισμού των f, g, το διάστημα $A = D(f) \cap D(g) = (1, +\infty)$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x > 0$ και $x > 1$, οπότε

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = g(x) \qquad \forall x \in A$$

Οπότε αν περιορίσουμε τις τιμές του x στο διάστημα A έχουμε ότι $f = g$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άσκηση 5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού για κάθε μια από τις συναρτήσεις f, g, f/g, g/f και $f + g$.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τα πεδία ορισμού των f, g καθώς και το κοινό πεδίο ορισμού τους. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 4 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2] \\ D(g) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 0\} = [0, +\infty). \end{aligned}$$

$$\mathrm{A} = D(f) \cap D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \text{και} \quad x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 2\} = [0, 2]$$

$$\begin{aligned} D(f + g) &= A = [-2, 2] \\ D(f/g) &= A - \{x \in \mathbb{R} : \quad g(x) = 0\} = A - \{x \in \mathbb{R} : \quad x = 0\} = [0, 2] - \{0\} = (0, 2]. \\ D(g/f) &= A - \{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = 0\} = A - \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 = 4\} = [0, 2] - \{-2, 2\} = [0, 2). \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{2\alpha^2 x + \alpha}{x + 1 - \alpha}, \qquad g(x) = \frac{(3\alpha - 1)x + \alpha}{x + \alpha}.$$

Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός α έτσι ώστε οι συναρτήσεις f, g να είναι ίσες.

Λύση

Αρχικά θα πρέπει $D(f) = D(g)$. Έχουμε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq \alpha - 1\} \qquad \text{και} \qquad D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq -\alpha\}$$

Για να είναι $D(f) = D(g)$ πρέπει και αρκεί $\alpha - 1 = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1/2$. Για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε

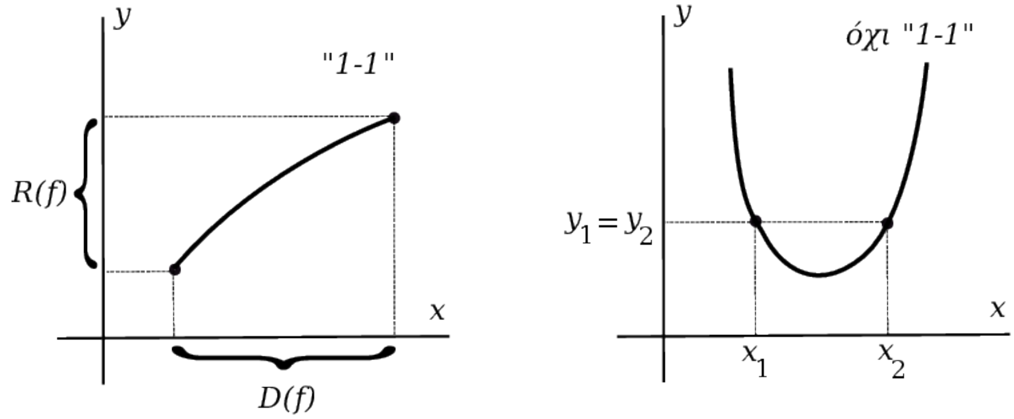
$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2x+1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{(\frac{3}{2} - 1)x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

Έτσι για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $D(f) = D(g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, συνεπώς για $\alpha = \frac{1}{2}$ οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

2.3 Η αντίστροφη μιας συνάρτησης

Ορισμός 2.3.1. Μια συνάρτηση f λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή πιο απλά "$1-1$" αν για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ή ισοδύναμα αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.



Σχήμα 2.3: Παράδειγμα δυο συναρτήσεων από τις οποίες η συνάρτηση στα αριστερά είναι "$1-1$" ενώ η συνάρτηση στα δεξιά δεν είναι "$1-1$".

Ορισμός 2.3.2. Ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση μιας "$1-1$" συνάρτησης f, την συνάρτηση που συμβολίζουμε με f^{-1} και η οποία αντιστοιχεί το κάθε $y \in R(f)$ στο μοναδικό $x \in D(f)$ για το οποίο ισχύει $y = f(x)$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $D(f^{-1}) = R(f)$, $R(f^{-1}) = D(f)$, $(f^{-1})^{-1} = f$ και ότι η f^{-1} δεν ορίζεται αν η f δεν είναι "$1-1$". Συμβολικά γράφουμε

$$x \overset{f}{\rightarrow} y \qquad , \qquad y \overset{f^{-1}}{\rightarrow} x$$

Προσοχή!!! Δεν πρέπει να συγχέουμε την συνάρτηση f^{-1} με την συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$.

Εύρεση τύπου της αντίστροφης συνάρτησης

Αν η f είναι "$1-1$" τότε για κάθε $y \in R(f)$ θα υπάρχει ένα και μόνο ένα $x \in D(f)$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Το x αυτό προσδιορίζεται λύνοντας τον τύπο της f ως προς x, απαιτώντας το $x \in D(f)$.

Για παράδειγμα, για την $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ έχουμε:
α) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty)$.
β) Η f είναι "$1-1$" γιατί αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \sqrt{x_1 - 2} = 1 + \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x_1 - 2})^2 = (\sqrt{x_2 - 2})^2 \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

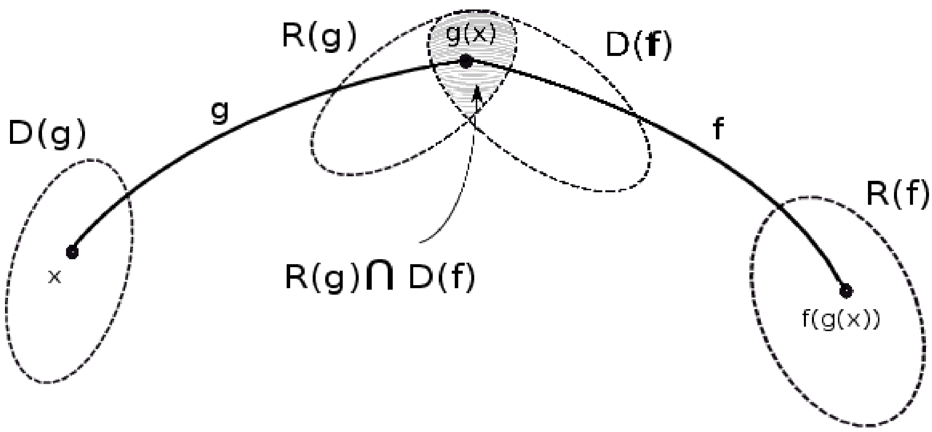
συνεπώς η f^{-1} υπάρχει.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + \sqrt{x-2} \\ \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = y - 1 \\ \\ x - 2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 2 = (y-1)^2 \\ \\ y - 1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y^2 - 2y + 3 \\ \\ y \geq 1 \end{array}\right\}$$

Αντιστρέφοντας τον ρόλο της εξαρτημένης με την ανεξάρτητη μεταβλητή $x \leftrightarrow y$ παίρνουμε $y = x^2 + 2x + 3$ με $x \geq 1$ ή αλλιώς $f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 3$, με $D(f^{-1}) = [1, +\infty)$.

2.4 Σύνθεση συναρτήσεων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο συναρτήσεις τις f, g. Αν το πεδίο τιμών της g έχει τομή με το πεδίο ορισμού της f δηλαδή $R(g) \cap D(f) \neq \emptyset$ τότε ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ που λέγεται η σύνθεση της g με την f, η οποία έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ και πεδίο ορισμού $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : \quad g(x) \in D(f)\}$ και τιμές στο $R(f)$.



Σχήμα 2.4: Η σύνθεση $f \circ g$ γενικά ορίζεται όταν $R(g) \cap D(f) \neq \emptyset$.

Στην ειδική περίπτωση που το πεδίο τιμών της g είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή $R(g) \subset D(f)$, η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται και το πεδίο ορισμού της είναι το $D(g)$.

Όταν $R(g) \cap D(f) = \emptyset$ τότε η $f \circ g$ δεν ορίζεται γιατί δεν υπάρχει $x \in D(g)$ για το οποίο η τιμή $g(x)$ να ανήκει στο $D(f)$ κι έτσι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε την $f(g(x))$.

Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ αν ορίζονται δεν πρέπει να συγχέονται μεταξύ τους γιατί είναι γενικά διαφορετικές (άνισες) συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [0, +\infty)$, $D(g) = \mathbb{R}$, $R(g) = [-1, 1]$. Επειδή $R(g) \cap D(f) = [-1, 1] \neq \emptyset$ η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται και έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$.

Από την άλλη, επειδή $R(f) \cap D(g) = [0, +\infty] \neq \emptyset$ ορίζεται και η συνάρτηση $g \circ f$ η οποία έχει τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$.

2.5 Μονοτονία συναρτήσεων

Ορισμός 2.5.1. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \;↥ \quad \text{στο } A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ορισμός 2.5.2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \;↧ \quad \text{στο } A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Ορισμός 2.5.3. Μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \uparrow \quad \text{στο } A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

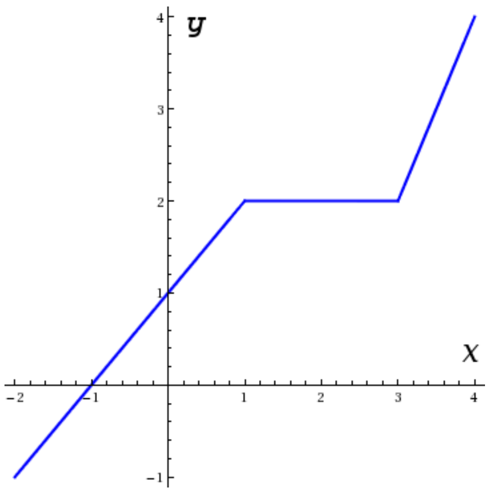
Ορισμός 2.5.4. Μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \downarrow \quad \text{στο } A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Παράδειγμα 2.5.5.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x > 1 \\ 2 & \text{αν} \quad \leq x \leq 3 \\ 2x-4 & \text{αν} \quad x > 3 \end{cases}$$

Από την γραφική παράσταση της $f(x)$ παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(3, +\infty)$, ενώ στο διάστημα $[1, 3]$ έχει σταθερή τιμή. Πράγματι



Σχήμα 2.5: Η γραφική παράσταση της $f(x)$.

α) Αν $x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 1) - (x_2 + 1) = x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
β) Αν $x_1 < 1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 < 2 \Rightarrow f(x_1) < 2$ και $f(x_2) = 2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
γ) Αν $1 < x_1 < 3 < x_2$ τότε $x_1 < 1 \Rightarrow x_1 + 1 < 2 \Rightarrow f(x_1) < 2$ και $x_2 > 3 \Rightarrow 2x_2 > 6 \Rightarrow 2x_2 - 4 > 2$, άρα $f(x_1) < 2 < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
δ) Αν $1 \leq x_1 \leq 3 < x_2$, τότε $f(x_1) = 2$ και $2x_2 > 6 \Rightarrow 2x - 4 > 2 \Rightarrow f(x_2) > 2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
ε) Αν $3 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 - 4) - (2x_2 - 4) = 2(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
στ) Αν $1 \leq x_1 < x_2 \leq 3 \Rightarrow f(x_1) = 2 = f(x_2)$.

Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι αύξουσα ($\uparrow$) σε όλο το $\mathbb{R}$.

2.6 Ακρότατα συνάρτησης

Ορισμός 2.6.1. Ονομάζουμε περιοχή $\varpi(x_0)$ του πραγματικού αριθμού x_0 κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, για παράδειγμα $\varpi(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Ορισμός 2.6.2. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στο $x_0 \in D(f)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αν και μόνο αν υπάρχει μια τουλάχιστον περιοχή $\varpi(x_0)$ του x_0 έτσι ώστε για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται η τοπικά μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

Ορισμός 2.6.3. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στο $x_0 \in D(f)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο αν και μόνο αν υπάρχει μια τουλάχιστον περιοχή $\varpi(x_0)$ του x_0 έτσι ώστε για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται η τοπικά ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

Αν οι παραπάνω ορισμοί ισχύουν για κάθε $x \in D(f)$ κι όχι μόνο σε μια περιοχή του x_0 λέμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (ολικό ελάχιστο), αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.6.4. Για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ γνωρίζουμε ότι $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$ για κάθε $x \in D(f)\mathbb{R}$. Άρα η f παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή 1 και ολικά ελάχιστη τιμή -1. Τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ που συμβαίνει αυτό είναι

$$\sin x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Παράδειγμα 2.6.5. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, όπου $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών της f έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad y = \frac{2\,x}{x^2+1}\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad y\,x^2 - 2\,x + y = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad 4 - 4\,y^2 \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad -1 \leq y \leq 1\} = [-1,\ 1] \end{aligned}$$

Συνεπώς $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι τιμές αυτές επιτυγχάνονται όταν η διακρίνουσα του τριωνύμου $y\,x^2 - 2\,x + y$ είναι μηδέν $\Delta = 0$. Τότε η ρίζα του τριωνύμου $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ είναι

$$x = \frac{-b}{4\,\alpha} = \frac{2}{2\,y} = \frac{1}{y}$$

Άρα $y = 1$ με $x = 1$ και $y = -1$ με $x = -1$.

2.7 Φράγματα

Ορισμός 2.7.1. α) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη άνω άν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M έτσι ώστε $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in D(f)$.

β) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη κάτω άν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός N έτσι ώστε $N \leq f(x)$, για κάθε $x \in D(f)$.

γ) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη άν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί M, N έτσι ώστε $N \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in D(f)$.

Το M λέγεται ένα άνω φράγμα της f και το N ένα κάτω φράγμα της f. Αν η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (ελάχιστο) τότε η ολικά μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της f είναι και ένα άνω (κάτω) φράγμα της f. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μια συνάρτηση που είναι φραγμένη είναι και απόλυτα φραγμένη, δηλαδή $|f(x)| \leq K$, για κάθε $x \in D(f)$, και το αντίστροφο. Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί αυτό αφού αν $N \leq f(x) \leq M$, αν πάρουμε $K = \max\{|M|, |N|\}$, τότε $|f(x)| \leq K$. Το αντίστροφο είναι προφανές αφού $|f(x)| \leq K \Rightarrow -K \leq f(x) \leq K$.

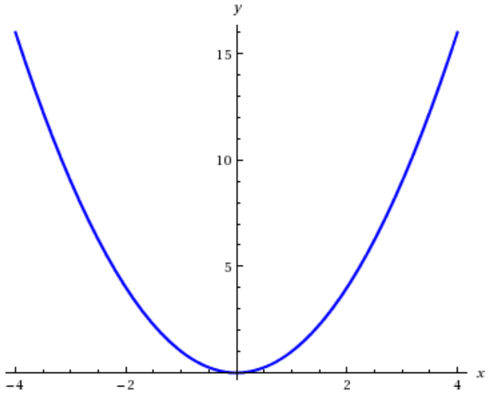
2.8 Χρήσιμες κατηγορίες συναρτήσεων

Ορισμός 2.8.1. Μια συνάρτηση f λέγεται άρτια αν και μόνο αν $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

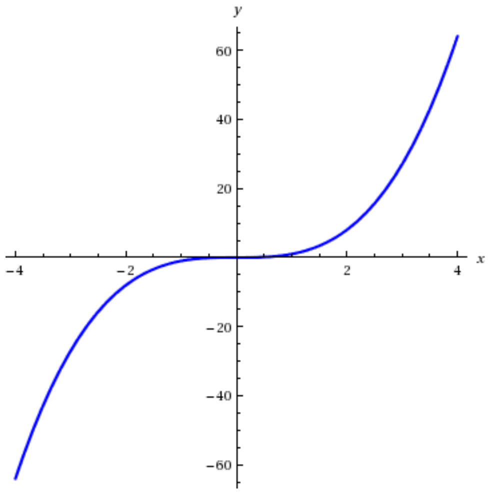
Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y.

Ορισμός 2.8.2. Μια συνάρτηση f λέγεται περιττή αν και μόνο αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή $(0,0)$ των αξόνων.



Σχήμα 2.6: Η γραφική παράσταση της άρτιας (γαιτί?) συνάρτησης $f(x) = x^2$.



Σχήμα 2.7: Η γραφική παράσταση της περιττής (γιατί?) συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Ορισμός 2.8.3. Μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική αν και μόνο υπάρχει πραγματικός αριθμός $\omega \neq 0$ και ανεξάρτητος από το x έτσι ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x + \omega \in D(f) \quad \Rightarrow f(x + \omega) = f(x).$$

Η γραφική παράσταση κάθε περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται κάθε περίοδο ω.

Ορισμός 2.8.4. Ονομάζουμε πολυωνυμική συνάρτηση την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ και τύπο

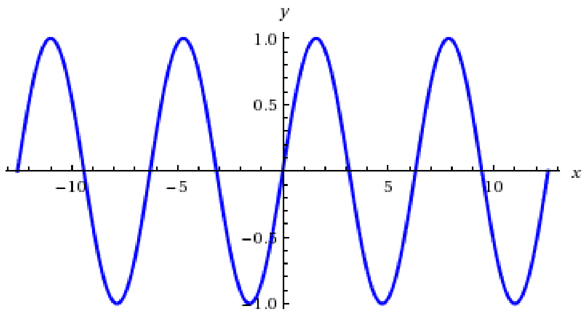
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

όπου $a_0, a_1, \cdots a_n$ πραγματικοί αριθμοί και n μη αρνητικός ακέραιος.

Ορισμός 2.8.5. Αν $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ πολυωνυμικές συναρτήσεις τότε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

πεδίο ορισμού $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad B(x) \neq 0\}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$, λέγεται ρητή συνάρτηση.



Σχήμα 2.8: Η γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \sin x$ με μικρότερη περίοδο $\omega = 2\pi$.

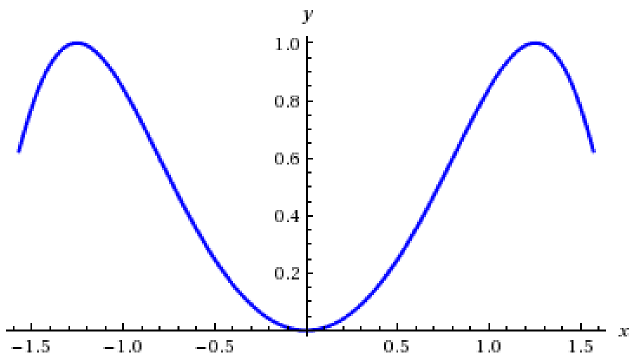
2.9 Βασικά Θεωρήματα

Πρόταση 2.9.1. *Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη τότε η f είναι "$1-1$" και συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} η οποία έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.*

Πρόταση 2.9.2. *Δίνονται οι γνήσια μονότονες συναρτήσεις f, g κι έστω ότι ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια αύξουσα, ενώ αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια φθίνουσα.*

Παράδειγμα 2.9.3. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2)$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$. Έστω $h(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, οπότε $f = g \circ h$.

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$R(h)$	$\frac{\pi^2}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi^2}{4}$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	



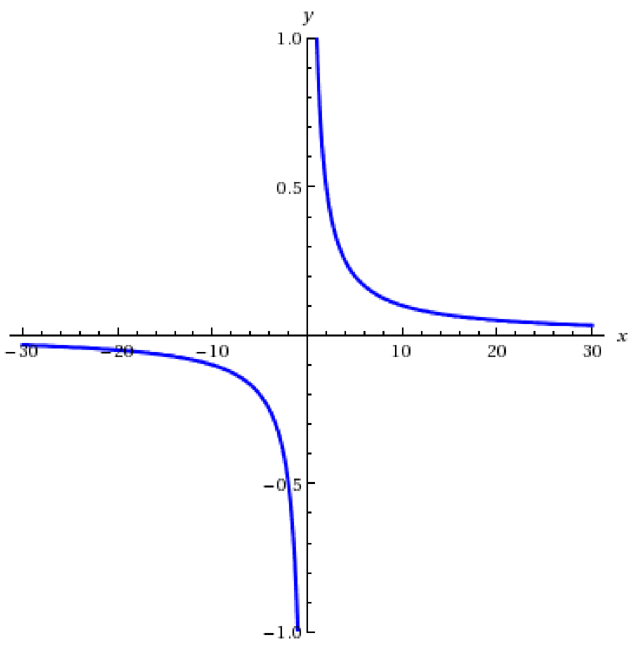
Σχήμα 2.9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin(x^2)$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$.

Κεφάλαιο 3

Όρια συναρτήσεων

3.1 Εισαγωγικές έννοιες.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ όπου $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$. Είναι φυσικό να αναζητήσουμε την τιμή της $f(x)$ όταν το x παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές



Σχήμα 3.1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1/x$.

τιμές ή αλλιώς όπως θα λέμε η ανεξάρτητη μεταβλητή x τείνει στο $+\infty$. Είναι προφανές ότι αν στο κλάσμα $1/x$ ο παρανομαστής γίνεται όσο μεγάλος θετικός αριθμός θέλουμε ($x \to +\infty$), το κλάσμα $1/x$ γίνεται αντίστοιχα όσο μικρός θετικός αριθμός θέλουμε ($y \to 0^+$), δηλαδή η τιμή της $f(x)$ τείνει να γίνει 0 από θετικές τιμές.

Επειδή η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση, το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων κι έχουμε αντίστοιχες διαπιστώσεις όταν το x παίρνει πολύ μεγάλες αρνητικές τιμές ($x \to -\infty$). Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της $f(x)$ γίνεται πολύ κοντά στο 0 από αρνητικές τιμές.

Είναι τώρα φυσικό να αναζητήσουμε την τιμή της συνάρτησης όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 0 από αριστερά ($x < 0$) και δεξιά ($x > 0$), γνωρίζοντας βέβαια ότι $0 \notin D(f)$. Με παρόμοιες διαπιστώσεις όπως προηγουμένως και από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι όταν το $x \to 0^+$ τότε $f(x) \to +\infty$, και αντίστοιχα όταν το $x \to 0^-$, τότε $f(x) \to -\infty$.

Από την παραπάνω ανάλυση ανακύπτει το αρχικό ερώτημα για ποιά ""σημεία"" x μπορούμε να αναζητούμε πως συμπεριφέρονται οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$.

Ορισμός 3.1.1. Ένα σημείο x_0 ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της** $f(x)$ αν και μόνο αν σε κάθε περιοχή $\varpi(x_0)$ του x_0, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του $D(f)$ διαφορετικό από το x_0 [1], δηλαδή $\varpi(x_0) \cap D(f) - \{x_0\} \neq \emptyset$.

q

Για παράδειγμα, αφού η συνάρτηση $f(x) = 1/x$, ορίζεται στο διάστημα $(0, +\infty)$ το οποίο είναι μια περιοχή του $+\infty$, τότε το ""σημείο"" $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$, και έχει νόημα να αναζητούμε τις οριακές τιμές της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$.

Το σημείο συσσώρευσης του $D(f)$ μπορεί να ανήκει στο $D(f)$, αλλά μπορεί να μήν ανήκει στο $D(f)$. Για παράδειγμα το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$ της συνάρτησης $f(x) = 1/x$, αλλά δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $D(f)$.

Για να μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχει η οριακή τιμή συνάρτησης $f(x)$ καθώς $x \to x_0$, πρέπει και αρκεί το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$, κι όχι απαραίτητα σημείο του $D(f)$. Με πιό απλά λόγια, όταν αναζητάμε τις οριακές τιμές μιας συνάρτησης $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0 μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει με τις τιμές της $f(x)$ σε κάθε γειτονιά του x_0, αλλά όχι ακριβώς πάνω στο x_0, το οποίο σημείο x_0 ενδεχομένως να μην ανήκει καν στο πεδίο ορισμού $D(f)$ της $f(x)$.

Ορισμός 3.1.2. Ένα σημείο x_0, το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$ λέγεται **μεμονωμένο σημείο του** $D(f)$. Δηλαδή, ένα σημείο x_0 λέγεται μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ της $f(x)$ αν και μόνο αν (i) $x_0 \in D(f)$ και (ii) υπάρχει περιοχή του x_0, έστω $\varpi(x_0)$, τέτοια ώστε το μοναδικό κοινό σημείο της $\varpi(x_0)$ με το πεδίο ορισμού $D(f)$ να είναι το x_0, δηλαδή $\varpi(x_0) \cap D(f) = \{x_0\}$. Σύμφωνα με τον ορισμό ένα μεμονωμένο σημείο του $D(f)$, αναγκαστικά ανήκει στο $D(f)$.

3.2 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $\to +\infty$

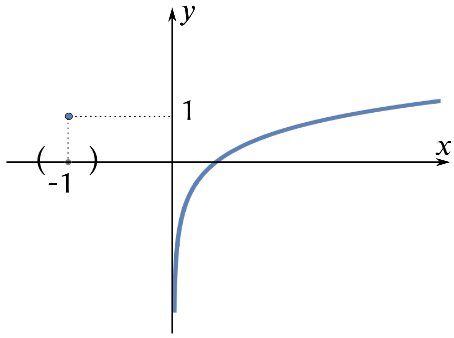
Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ όπου $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) = \mathbb{R} - \{-3\}$. Ορίζεται λοιπόν το διάστημα $(-3, +\infty)$ οπότε μπορούμε ν' αναζητήσουμε που τείνουν

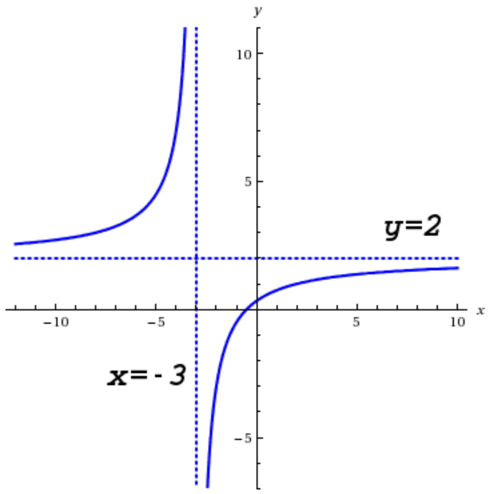
[1] άρα θα περιέχει άπειρα σημεία του $D(f)$, αφού αυτό συμβαίνει για κάθε περιοχή $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, με $\varepsilon \in \mathbb{R}$,

Για παράδειγμα, το σημείο $x_0 = -1$ είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της $f(x)$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \ln x\,, & \text{αν} \quad x > 0\,, \\ 1\,, & \text{αν} \quad x = -1\,, \end{cases}$$

αφού $-1 \in D(f)$ και υπάρχει περιοχή του -1, (για παράδειγμα το ανοικτό διάστημα $I = (-1-\varepsilon, -1+\varepsilon)$, με κάθε $0 < \varepsilon < 1$) όπου το μοναδικό κοινό σημείο του διαστήματος I με το πεδίο ορισμού $D(f)$ της $f(x)$ είναι το σημείο $x_0 = -1$.





Σχήμα 3.2: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

οι τιμές της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$. Έχουμε

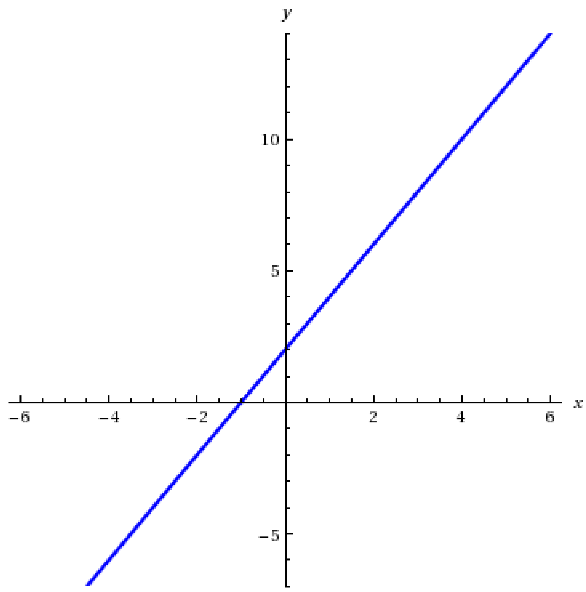
$$f(x) = \frac{2\,x+1}{x+3} = \frac{x(2+1/x)}{x(1+3/x)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

Ορισμός 3.2.1. Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός L τέτοιος που οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ να είναι αυθαίρετα κοντά στην τιμή L, καθώς το x παίρνει αυθαίρετα θετικά μεγάλες τιμές ($x \to +\infty$), θα λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι ο αριθμός L, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση $f(x) = 3\,x + 2$ όπου $D(f) = \mathbb{R}$. Άρα μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ καθώς το x απειρίζεται θετικά. Είναι προφανές ότι όταν το $x \to +\infty$, τότε η $f(x) \to +\infty$.

Ορισμός 3.2.2. Θα λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $+\infty$ ($-\infty$) καθώς το $x \to +\infty$ αν και μόνο αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα θετικά (αρνητικά) μεγάλες όταν το $x \to +\infty$, και θα



Σχήμα 3.3: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3\,x + 2$.

γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} = \pm\infty\,.$$

Παράδειγμα 3.2.3. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{3\,x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(1, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{3\,x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2(3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3 + 0 + 0}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Παράδειγμα 3.2.4. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 4}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(2, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 4} = \frac{x\,(1 + \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \frac{1}{x}\,\frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,\frac{1 + 0}{1 - 0} = 0\,\cdot 1 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Παράδειγμα 3.2.5. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{2\,x^2+1}{x+1}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(-1, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{2\,x^2+1}{x+1} = \frac{x^2\,(2+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = x\,\frac{2+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,\frac{2+0}{1+0} = +\infty\ \cdot 2 = +\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Παράδειγμα 3.2.6. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ 2{+}x{-}x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x^2{-}x{-}2 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}\ :\ -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$.

Άρα το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει γιατί υπάρχει μια περιοχή του $+\infty$ στη οποία η $f(x)$ δεν ορίζεται, π.χ. η $(2, +\infty)$.

Παράδειγμα 3.2.7. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \sin x$$

$D(f) = \mathbb{R}$, άρα μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Ας ““πάμε”” στο θετικό άπειρο με δυο διαφορετικούς τρόπους:

$$a) \quad x = 2\,n\,\pi \qquad b) \quad x' = 2\,n\,\pi + \pi/2\,, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών μπορούμε να συμπεράνουμε εύκολα ότι καθώς το n διατρέχει τους φυσικούς αριθμούς, οι πραγματικοί αριθμοί x και x' μας οδηγούν σε οποιονδήποτε μεγάλο θετικό πραγματικό θέλουμε, δηλαδή $x \to +\infty$ και $x' \to +\infty$. Όμως:

$$\sin x = \sin(2\,n\,\pi) = 0\,, \qquad \sin x' = \sin(2\,n\,\pi + \pi/2) = 1$$

Συνεπώς το $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ δεν υπάρχει, αφού αν υπήρχε θα έπρεπε $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = \lim\limits_{x'\to+\infty} \sin x'$.

3.3 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to -\infty$

Ορισμός 3.3.1. Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός L στον οποίο η $f(x)$ παίρνει τιμές αυθαίρετα κοντά στον L, καθώς το $x \to -\infty$, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το L και γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ορισμός 3.3.2. Αν η $f(x)$ παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές (αρνητικές) τιμές καθώς το $x \to -\infty$, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $+\infty$ ($-\infty$ αντίστοιχα) και γράφουμε

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$$

Παρατήρηση 3.3.3. Για να μπορούμε να μιλάμε για το όριο της $f(x)$ όταν το $x \to -\infty$, αρκεί η f να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$.

Παράδειγμα 3.3.4. Έστω $f(x) = 2\,x^2 + 3\,x + 1$, με πεδίο ορισμού $D(f) = \mathbb{R}$. Συνεπώς μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = x^2\,(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} (+\infty)\,(1 + 0 + 0) = +\infty$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} = +\infty$.

Παράδειγμα 3.3.5. Έστω $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x+2}$, με πεδίο ορισμού $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Αφού η f ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, -2)$ μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Σε αυτό το διάστημα για πολύ μεγάλα αρνητικά x έχουμε ότι $x - 1 < 0$, άρα $|x - 1| = -(x - 1)$ και διάφορα από το -2, $x \neq -2$, οπότε

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2} = \frac{-(x-1)}{x+2} = \frac{x\,(-1+1/x)}{x\,(1+2/x)} = \frac{-1+1/x}{1+2/x} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{-1+0}{1+0} = -1$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} = -1$.

3.4 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ κι ας αναζητήσουμε που τείνουν οι τιμές της f καθώς το x πλησιάζει το σημείο 3, που είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \overset{x\to 3}{\longrightarrow} \frac{3}{2} \qquad \text{άρα} \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = \frac{3}{2}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 2 \end{cases}$$

κι ας αναζητήσουμε το όριο της f καθώς το $x \to 2$. Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της f στην περιοχή του $x = 2$ κι όχι τι γίνεται με την τιμή της συνάρτησης ακριβώς για $x = 2$. Δηλαδή μας ενδιαφέρει τι τιμές παίρνει η f καθώς το $x \to 2$ σε ένα διάστημα της μορφής $(a, 2) \cup (2, b)$, με $a < 2 < b$. Σημειώνουμε ότι μπορεί η $f(x)$ να μην ορίζεται για $x = 2$ αλλά το $\lim_{x\to 2} f(x)$ να υπάρχει! Οπότε η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι ότι $\lim_{x\to 2} = 4$.

Ορισμός 3.4.1. Θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο πραγματικός αριθμός L καθώς η αναξάρτητη μεταβλητή x τείνει στον πραγματικό αριθμό x_0 αν και μόνο αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα κοντινές στο L για κάθε περιοχή του x_0 αλλά με $x \neq x_0$.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο της f καθώς $x \to 2$.

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Σε κάθε περιοχή $(a, 2) \cup (2, b)$ έχουμε ότι $(x-2)^2 \to 0$, κι επειδή $(x-2)^2 > 0$ έχουμε $\dfrac{1}{(x-2)^2} \to +\infty$.

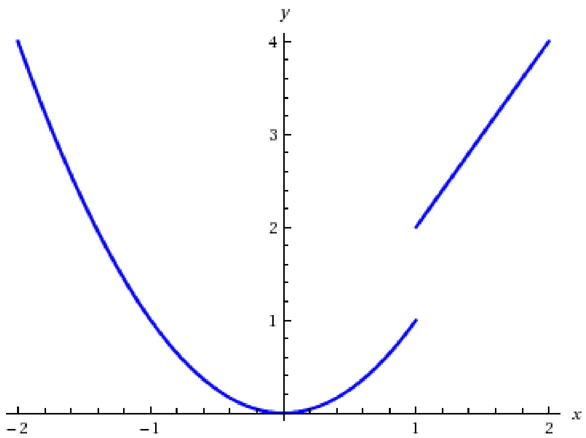
Ορισμός 3.4.2. Θα λέμε ότι το όριο της f είναι το $+\infty$, $(-\infty)$ καθώς το $x \to x_0$ αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα μεγάλες θετικά (αρνητικά) καθώς το x στο πεδίο ορισμού $D(f)$ πλησιάζει το x_0 και αυτό συμβαίνει σε κάθε περιοχή του x_0 με $x \neq x_0$.

3.4.1 Πλευρικά όρια

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \leq 1 \\ 2x & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

με $D(f) = \mathbb{R}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο σημείο 1. Μπορούμε να πλησιάσουμε το $x = 1$ από δυο περιοχές την $(a, 1)$ και την $(1, b)$ όπου $a < 1 < b$. Αν πλησιάσουμε το 1 με $x > 1$ λέμε ότι έχουμε το της f από δεξιά του 1, $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ κι αν $x < 1$ λέμε ότι έχουμε το όριο της f από αριστερά του 1, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$



Σχήμα 3.4: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

Ορισμός 3.4.3. Θα λέμε ότι η f έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ (ή $\pm\infty$) καθώς το x τείνει στο x_0 από δεξιά αν οι τιμές της f γίνονται αυθαίρετα κοντά στο L (ή θετικά-αρνητικά μεγάλες) καθώς το x

πλησιάζει αυθαίρετα κοντά το x_0 σε κάθε περιοχή με $x > x_0$. Το όριο αυτό το σημειώνουμε με

$$\lim_{x\to x_0^+} = L \ \text{(ή } \pm\infty)$$

Ορισμός 3.4.4. Θα λέμε ότι η f έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ (ή $\pm\infty$) καθώς το x τείνει στο x_0 από αριστερά αν οι τιμές της f γίνονται αυθαίρετα κοντά στο L (ή θετικά-αρνητικά μεγάλες) καθώς το x πλησιάζει αυθαίρετα κοντά το x_0 σε κάθε περιοχή με $x < x_0$. Το όριο αυτό το σημειώνουμε με

$$\lim_{x\to x_0^-} = L \ \text{(ή } \pm\infty)$$

Τα όρια που ορίσαμε προηγουμένως λέγονται **πλευρικά όρια** της $f(x)$.

Παρατήρηση 3.4.5. Αν η f ορίζεται στο διάστημα (a, x_0) αλλά όχι στο (x_0, b) τότε $x < x_0$ οπότε έχει νόημα να αναζητούμε μόνο το όριο $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Για παράδειγμα, $f(x) = \sqrt{1-x}$ με $D(f) = (-\infty, 1)$ και άρα

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Παρατήρηση 3.4.6. Αν η f ορίζεται σε διάστημα $(x, x_0) \cup (x_0, b)$ κι έχουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Παρατήρηση 3.4.7. Αν κάποιο πλευρικό όριο έχει νόημα αλλά δεν υπάρχει τότε είναι φανερό ότι δεν υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Παρατήρηση 3.4.8. Έστω ότι η f ορίζεται σε διάστημα $(x, x_0) \cup (x_0, b)$. Τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ είναι ισοδύναμο με το να συμβαίνει $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$.

Παράδειγμα 3.4.9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$. Επειδή το $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο αριστερά και δεξιά του $x = 1$.

Στην περιοχή $(1, +\infty)$, τότε $x - 1 > 0$ και $x + 3 > 0$, άρα

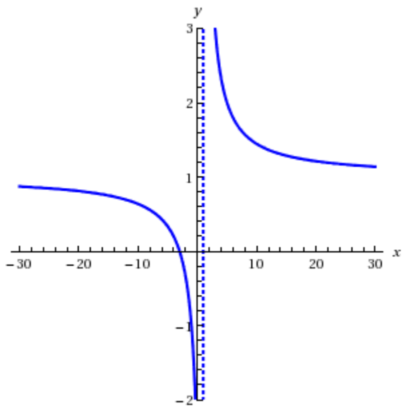
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$$

Σε μια περιοχή $(1-\varepsilon, 1)$ με ε πολύ μικρό τότε $x - 1 < 0$ και $x + 3 > 0$ άρα

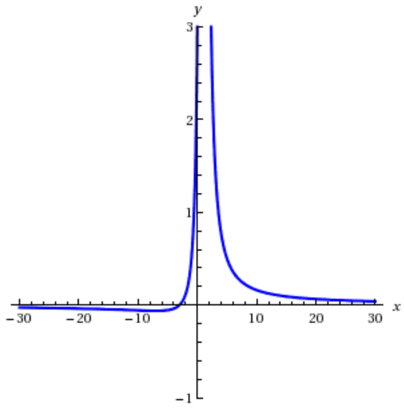
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty$$

Αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.4.10. Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$. Επειδή το $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο αριστερά και δεξιά του $x = 1$.



Σχήμα 3.5: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του παραδείγματος 3.23.



Σχήμα 3.6: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του παραδείγματος 3.24.

Σε αυτή την περίπτωση όμως $(x-1)^2 > 0$ και $x+3 > 0$ σε κάθε περιοχή κοντά στο 1 αλλά με $x \neq 1$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^2} = +\infty$$

και αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Παράδειγμα 3.4.11. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$.

3.5 Ιδιότητες ορίων

Επειδή οι παρακάτω ιδιότητες ορίων ισχύουν τόσο όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή σε πραγματικό αριθμό, όσο και όταν $x \to \pm\infty$, θα συμβολίζουμε με $\overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Έτσι αν το x τείνει στο x_0 που μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$ θα γράφουμε $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim\limits_{x\to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} (f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$,

εκτός από τις περιπτώσεις: $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$.

2. Αν το $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)$ υπάρχει και δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}(f(x)\pm g(x))$

3. Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, τότε το $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}(f(x)\pm g(x))$ μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.
   Για παράδειγμα, το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει και το $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x}$ δεν υπάρχει αλλά για την συνάρτηση $f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}=1$ το όριο καθώς το x τείνει στο 0 είναι 1.

4. Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell_1\in\overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}(f(x)\,g(x))=\ell_1\,\ell_2$, εκτός από τις περιπτώσεις: $0\,(+\infty)$, $(+\infty)\,0$, $0\,(-\infty)$, $(-\infty)\,0$.

5. Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell_1\in\overline{\mathbb{R}}$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\ell_1}{\ell_2}$, εκτός από τις περιπτώσεις: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{0}$, $\frac{-\infty}{0}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\ell_1}{0}$ όπου $\ell_1\in\mathbb{R}$, $\ell_1\neq 0$, (απροσδιόριστες μορφές).
   Σημειώνουμε ότι ισχύει $\frac{0}{+\infty}=0$, και $\frac{0}{-\infty}=0$.

6. Αν για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ και $x\neq x_0$ έχουμε $|f(x)|\leq|g(x)|$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=0$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=0$

7. Έστω ότι για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ με $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)\leq g(x)$.
   Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=+\infty$, ενώ
   αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=-\infty$.

8. Αν για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ με $x\neq x_0$ έχουμε $f(x)\leq g(x)$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell_1\in\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell_2\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)\leq\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, ή ισοδύναμα $\ell_1\leq\ell_2$.

9. (*Θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων ή θεώρημα παρεμβολής.*) Αν για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ με $x\neq x_0$ έχουμε $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ και $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} h(x)=\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell$.

10. Αν $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}}|f(x)|=|\ell|$.

11. Αν $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = 0$ και η $g(x)$ είναι φραγμένη στην περιοχή του x_0, δηλαδή $|g(x)| \leq M$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} (f(x)\, g(x)) = 0$.

Οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν ακόμα κι όταν έχουμε γνήσιες ανισότητες ($<$, αντί $\leq$).

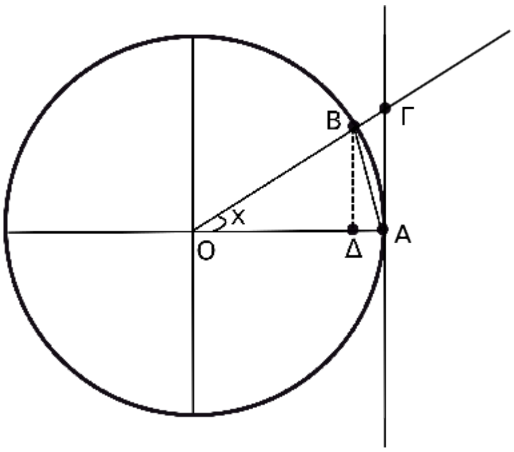
3.6 Βασικά όρια συναρτήσεων

1. $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} x^k = x_0^k, \qquad k \in \mathbb{N}$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} a\, x^k = a\, x_0^k, \qquad k \in \mathbb{N}$.
3. Αν $f(x) = a_k\, x^k + a_{k-1}\, x^{k-1} + +a_1\, x + a_0$ πολυώνυμο, τότε $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = f(x_0)$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty, \qquad k \in \mathbb{N}$.
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ αν k άρτιος φυσικός, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ αν k περιττός φυσικός.
6. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ και γενικότερα $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.
7. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, άρα το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει.
8. $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} \cos x = \cos x_0$
9. $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} \tan x = \tan x_0$ με $x_0 \neq k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.
10. $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} \mathrm{cotan}\, x = \mathrm{cotan}\, x_0$ με $x_0 \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
12. $\lim\limits_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} a^x = a^{x_0}$ με $a > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ αν $a > 1$,

    $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ αν $0 < a < 1$,
14. $\lim\limits_{x \to x_0} \log x = \log x_0$, $x_0 > 0$.
15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \log x = \lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty$.

Παρακάτω θα αποδείξουμε το βασικό όριο 11, δηλαδή ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, όπου x το μέτρο τόξου σε ακτίνια.
Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος. Επειδή ο κύκλος είναι τριγωνομετρικός ισχύουν $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$, $\mathrm{B\Delta} = \sin x$, $\mathrm{O\Delta} = \cos x$, $\mathrm{A\Gamma} = \tan x$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$\text{εμβαδό τριγώνου OAB} < \text{εμβαδό κυκλικού τομέα OAB} < \text{εμβαδό τριγώνου OA}\Gamma \qquad (*)$$



Σχήμα 3.7: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, όπου x το μέτρο τόξου σε ακτίνια.

Όμως

$$\begin{aligned} \text{εμβαδό τριγώνου OAB} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{B\Delta} = \frac{1}{2}\sin x \\ \text{εμβαδό κυκλικού τομέα OAB} &= \pi\,\mathrm{OA}^2\,\frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2}\,x \\ \text{εμβαδό τριγώνου OA}\Gamma &= \frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{A\Gamma} = \frac{1}{2}\tan x \end{aligned}$$

οπότε η ανισότητα $(*)$ γίνεται

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \Rightarrow \sin x < x < \tan x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall x \in (0, \pi/2)$$

Αν $x \in (-\pi/2, 0)$ τότε $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$, ή ισοδύναμα $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, οπότε

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2) \qquad (**)$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, και $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, εφαρμόζοντας το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων (θεώρημα παρεμβολής) στην ανισότητα $(**)$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3.7 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Αν υπάρχουν, να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$a)\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x},\quad b)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x},\quad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x},\quad d)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x},$

$e)\ \lim_{x\to 0} x\ \sin(\frac{1}{x}),\quad f)\ \lim_{x\to+\infty} x^2\ \sin(\frac{1}{x}),\quad g)\ \lim_{x\to-\infty} x\ \sin(\frac{1}{x}),\quad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.$

Απ. $a)$ $\mathbf{2/\pi}$, $b)$ **0**, $c)$ 0, $d)$ 0, $e)$ 0, $f)$ $+\infty$, $g)$ 1, $h)$ 1.

Άσκηση 2. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα όρια:

$a)\ \lim_{x\to-\infty}\cos x,\quad b)\ \lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x}),\quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},\quad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}.$

Άσκηση 3. Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-1},\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3},\quad c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^2-1},$

$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{|x|(x-1)}.$

Απ. $a)$ 1, $b)$ **1/2**, $c)$ 0, $d)$ $-\infty$.

Άσκηση 4. Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\quad b)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x),\quad c)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x).$

Απ. $a)$ 1/2, $b)$ **0**, $c)$ $+\infty$.

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f=\begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x\le -1,\\ x^2+1 & \text{αν} \quad -1<x<0,\\ 1-x & \text{αν} \quad x>0.\end{cases}$$

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: $a)\ \lim_{x\to-1} f(x)$, $b)\ \lim_{x\to 0} f(x)$, $c)\ \lim_{x\to 4} f(x)$

Απ. $a)$ Δεν υπάρχει, $b)$ **1**, $c)$ -3.

Άσκηση 6. Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός a, έτσι ώστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x),$$

να είναι πραγματικός αριθμός.

Απ. Για $a=1$ το όριο είναι 1/2.

Κεφάλαιο 4

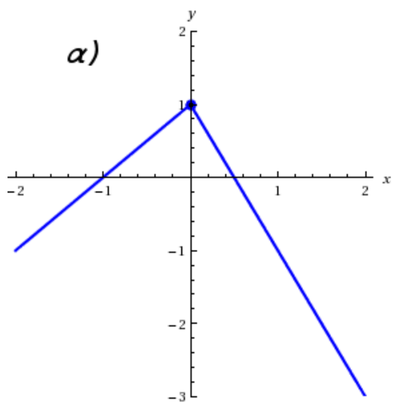
Συνέχεια συνάρτησης

4.1 Εισαγωγικά

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την έννοια της *συνέχειας* συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα πότε θα λέγεται μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και γενικότερα πότε θα λέγεται συνεχής σε κάποιο διάστημα ή ακόμα και σε όλο το πεδίο ορισμού της.

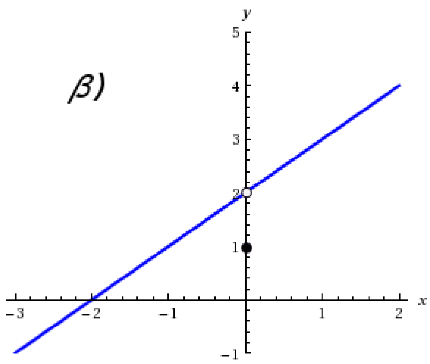
Ας θεωρήσουμε τα παρακάτω παραδείγματα συναρτήσεων και ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο σημείο $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ 1-2x & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$



1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

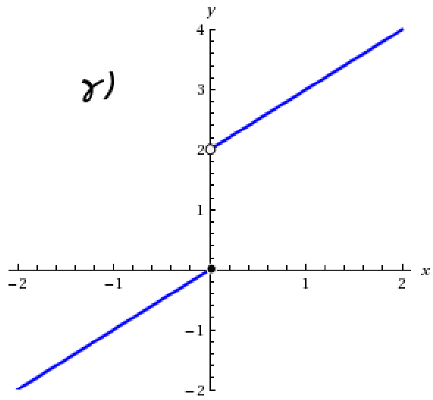
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$



1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

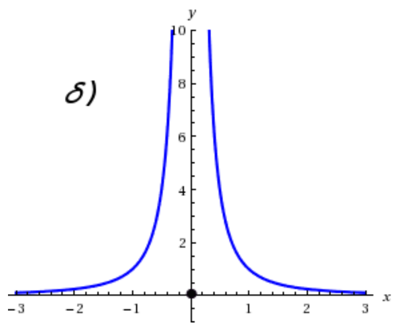
$$f(x)=\begin{cases} x & \text{αν} \quad x\le 0 \\ x+2 & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x=0$, με $f(0)=1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$, και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+2) = 2$ δηλαδή $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} x$, άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.



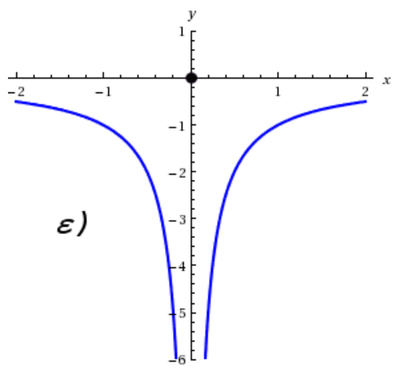
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x=0$, με $f(0)=0$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, δηλαδή το όριο της συνάρτησης είναι $+\infty$, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

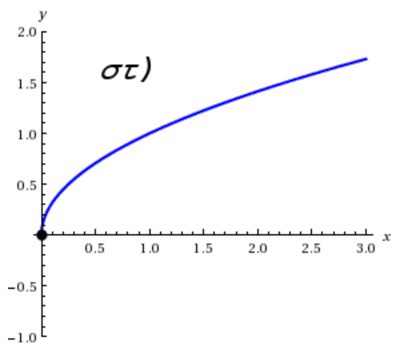


$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{|x|} & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x=0$, με $f(0)=0$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{|x|} = -\infty$, δηλαδή το όριο της συνάρτησης είναι $-\infty$, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

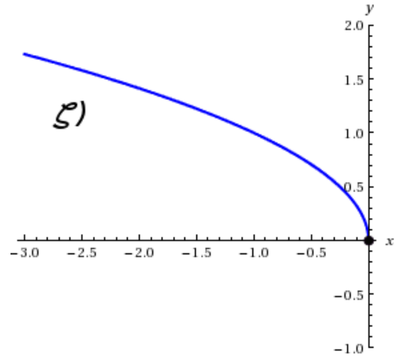


Αν $f(x)=\sqrt{x}$ τότε $D(f)=[0,+\infty)$ και
1) Το $x=0$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ και $f(0)=0$,
2) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.



Στα παραδείγματα α), στ) και ζ) έχουμε συναρτήσεις που ορίζονται στο $x=0$, υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Συναρτήσεις με αυτές τις ιδιότητες λέγονται

Αν $f(x) = \sqrt{-x}$ τότε $D(f) = (-\infty, 0]$ και
1) Το $x = 0$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ και $f(0) = 0$,
2) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x} = 0$,
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.



συνεχείς στο μηδέν. Στα παραδείγματα β), γ), δ) και ε) έχουμε συναρτήσεις που ορίζονται στο $x = 0$, και το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ ή είναι διάφορο του $f(0)$ ή δεν υπάρχει ή είναι $\pm\infty$ οπότε και πάλι διάφορο του $f(0)$. Τις συναρτήσεις αυτές τις ονομάζουμε ασυνεχείς στο μηδέν.

Ορισμός 4.1.1. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο x_0, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του $D(f)$ ή $D(f) = [x_0, a)$ ή $D(f) = (b, x_0]$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ορισμός 4.1.2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται ασυνεχής στο x_0 του $D(f)$ αν και μόνο αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή αν ισχύει τουλάχιστον μια από τις παρακάτω συνθήκες
α) Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.
γ) Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, αλλά $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(0)$.

Ορισμός 4.1.3. Μια συνάρτηση f λέγεται από αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) συνεχής στο x_0 του $D(f)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (αντίστοιχα $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

Παρατήρηση 4.1.4. Αν μια συνάρτηση δεν είναι ορισμένη στο x_0 δηλαδή το x_0 δεν ανήκει στο $D(f)$ δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια της συνάρτησης στο x_0. Είναι γνωστό όμως ότι μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ αρκεί το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του $D(f)$. Σε μια τέτοια περίπτωση αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός ℓ τότε η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί ώστε να είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να πάρουμε ως τιμή της συνάρτησης στο x_0 το ℓ. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$$

δεν ορίζεται στο 0 άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια της f στο μηδέν. Όμως

$$\lim_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

Αν ορίσουμε την συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

θα έχουμε επεκτείνει την f ώστε να είναι συνεχής στο μηδέν.

Παρατήρηση 4.1.5. Αν το x_0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού της f και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αλλά $\ell \neq f(0)$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x_0. Μια τέτοια ασυνέχεια λέμε ότι ““αίρεται”” ή ““διορθώνεται”” αρκεί να πάρουμε ως τιμή της f στο x_0 το ℓ. Αν η f είναι ασυνεχής επειδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ή επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε λέμε ότι η ασυνέχεια δεν διορθώνεται. Οπότε στο παράδειγμα β) η ασυνέχεια διορθώνεται αρκεί να πάρουμε $f(0) = 2$, ενώ στα παραδείγματα γ), δ) και ε) η ασυνέχεια δεν διορθώνεται.

Παρατήρηση 4.1.6. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 σημείο του πεδίου ορισμού της f, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα και $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι από αριστερά και από δεξιά συνεχής στο x_0.

Αλλά και αντίστροφα αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή αν η f είναι από αριστερά και δεξιά συνεχής στο x_0 τότε θα είναι και συνεχής στο x_0.

Ορισμός 4.1.7. Αν I ένα διάστημα του πεδίου ορισμού $D(f)$ της f θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο I αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in I$.

Ορισμός 4.1.8. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in D(f)$ σημείο του πεδίου ορισμού της.

4.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Ιδιότητα 4.1. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα I και στο $x_0 \in I$ οι f, g είναι συνεχείς, τότε στο x_0 θα είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$ και $f\,g$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g ασυνεχής στο x_0 τότε οι συναρτήσεις $f + g$, $f - g$ και $f\,g$ είναι ασυνεχείς στο x_0.

Ιδιότητα 4.2. *Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα I και στο $x_0 \in I$ είναι συνεχής με $f(x_0) \neq 0$, τότε η η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Ιδιότητα 4.3. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα I και στο $x_0 \in I$ οι f, g είναι συνεχείς με $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Ιδιότητα 4.4. *Αν οι συναρτήσεις g, f ορίζονται στα διαστήματα I_1, I_2 αντίστοιχα και για κάθε $x \in I_1$ έχουμε ότι $g(x) \in I_2$ τότε όπως γνωρίζουμε ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Με αυτές τις προϋποθέσεις αν η g είναι συνεχής στο $x_0 \in I_1$ και η f είναι συνεχής στο $g(x_0) \in I_2$ τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ θα είναι συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

4.5 Χαρακτηριστικές συνεχείς συναρτήσεις

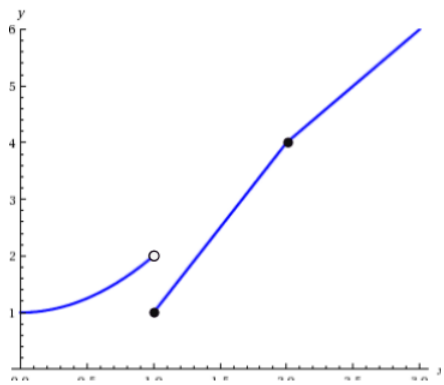
1. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ με c σταθερός πραγματικός αριθμός είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
2. Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_k\, x^k + a_{k-1}\, x^{k-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
3. Η ρητή συνάρτηση
$$f(x) = \frac{a_k\, x^k + a_{k-1}\, x^{k-1} + \cdots + a_1\, x + a_0}{b_m\, x^m + b_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + b_1\, x + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)}$$
είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο $B(x_0) \neq 0$.
4. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in D(f) = [0, +\infty)$.
5. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
6. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
7. Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
8. Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.
9. Η συνάρτηση $f(x) = \operatorname{cotan} x$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
10. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.
11. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a \neq 1$ και $a > 0$ είναι συνεχής για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
12. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $D(f) = (0, +\infty)$ και a σταθερός πραγματικός αριθμός είναι συνεχής σε κάθε $x \in D(f)$.

4.6 Παραδείγματα στην συνέχεια συναρτήσεων

Παράδειγμα 4.6.1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ 3\,x - 2 & \text{αν} \quad 1 \leq x < 2\,, \\ 2\,x & \text{αν} \quad x \geq 2\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια στα σημεία $x = 0$, $x = 1$ και $x = 2$.
Απάντηση:
α) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$ και η συνάρτηση ορίζεται στο $[0, 1)$ αλλά αριστερά του 0 δεν



Σχήμα 4.1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παρ. 4.1

ορίζεται, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

β) Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 1$ και $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x-2) = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$. Επομένως το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει και συνεπώς η f είναι ασυνεχής για $x = 1$. Όμως μπορούμε να πούμε ότι η f είναι από δεξιά συνεχής για $x = 1$ αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

γ) Για $x = 2$ έχουμε $f(2) = 4$ και $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-2) = 4$, και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x) = 4$. Άρα υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 = f(2)$ συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

Παράδειγμα 4.6.2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{αν} \quad x \le 0\,, \\ x+1 & \text{αν} \quad 0 < x < 1\,, \\ 2x & \text{αν} \quad x \ge 1\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια.

Απάντηση:

α) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = x^2 + x$

β) Για κάθε $x \in (0, 1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = x + 1$

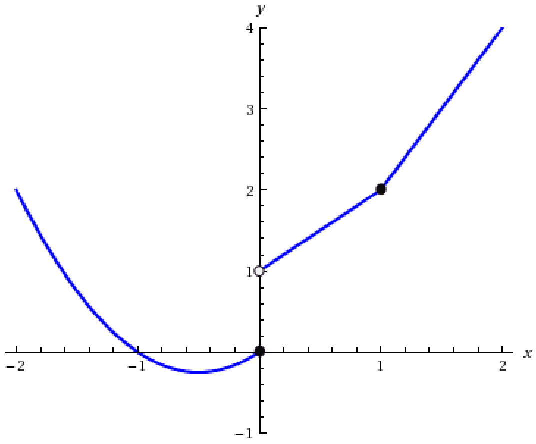
γ) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = 2x$

δ) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$, ενώ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η f είναι ασυνεχής στο $x = 0$. Αλλά επειδή η $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ μπορούμε να πούμε ότι είναι από αριστερά συνεχής στο $x = 0$.

ε) Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2$. Επιπλέον $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x) = 2$, δηλαδή $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 1$.

Παράδειγμα 4.6.3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \ge 2\,, \\ ax+2 & \text{αν} \quad x < 2\,. \end{cases}$$



Σχήμα 4.2: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παρ. 4.2

Να βρεθεί η πραγματική τιμή που πρέπει να πάρει το a για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x = 2$.

Απάντηση:

Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x = 2$ πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, δηλαδή $\lim_{x\to 2^+} x^2 = \lim_{x\to 2^-}(a\,x + 2) = 2^2 \Rightarrow 2\,a + 2 = 4 \Rightarrow a = 1$.

Παράδειγμα 4.6.4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

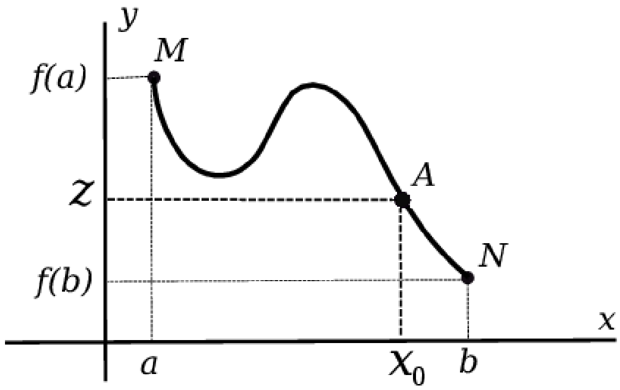
Απάντηση: Οι συναρτήσεις $g(x) = x$ και $h(x) = \sin x$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα το πηλίκο $f(x) = g(x)/h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο έχουμε $\sin x \neq 0$ δηλαδή $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ το οποίο άλλωστε είναι και το $D(f)$.

Παράδειγμα 4.6.5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x^2+2}$. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

Απάντηση: Οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$ και $h(x) = x^2 + 2$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή $D(g) = \mathbb{R}$ ορίζεται η $g \circ h$ για κάθε $x \in D(h) = \mathbb{R}$. Τότε όμως (από την ιδιότητα 4 συνεχών συναρτήσεων) η συνάρτηση $g \circ h$ είναι συνεχής για κάθε $x \in D(h) = \mathbb{R}$, δηλαδή η $g \circ h = g(h(x)) = e^{x^2+2}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.7 Δυο βασικές προτάσεις στις συνεχείς συναρτήσεις

Πρόταση 4.7.1. *(Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $f(a) \neq f(b)$ και z ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ του $f(a)$ και $f(b)$ τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(x_0) = z$.*

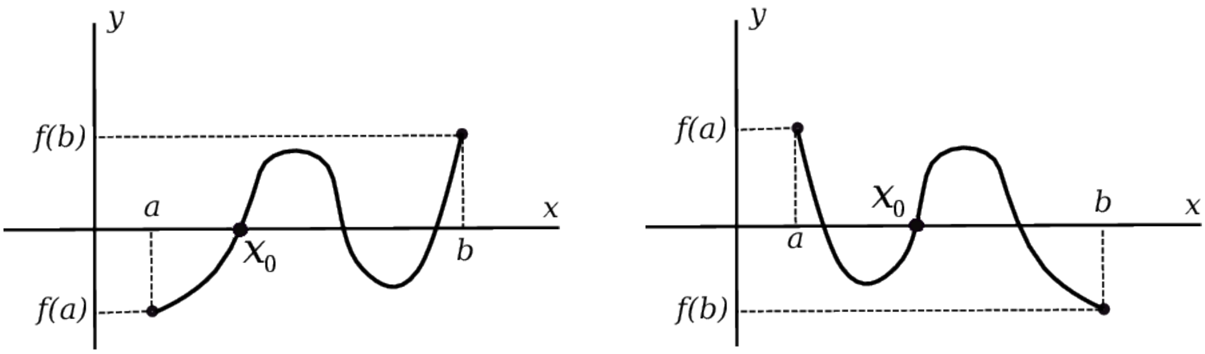


Σχήμα 4.3: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής

Γεωμετρικά το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής εκφράζει το γεγονός ότι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ που ενώνει τα σημεία $M(a, f(a))$, $N(b, f(b))$ του επιπέδου $x - y$ αναγκαστικά έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με την ευθεία $y = z$ ας το πούμε $A(x_0, z)$. Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης θα έχουμε $f(x_0) = z$.

Πρόταση 4.7.2. *(Θεώρημα Bolzano) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$.*

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano είναι ότι το διάγραμμα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ στο $[a, b]$ με $f(a)f(b) < 0$ αναγκαστικά τέμνει τον άξονα των x σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0 στο διάστημα (a, b).



Σχήμα 4.4: Το θεώρημα Bolzano είναι απλή συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, αφού από την $f(a)f(b) < 0$ έχουμε ότι $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$.

Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: *Αν η f συνεχής στο $[a, b]$ κι οι τιμές της f στα* *άκρα a, b του διαστήματος είναι ετερόσημες τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (a, b).*

Παράδειγμα 4.7.3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Απάντηση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \cos x - x$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων σε όλο το $\mathbb{R}$. Οι τιμές της f στα άκρα είναι $f(0) = \cos 0 - 0 = 1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, οπότε $f(0)\, f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Rightarrow \cos x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow \cos x_0 = x_0$. Άρα η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Παράδειγμα 4.7.4. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Απάντηση: Σε αυτό το παράδειγμα δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 1$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 1 = 0) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty$$

Συνεπώς υπάρχει κάποιος αριθμός a αρκετά μεγάλος αρνητικός (δεν είναι ανάγκη να του δώσουμε συγκεκριμένη τιμή) έτσι ώστε $f(a) = a^3 + 2\,a^2 + 3\,a + 1 < 0$. Από την άλλη έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 1 = 0) = \lim_{x\to+\infty} x^3(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = +\infty$$

οπότε υπάρχει κάποιος αριθμός b αρκετά μεγάλος θετικός έτσι ώστε $f(b) = b^3+2\,b^2+3\,b+1 > 0$. Δηλαδή $f(a)\,f(b) < 0$. Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει κάποιος πραγματικός $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$ ή αλλιώς $\xi^3 + 2\,\xi^2 + 3\,\xi + 1 = 0$, κι έτσι ο ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 1 = 0$.

Παρατήρηση: Ο αναγνώστης ίσως να προσπαθήσει λίγο πολύ στην τύχη να βρει ένα διάστημα στο οποίο εντοπίζεται η ρίζα ξ (είναι η μόνη πραγματική ρίζα της εξίσωσης κι οι άλλες δυο ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές). Αν δοκιμάσει το διάστημα $(-1, 0)$ θα βρεί ότι ο ξ βρίσκεται στο διάστημα αυτό (γιατι?)

Παράδειγμα 4.7.5. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 + 20\,x + 3 = 0$ έχει *μόνο* μια πραγματική ρίζα στο $(-1, 1)$.

Απάντηση: Αν $f(x) = x^5 + 20\,x + 3$ έχουμε $f(-1) = -18$ και $f(1) = 24$ δηλαδή $f(-1)\,f(1) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, άρα υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Όμως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ γιατί για κάθε $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) - f(x_2) = x_1^5 + 20\,x_1 + 3 - (x_2^5 + 20\,x_2 + 3) = (x_1^5 - x_2^5) + 20(x_1 - x_2) < 0$ αφού $x_1 - x_2 < 0$ και $x_1^5 - x_2^5 < 0$. Έτσι βγαίνει το συμπέρασμα ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$, γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ στο $(-1, 1)$ τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ που είναι άτοπο αφού πρέπει $f(\rho_1) < f(\rho_2)$ επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[-1, 1]$.

4.8 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{αν} \quad x \geq 1\,, \\ 2\,x & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ -x & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια για $x = 0$ και για $x = 1$.

Άσκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{αν} \quad x \geq 0\,, \\ \beta + 2\sqrt{x^2+1} & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα α, β αν γνωρίζουμε ότι $f(1) = 2$ και ότι η f είναι συνεχής για $x = 0$.

Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{αν} \quad > 2\,, \\ \alpha & \text{αν} \quad x = 2\,, \\ \beta + x^2 & \text{αν} \quad x < 2\,. \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα α, β αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής για $x = 2$.

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι στο διάστημα $(0, 1)$ η εξίσωση $x\,2^x = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{αν} \quad -2 \leq x < 0\,, \\ -x^2 - 2 & \text{αν} \quad 0 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Άσκηση 6. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x) = x^2\,, \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν} \quad x \geq 0\,, \\ x+1 & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f \circ g$ ως προς την συνέχεια.

Άσκηση 7. Να εξετασθούν ως προς την συνέχεια στο $x = 0$ οι παρακάτω συναρτήσεις. Αν είναι η f είναι ασυνεχής και η ασυνέχεια μπορεί να διορθωθεί να τροποποιήσετε κατάλληλα την τιμή της f στο $x = 0$.

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$ 3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$ 5) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x > 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases}$ 6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x) + x^2}{x} & \text{αν} \quad x < 0 \\ x^2 - x + a & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Να προσδιορισθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 9. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$|\sin x| \leq f(x) \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{αν} \quad x < 2 \\ x^3 + 2x - 9 & \text{αν} \quad x > 2 \end{cases}$$

Μπορούμε να ορίσουμε το $f(2)$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής?

Άσκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{αν} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$

Να εξετασθεί η συνάρτηση f ως προς την συνέχεια στο $x = 1$.

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\,x^2+x-1}{x+1} & \text{αν} \quad x<-1 \\ \\ \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{αν} \quad x\geq -1 \end{cases}$$

Να εξετασθεί η συνάρτηση f ως προς την συνέχεια στο $x=-1$.

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} -5\,x^2+\lambda\,x+\lambda^2 & \text{αν} \quad x<-2 \\ \\ 8\,x+\lambda & \text{αν} \quad x\geq -2 \end{cases}$$

Να προσδιορισθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 14. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \alpha\,x^2-x+\beta & \text{αν} \quad x<-1 \\ 1 & \text{αν} \quad x=-1 \\ \beta\,x^2+\alpha\,x-1 & \text{αν} \quad x>-1 \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα α, $\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(\alpha-1)\,x+\beta & \text{αν} \quad x<-1 \\ \\ \beta\,x-\alpha & \text{αν} \quad x\geq -1 \end{cases}$$

Αν $f(2)=0$, να προσδιορισθούν τα α, $\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 16. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} 2\,x & \text{αν} \quad x\leq 0 \\ \\ \sin(\alpha\,x) & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η f είναι συνεχής?

Άσκηση 17. (*Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach*)
Έστω $f\,:\,[0,1]\to[0,1]$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

Κεφάλαιο 5

Παράγωγος συνάρτησης

5.1 Εισαγωγικά

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Για κάθε $x_0 \in [a, b]$ ορίζουμε μια νέα συνάρτηση με τύπο

$$\Pi_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

με πεδίο ορισμού $D(\Pi_{x_0}) = D(f) - \{x_0\}$.
Την συνάρτηση Π_{x_0} την ονομάζουμε *πηλίκο διαφορών της f στο x_0*. Για την συνάρτηση αυτή μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της καθώς το x τείνει στο x_0. Το όριο $\lim_{x\to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός, $+\infty$, $-\infty$ ή να μην υπάρχει.

• Αν το $\lim_{x\to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ είναι πραγματικός αριθμός τότε ο αριθμός αυτός λέγεται *η πρώτη παράγωγος της f στο x_0*, και λέμε ότι η f παραγωγίζεται στο x_0.

• Αν το $\lim_{x\to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ είναι $\pm\infty$, ή δεν υπάρχει, λέμε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο x_0. Ειδικά αν το όριο είναι $\pm\infty$ μπορούμε να λέμε ότι η παράγωγος της f στο x_0 απειρίζεται θετικά, αντίστοιχα αρνητικά.

Παράδειγμα 5.1.1. Για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών της f στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Άρα η f παραγωγίζεται στο 0 ή έχει πρώτη παράγωγο στο 0 και είναι 1. Συνήθως σημειώνουμε τον αριθμό αυτό με $f'(0) = 1$.

Παράδειγμα 5.1.2. Για την συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών της f στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

Όμως από την Άσκηση 2.c σελ. 39, γνωρίζουμε ότι το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει, οπότε λέμε ότι η $f(x)=|x|$ δεν έχει πρώτη παράγωγο στο μηδέν ή ότι δεν παραγωγίζεται στο μηδέν.

Παράδειγμα 5.1.3. Για την συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x}$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty\,.$$

Επειδή το όριο είναι $+\infty$ λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, ή ότι η πρώτη παράγωγος της f στο μηδέν απειρίζεται θετικά.

Παράδειγμα 5.1.4. Για την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x\le 1\\ (x-2)^2 & \text{αν} \quad x>1\end{cases}$$

έχουμε ότι το πηλίκο των διαφορών της f είναι

Αν $\quad x<1 \qquad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1 \qquad$ και $\qquad \displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$

Αν $\quad x>1 \qquad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{(x-2)^2-1}{x-1}=\dfrac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-1}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{x-1}=x-3$

και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 1^+}(x-3)=-2$$

Αφού

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}$$

δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}\,,$$

και συνεπώς η f δεν έχει πρώτη παράγωγο στο ένα. Επειδή όμως υπάρχει το

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}\,,$$

και είναι πραγματικός αριθμός μπορούμε να λέμε ότι υπάρχει η από *αριστερή παράγωγος* της f στο $x=1$. Επίσης, επειδή υπάρχει το

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-1}$$

και είναι πραγματικός αριθμός μπορούμε να λέμε ότι υπάρχει η από *δεξιά παράγωγος* της f στο 1.

Ορισμός 5.1.5. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με $D(f) = [a, b]$ παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 \in [a, b]$ ή ότι υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τον πραγματικό αυτό αριθμό τον ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f στο x_0 και τον συμβολίζουμε με $f'(x_0)$.

Ορισμός 5.1.6. Θα λέμε ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f με $D(f) = [a, b]$ απειρίζεται θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) στο σημείο $x_0 \in [a, b]$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \qquad (\text{αντίστοιχα} \quad -\infty)$$

Ορισμός 5.1.7. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με $D(f) = [a, b]$ παραγωγίζεται από αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) στο σημείο $x_0 \in [a, b]$ αν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (\text{αντίστοιχα} \quad \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0})$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τον πραγματικό αυτό αριθμό τον ονομάζουμε αριστερή (αντ. δεξιά) παράγωγο της f στο x_0 και τον συμβολίζουμε με $f'(x_0^-)$ (αντ. $f'(x_0^+)$).

Πρόταση 5.1.8. *Έστω συνάρτηση f και $x_0 \in D(f)$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν υπάρχει αριστερή και δεξιά παράγωγος της f στο x_0 και ισχύει $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$, τότε υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0 και ισχύει $f'(x_0) = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$. Αντίστροφα, αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0 τότε υπάρχουν και οι $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ και ισχύει $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$.*

Είναι προφανές ότι αν δεν υπάρχει μια τουλάχιστον από τις πλευρικές παραγώγους της f στο x_0 τότε δεν υπάρχει η $f'(x_0)$, καθώς επίσης αν υπάρχουν οι $f'(x_0^+)$, $f'(x_0^-)$ αλλά ισχύει ότι $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ τότε και πάλι δεν υπάρχει η $f'(x_0)$.

5.2 Η συνάρτηση παραγώγου της f.

Αν σε κάθε $x_0 \in D(f)$ για το οποίο υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f αντιστοιχίσουμε τον πραγματικό αριθμό $f'(x_0)$ θα σχηματίσουμε μια μονοσήμαντη αντιστοιχία του συνόλου $D(f') = \{x_0 \in D(f) \, : \, \exists \; f'(x_0)\}$ στο $\mathbb{R}$, οπότε θα έχουμε μια συνάρτηση την οποία ονομάζουμε *συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f* ή πιο απλά *πρώτη παράγωγο της f*. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 5.2.1. Ονομάζουμε συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f ή πιο απλά πρώτη παράγωγο της f, την συνάρτηση με πεδίο ορισμού $D(f') = \{x_0 \in D(f) \, : \, \exists \; f'(x_0)\}$ και τύπο f' που ορίζεται από την αντιστοιχία

$$D(f') \ni x_0 \xrightarrow{f'} f'(x_0) \in \mathbb{R}\,.$$

Προσοχή!!! Δεν πρέπει να συγχέουμε την ““πρώτη παράγωγο της f στο x_0”” και την ““πρώτη παράγωγο της f”” μεταξύ τους. Η πρώτη είναι ένας πραγματικός αριθμός ενώ η δεύτερη είναι μια συνάρτηση.

Ορισμός 5.2.2. Ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0 \in D(f)$ την πρώτη παράγωγο στο x_0 της συνάρτησης πρώτης παραγώγου f'. Την δεύτερη παράγωγο στο x_0 της f συμβολίζουμε με $f''(x_0)$ δηλαδή $f''(x_0) = (f'(x))'_{x=x_0}$. Επαγωγικά, από την σχέση $f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'_{x=x_0}$ ορίζεται η n-οστή παράγωγος της f στο x_0.

Για το υπολογισμό της συνάρτησης πρώτης παραγώγου της f στο x_0 πρέπει να βρούμε το όριο του πηλίκου των διαφορών $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Μια χρήσιμη αντικατάσταση για την εύρεση αυτού του ορίου είναι η $x - x_0 = h$, οπότε επειδή $x \to x_0$ και $x \neq x_0$, τότε $h \to 0$, και $h \neq 0$, οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Επιπλέον, η αντικατάσταση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πιο εύκολα και την συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f αφού για το τυχαίο $x \in D(f)$ για το οποίο υπάρχει η πρώτη παράγωγος, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Για παράδειγμα, η πρώτη παράγωγος της $f(x) = x^2$ είναι

$$(x^2)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - x)(x + h + x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2\,x + h) = 2\,x$$

και γενικά $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

5.2.1 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Έστω ότι η f είναι ορισμένη για κάθε $x \in [a, b]$ και έστω ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0 \in (a, b)$.

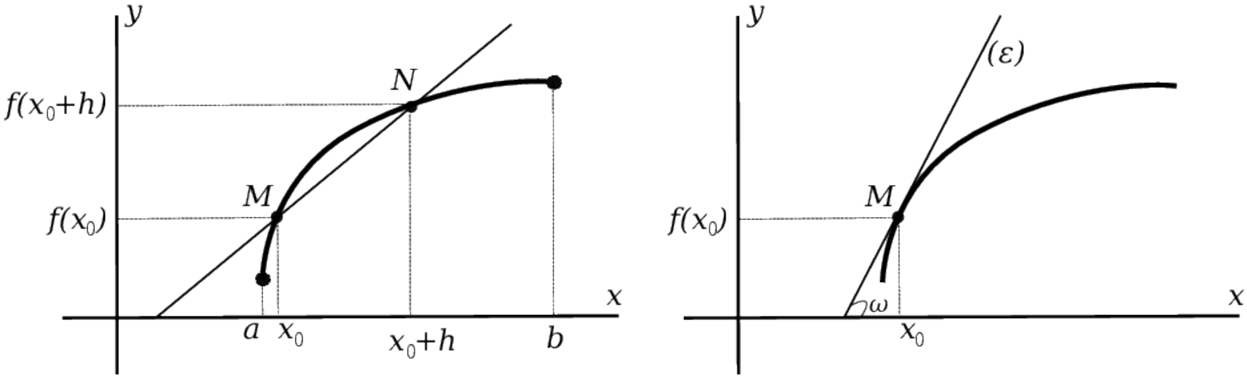
Ας θεωρήσουμε δυο σημεία $M(x_0, f(x_0)$ και $N(x_0 + h, f(x_0 + h))$ στο διάγραμμα της f. Η ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά ονομάζεται τέμνουσα του διαγράμματος και έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \qquad (*)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο N πλησιάζει το σημείο M κατά μήκος του διαγράμματος της f. Τότε το h πλησιάζει το 0 και παίρνοντας το όριο της εξίσωσης $(*)$ καθώς το $h \to 0$ δίνει

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (**)$$

Η $(**)$ είναι η εξίσωση μιας χαρακτηριστικής ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και λέγεται *εφαπτομένη της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$*. Αλλά η εξίσωση ευθείας που περνάει από το $M(x_0, f(x_0))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$. Άρα το $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) της (ε), δηλαδή $\tan\omega = f'(x_0)$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των x με την ευθεία (ε).



Σχήμα 5.1: Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου: Το $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας στο διάγραμμα της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, δηλαδή $f'(x_0) = \tan\omega$

Άν $f'(x_0) = 0$ τότε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των x, ενώ αν $f'(x_0) = \pm\infty$ τότε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των y.

Παράδειγμα 5.2.3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \alpha\, x + \beta$. Να προσδιορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1, 2)$ να έχει κλίση $\lambda = 4$.
Απάντηση: Αφού το $M(1, 2)$ είναι σημείο του διαγράμματος της f θα πρέπει $f(1) = 2$, δηλαδή $1 + \alpha + \beta = 2$ ή $\alpha + \beta = 1$. Από την άλλη η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1, 2)$ έχει κλίση 4 άρα θα πρέπει $f'(1) = 4$. Όμως $f'(x) = 2\,x + \alpha$, επομένως $f'(1) = 2 + \alpha = 4$ ή $\alpha = 2$. Τότε η σχέση $\alpha + \beta = 1$ δίνει $\beta = -1$. Έτσι το πρόβλημα έχει λύση για $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

5.2.2 Κανόνες παραγώγισης

Πριν αναφέρουμε τους κανόνες της παραγώγισης αναφέρουμε μια βασική πρόταση η οποία συνδέει την παραγωγισιμότητα συναρτήσεων με την συνέχεια.

Πρόταση 5.2.4. *Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D(f)$ τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Απόδειξη: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 υπάρχει το $f'(x_0)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Τότε αν πάρουμε το όριο όταν το $x \to x_0$ στην ταυτότητα

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0)$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\,0 = 0$$

Δηλαδή $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού είναι δυνατόν μια συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 \in D(f)$ χωρίς να είναι η f παραγωγίσιμη στο x_0. Το κλασικό αντιπαράδειγμα είναι η $f(x) = |x|$ η οποία είνα συνεχής στο $x = 0$ αλλά όπως έχουμε δει δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν (σελ. 53, παράδειγμα 5.2). □

Κανόνας παραγώγισης αθροίσματος

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει και όταν έχουμε πεπερασμένο πλήθος προσθετέων.

Κανόνας παραγώγισης διαφοράς

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)}$$

Κανόνας παραγώγισης γινομένου (κανόνας του Leibniz)

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}$$

Αν $f(x) = c$ η σταθερή συνάρτηση τότε ο προηγούμενος κανόνας γίνεται $(c\,g(x))' = c\,g'(x)$ αφού $f'(x) = 0$.

Κανόνας παραγώγισης πηλίκου

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ και είναι $g(x) \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}}$$

Αν $f(x) = 1$, τότε ο προηγούμενος κανόνας γίνεται

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-\,g'(x)}{g^2(x)}}$$

Κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης - κανόνας της αλυσίδας

Αν f, g συναρτήσεις για τις οποίες $R(g) \cap D(f) \neq \emptyset$, τότε ορίζεται η $f \circ g$. Για κάθε x για το οποίο υπάρχει η $g'(x)$ και υπάρχει η $f'(t)$ με $t = g(x)$, τότε υπάρχει η $(f \circ g)'(x)$ και ισχύει

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(t)\big|_{t=g(x)}\, g'(x) = f'(g(x))\, g'(x)}$$

Για παράδειγμα αν $f(x) = \sin(h(x))$, τότε

$$\boxed{f'(x) = cos(h(x))\, h'(x)}$$

Κανόνας παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης

Για κάθε x για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ με $f'(x) \neq 0$ υπάρχει και η $(f^{-1}(x))'$ και ισχύει

$$\boxed{(f^{-1}(x))' = \left.\frac{1}{f'(t)}\right|_{t=f^{-1}(x)}}$$

Για παράδειγμα αν $f(x) = \sin x$, τότε για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ έχουμε

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin t)'} = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

δηλαδή

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -1 < x < 1}$$

Συνάρτηση	Παράγωγος	Αντίστοιχη σύνθετη συνάρτηση	Παράγωγος
$y = x^n,\, n \in \mathbb{N}$	$y' = n\, x^{n-1} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = g^n(x)\; n \in \mathbb{N}$	$y' = n\, g^{n-1}(x)\, g'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \sin(g(x))$	$y' = \cos(g(x))\, g'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \cos(g(x))$	$y' = -\sin(g(x))\, g'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = e^{g(x)}$	$y' = e^{g(x)}\, g'(x)$
$y = \log x$	$y' = \dfrac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = \log(g(x))$	$y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = \sqrt{g(x)}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\, g'(x)$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$	$y = \tan(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\, g'(x)$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi$	$y = \cot(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2(g(x))}\, g'(x)$
$y = x^a,\, a \in \mathbb{R}$	$y' = a\, x^{a-1} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = g^a(x)$	$y' = a\, g^{a-1}(x)\, g'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$	$y = \arcsin(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\, g'(x)$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$	$y = \arccos(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\, g'(x)$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \arctan(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{1+g^2(x)}\, g'(x)$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \operatorname{arccot}(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{1+g^2(x)}\, g'(x)$

Πίνακας 5.1: Παράγωγοι των κυριοτέρων στοιχειωδών συναρτήσεων

Επίσης μπορούμε να γνωρίζουμε ότι

- $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \log a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$
- $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \log a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ και $a > 0,\, a \neq 1.$

Πράγματι, $y = a^x \Rightarrow \log y = \log a^x \Rightarrow \log y = x \log a \Rightarrow (\log y)' = \log a \Rightarrow y'/y = \log a \Rightarrow y' = y \log a \Rightarrow y' = a^x \log a.$

Επιπλέον $y = \log_a x \Rightarrow a^y = x \Rightarrow \log a^y = \log x \Rightarrow y \log a = \log x \Rightarrow (y \log a)' = (\log x)' \Rightarrow y' \log a = 1/x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \log a}.$

5.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = |x-1| + 2$ δεν έχει παράγωγο για $x = 1$.

Άσκηση 2. Αν $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ να βρεθεί η $f'(0)$ και να εξετασθεί αν υπάρχει η $f'(3)$.

Άσκηση 3. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x\,|x|$. Να βρεθεί αν υπάρχει η $f'(0)$.

Άσκηση 4. Αν για την συνάρτηση f έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \le 2 \\ \alpha\, x + \beta & \text{αν} \quad x > 2 \end{cases}$$

να βρεθούν τα α, β ώστε να υπάρχει η $f'(2)$.

Άσκηση 5. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x^2 + \chi + 1 & \text{αν} \quad x < 0 \\ a\,x + b & \text{αν} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

να βρεθούν τα α, β ώστε να υπάρχει η $f'(0)$ και να υπολογισθεί.

Άσκηση 6. Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τις παραγώγους καθώς και τις πλευρικές παραγώγους στο $x = 0$ των παρακάτω συναρτήσεων

$$1) \quad f(x) = 2\,, \quad 2)\ f(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 3\,, \quad 3)\ f(x) = \tan x\,, \quad 4)\ f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x} & \text{αν} \quad x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{αν} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

$$5) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \ne 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases} \qquad 6)\ f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{αν} \quad x > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ -1 - x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 7. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{αν} \quad x \ne 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της f σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει.

Άσκηση 8. Αν $x - x^2 \le f(x) \le x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχει το $f'(0)$ και να υπολογισθεί.

Άσκηση 9. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + 3\,x + \beta$. Να βρεθεί το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι:
α) παράλληλη προς τον άξονα των x
β) παράλληλη προς την ευθεία $2\,x - y = 3$
γ) παράλληλη προς την ευθεία $y = x$.

Άσκηση 10. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της υπερβολής $y = a^2/x$ στο σημείο $M(a, b)$ με τον άξονα των x.

Άσκηση 11. Να δειχθεί ότι η ευθεία $y = -x$ εφάπτεται στο διάγραμμα της $f(x) = x^2 + 3\,x + 4$ και να βρεθεί το σημείο επαφής.

Άσκηση 12. Να δειχθεί ότι στην παραβολή $f(x) = x^2 + a\,x + b$ η χορδή που διέρχεται από το σημείο με τετμημένες $x = a$ και $x = b$ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη στο σημείο $M\left(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\right)$.

Άσκηση 13. Αν $f(x) = \sin x$ και $g(t) = \sin(t^2 - 1)$ να υπολογισθεί η $g'(1)$.

Άσκηση 14. Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

$$a)\ f(x) = x^x \quad b)\ f(x) = (x^2+1)^{x^2}\,, \quad c)\ f(x) = (\log x)^x\,, \quad d)\ f(x) = 5^{\sin x}$$

Άσκηση 15. Να βρεθεί η παράγωγος για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$a)\ f(x) = x^3\,e^x\,, \quad b)\ f(x) = \frac{x^2}{\log x}\,, \quad c)\ f(x) = e^x\,\cos x$$
$$d)\ x^3\,\log x - \frac{1}{3}\,x^3\,, \quad e)\ f(x) = (x-1)\,2^x\,, \quad f)\ f(x) = \frac{e^x}{x^2}\,.$$

Άσκηση 16. Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2\,e^x\,\cos x}{x+1}$$

Άσκηση 17. Αν $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ να δειχθεί ότι ισχύει

$$x\,y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}\,y = 0\,.$$

Άσκηση 18. Αν $y = a\,\cos(\lambda\,x) + b\,\sin(\lambda\,x)$ να δειχθεί ότι ισχύει $y'' + \lambda^2\,y = 0\,.$

Άσκηση 19. Αν $e^y = \dfrac{1}{x+1}$ να δειχθεί ότι ισχύει $x\,y' + 1 = e^y$.

Άσκηση 20. Δίνεται η καμπύλη $x^3 + y^3 = 3\,x\,y$ στο επίπεδο. Να βρεθεί η παράγωγος της $y = f(x)$ ως μια έκφραση των x, y και η εφαπτομένη στο σημείο $M(3/2, 3/2)$.

Άσκηση 21. Να βρεθούν οι κλίσεις των εφαπτομένων της καμπύλης $y^2 - x + 1 = 0$ στα σημεία $M_1(2, -1)$ και $M_2(2, 1)$.

Άσκηση 22. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της $y = f(x)$ η οποία δίνεται στην πεπλεγμένη μορφή $4\,x^2 - 2\,y^2 = 9$ σε συνάρτηση των x, y.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών - Κανόνες L'Hôpital

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων συναρτήσεων στον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών ορίων. Όλες οι απροσδιόριστες μορφές μετατρέπονται στις απροσδιόριστες μορφές του τύπου $\frac{0}{0}$, ή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ο υπολογισμός αυτών των μορφών αυτών γίνεται αντίστοιχα χρησιμοποιώντας δυο κανόνες που είναι γνωστοί ως κανόνες L'Hôpital.

6.1 1ος κανόνας L'Hôpital

Ο πρώτος κανόνας L'Hôpital αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$.

Πρώτος Κανόνας L'Hôpital: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ και ότι $g(x) \neq 0$, και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.
Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει, με τις κατάλληλες προσαρμογές στις υποθέσεις, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Επιπλέον ο κανόνας ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Παράδειγμα 6.1.1. Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$. Στο $I = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\sin x \neq 0$ και $(\sin x)' = \cos x \neq 0$. Επίσης, $\lim_{x\to 0} e^x - 1 = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του πρώτου κανόνα L'Hôpital και υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0} e^x}{\lim_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} = 1$.

6.2 2ος κανόνας L'Hôpital

Ο δεύτερος κανόνας L'Hôpital αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, ή ακριβέστερα, σε μια γενίκευσή της.

Δεύτερος Κανόνας L'Hôpital: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ και ότι $g(x) \neq 0$, και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$.
Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει, με τις ανάλογες προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου:
$x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Επιπλέον ο κανόνας ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Στις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα L'Hôpital δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ούτε ποιά ακριβώς είναι η τιμή του (αν υπάρχει). Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του Δεύτερου Κανόνα L'Hôpital, όπως διατυπώθηκε προηγουμένως.

Παράδειγμα 6.2.1. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \qquad b > 0,\ a > 1$$

Θα αντιμετωπίσουμε πρώτα την περίπτωση $b = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = 0$, με $a > 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $a^x \neq 0$ και $(a^x)' = a^x \log a \neq 0$. Επιπλέον έχουμε $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Για τον λόγο των παραγώγων έχουμε ότι

$$\frac{x'}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \log a} \qquad \text{και έχουμε ότι} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \log a} = 0$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα L'Hôpital $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(a^x)} = 0$. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται με βάση την ειδική αφού

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{x^b}{(a^{1/b})^{x\,b}} = \left(\frac{x}{(a^{1/b})^x}\right)^b = \left(\frac{x}{\gamma^x}\right)^b$$

όπου θέσαμε $\gamma = a^{1/b} > 1$. Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\gamma^x}\right)^b = 0^b = 0.$$

Παράδειγμα 6.2.2. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0 \qquad a > 0,\ b > 0$$

Θα αντιμετωπίσουμε πρώτα την περίπτωση $b = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$, με $a > 0$. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε $x^a \neq 0$ και $(x^a)' = a\,x^{a-1} \log a \neq 0$. Επιπλέον έχουμε $\lim_{x\to+\infty} \log x = \lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Για τον λόγο των παραγώγων έχουμε

$$\frac{(\log x)'}{(a^x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{a\,x^{a-1}} = \frac{1}{a\,x^a} \qquad \text{και έχουμε ότι} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a\,x^a} = 0\,.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα L'Hôpital συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{(a^x)} = 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό έχουμε ότι για την γενική περίπτωση $b > 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log a)^b}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x^{a/b}}\right)^b = 0^b = 0\,.$$

Παρατήρηση 6.2.3. *Το αντίστροφο των κανόνων L'Hôpital δεν ισχύει.* Δηλαδή είναι δυνατόν να έχουμε να υπολογίσουμε μια απροσδιόριστη μορφή ορίου και να μην υπάρχει το όριο των λόγων των παραγώγων, όμως το όριο του λόγου των συναρτήσεων που θέλουμε να υπολογίσουμε να υπάρχει!!

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x}$. Επειδή $x - \cos x > x - 1$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(x - \cos x) = +\infty$. Επιπλέον, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Το όριο όμως υπολογίζεται εύκολα γιατί

$$\frac{x - \cos x}{x} = 1 - \frac{\cos x}{x} \quad \text{και} \quad \left|\frac{\cos x}{x}\right| < \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0, +\infty)$$

κι επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων θα είναι και $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\cos x}{x} = 1$.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να εφαρμόσουμε τον Δεύτερο Κανόνα L'Hôpital. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{(x-cosx)'}{x'} = \frac{1+sinx}{1} = 1 + \sin x$ και το όριο $\lim_{x\to+\infty}(1 + \sin x)$ δεν υπάρχει γιατί δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} \sin x$.

Συνεπώς, υπάρχει περίπτωση το όριο της απροσδιόριστης μορφής που θέλουμε να υπολογίσουμε να υπάρχει και οι κανόνες L'Hôpital να μην μας βοηθούν στον υπολογισμό του ορίου.

Υπάρχουν κι άλλες απροσδιόριστες μορφές, όμως όλες τους μπορούν να αναχθούν στις απροσδιόριστες μορφές για τις οποίες μπορούν να εφαρμοσθούν οι δυο κανόνες L'Hôpital. Πιο συγκεκριμένα, Οι απροσδιόριστες μορφές ορίων είναι:

α) Για την πρόσθεση: $(+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty)$.

β) Για την αφαίρεση: $(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty)$.

γ) Για τον πολλαπλασιασμό: $0\,(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\,0$.

δ) Για την διαίρεση: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{a}{0}$ με $a \neq 0$.

ε) Για δυνάμεις: $(+\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}$.

Όλες οι απροσδιόριστες μορφές, εκτός από την $\dfrac{a}{0}$ με $a \neq 0$, ανάγονται με κατάλληλους μετασχηματισμούς στις απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Πράγματι:

1. Έστω $\lim f(x) = 0$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)\,g(x) = 0\,(\pm\infty)$. Τότε
$$\lim f(x)\,g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \qquad \text{ή} \qquad \lim f(x)\,g(x) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

2. Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = -\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim(f(x)+g(x)) = (+\infty) + (-\infty)$. Τότε
$$\lim f(x)\,g(x) = \lim \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}\right) f(x)\,g(x) = 0\,(-\infty)$$
οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση (1) απροσδιόριστης μορφής.

3. Έστω $\lim f(x) = 0$, όπου $f(x) > 0$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = 0^0$. Τότε
$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = 0\,(-\infty)$$

οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

4. Έστω ότι $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = (+\infty)^0$. Τότε

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = 0\,(+\infty)$$

οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

5. Έστω ότι $\lim f(x) = 1$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = 1^{\pm\infty}$. Τότε

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = (\pm\infty)\,0$$

οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

6.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να εξακριβώσετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του πρώτου ή δεύτερου κανόνα L'Hôpital, και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} x\,\log x, \qquad b)\ \lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right),$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}, \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}, \qquad f)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3\,x+2}{x^2-4},$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right), \qquad h)\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x, \qquad i)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{x}{x-1}},$$

Απ. $a)$ $\mathbf{0}$, $b)$ $\mathbf{1}$, $c)$ 0, $d)$ 0, $e)$ $\frac{1}{6}$, $f)$ $\frac{1}{4}$, $g)$ $\frac{1}{2}$, $h)$ 1, $i)$ e.

Άσκηση 2. Να εξακριβώσετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του πρώτου ή δεύτερου κανόνα L'Hôpital, και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x}, \qquad c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{(\log x)^2}{x},$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\tan x}, \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3\,x^2}, \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}.$$

Απ. $a)$ $\mathbf{0}$, $b)$ $\mathbf{1}$, $c)$ 0, $d)$ 1, $e)$ $\mathbf{\frac{1}{3}}$, $f)$ 2.

Άσκηση 3. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^4}, \qquad b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{1-\cos(4\,x)}, \qquad c) \quad \lim_{x\to 1} \frac{5\,x^7 - 6\,x^6 + x}{(x-1)^2}.$$

Απ. $a)$ $+\infty$, $b)$ δεν υπάρχει, $c)$ 15.

Άσκηση 4. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x}, \qquad b) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x + \log x}, \qquad c) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+e^{2\,x})}{x}.$$

Απ. $a)$ $\log 2$, $b)$ $+\infty$, $c)$ 2.

Άσκηση 5. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a) \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2\,e^{2\,x}}, \qquad b) \quad \lim_{x\to+\infty} x^{1/x}, \qquad c) \quad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \log\frac{1}{x}\right).$$

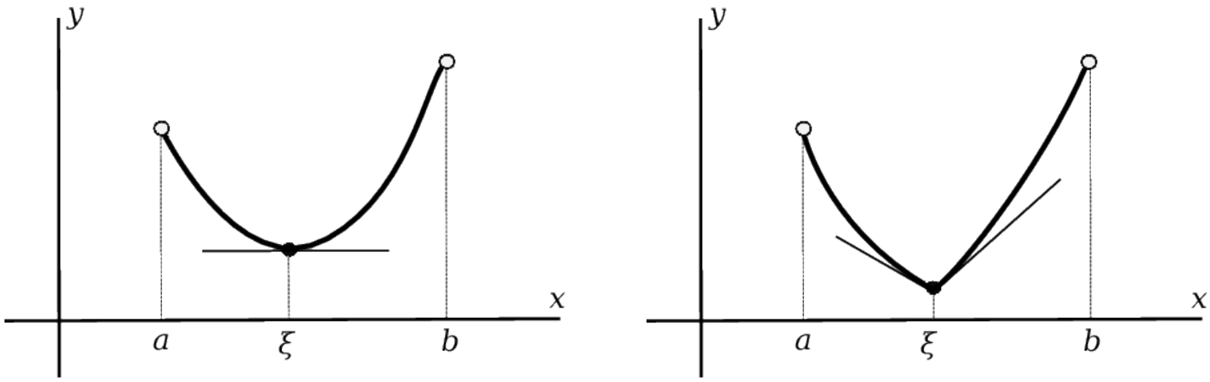
Απ. $a)$ $+\infty$, $b)$ $\mathbf{1}$, $c)$ $+\infty$.

Κεφάλαιο 7

Τέσσερα σημαντικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού

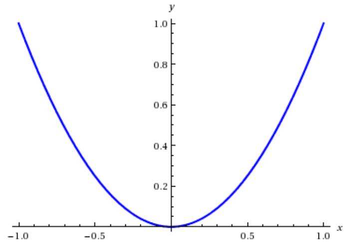
Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε τέσσερα σημαντικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού. Το πρώτο θεώρημα είναι το εξής.

Πρόταση 7.0.1. (Θεώρημα του Fermat) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και έστω ξ σημείο στο (a, b). Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$, τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ,
(ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ και ισχύει $f'(\xi) = 0$.

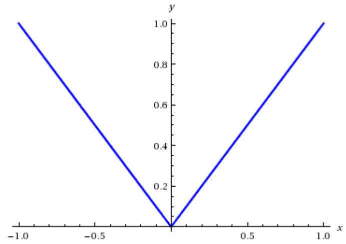


Σχήμα 7.1: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Fermat: Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το ξ και το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$, τότε είτε υπάρχει εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και η κλίση της είναι ίση με 0 (παράλληλη στον άξονα των x), είτε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ (σχήμα δεξιά).

Παράδειγμα 7.0.2. Το $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = x^2$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, και η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = 0$ είναι ίση με μηδέν, πράγματι, $(x^2)' = 2\,x|_{x=0} = 0$.



Παράδειγμα 7.0.3. Το $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = |x|$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αλλά η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο $x = 0$.

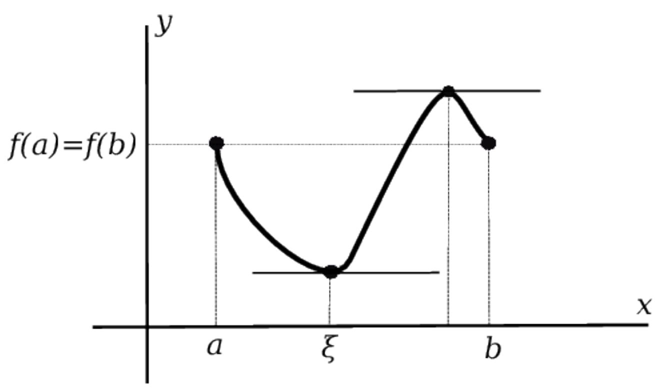


Το θεώρημα του Fermat έχει το εξής πόρισμα:

Υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου: Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα εξής σημεία:
(i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος,
(ii) τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και
(iii) τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0.
Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Το δεύτερο σημαντικό θεώρημα είναι το

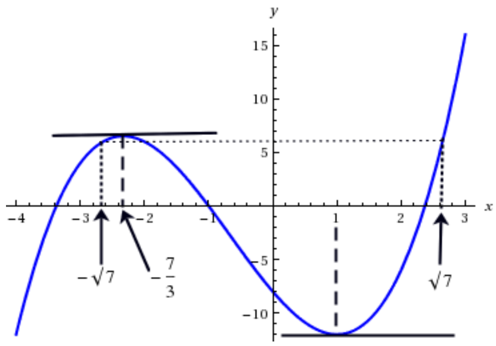
Πρόταση 7.0.4. (Θεώρημα του Rolle) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Αν είναι $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, b)$ ώστε να είναι $f'(\xi) = 0$.*



Σχήμα 7.2: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

Παράδειγμα 7.0.6. Με την βοήθεια του θεωρήματος του Rolle θα δείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 + 6\,x + 1 = 0$ δεν μπορεί να έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι

Παράδειγμα 7.0.5. Η $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 8$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ και έχει παράγωγο στο $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ και οι τιμές της στα άκρα είναι $f(\sqrt{7}) = f(-\sqrt{7}) = 6$. Άρα υπάρχει κάποιο $\xi \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, στο οποίο η παράγωγος $f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$ είναι ίση με μηδέν. Για να βρούμε το ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 7 = 0$. Οι λύσεις είναι οι $x = -\frac{7}{3}$, $x = 1$ που ανήκουν και οι δύο στο διάστημα $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, αφού $-\sqrt{7} \approx -2.65 < -2.33 \approx -\frac{7}{3}$ και $1 < \sqrt{7} \approx 2.65$.



η εξίσωση έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x + 1$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στα διαστήματα (ρ_1, ρ_2) και (ρ_2, ρ_3) και είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και $f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ αφού οι ρ_i είναι ρίζες της $f(x) = 0$. Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

Όμως, $f'(x) = 3x^2 + 6$ και η εξίσωση $3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Άτοπο! και στο άτοπο φτάσαμε υποθέτοντας ότι η $f(x) = 0$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες, άρα δεν μπορεί να συμβαίνει αυτό.

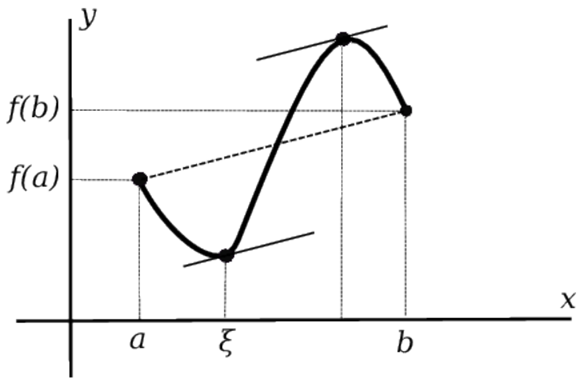
Παράδειγμα 7.0.7. Με την βοήθεια του θεωρήματος του Rolle θα δείξουμε ότι η εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)$ την οποία όταν την παραγωγίσουμε μας δίνει την εξίσωση $6x^5 - 4x + 1$, δηλαδή $f(x) = x^6 - 2x^2 + x + c$. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και έχει παράγωγο στο $(0, 1)$ και $f(0) = f(1) = c$. Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα υπάρχει ένα $\xi \in (0, 1)$ που ικανοποιεί την εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$.

Πρόταση 7.0.8. Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε*

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange), αφού αν $f(a) = f(b)$ τότε από το θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συμπεραίνουμε ότι για κάποιον ξ στο (a, b) είναι $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Άρα το θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συνεπάγεται το θεώρημα του Rolle. Από την άλλη το θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$ στο διάστημα $[a, b]$, οπότε τα δυο αυτά θεωρήματα είναι ισοδύναμα.

Παράδειγμα 7.0.9. Η $y = \sin x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. Άρα υπάρχει ξ στο $(0, \frac{\pi}{2})$ ώστε να είναι $\sin' \xi = \cos \xi = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$, $(\xi \approx 0.880689)$.



Σχήμα 7.3: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής Lagrange: Ο αριθμός $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ είναι η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Οπότε το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) έχει την γεωμετρική ερμηνεία ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει την ίδια κλίση, δηλαδή είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Το τελευταίο σημαντικό θεώρημα είναι το

Πρόταση 7.0.10. Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy) *Έστω ότι οι $f(x)$ $g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b), έτσι ώστε (i) να είναι $g(a) \neq g(b)$ και (ii) σε κανένα x του (a, b) να μην ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$. Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε*

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$$

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής Cauchy αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = (g(a)-g(b))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$ στο διάστημα $[a, b]$. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) είναι ειδική περίπτωση του Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) παίρνοντας για $g(x) = x$. Προηγουμένως είδαμε ότι το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange). Οπότε το συμπέρασμα είναι ότι τα τρία θεωρήματα Rolle-Lagrange-Cauchy είναι ισοδύναμα.

Κεφάλαιο 8

Ακρότατα και μονοτονία

8.1 Χαρακτηρισμός ακροτάτων

Πρόταση 8.1.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

1. *Η $y = f(x)$ είναι σταθερή στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

2. *Η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

3. *Η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

Μια παραλλαγή της προηγούμενης πρότασης είναι η παρακάτω

Πρόταση 8.1.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

1. *Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο I.*

2. *Αν είναι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο I.*

Παρατήρηση 8.1.3. Στις προηγούμενες προτάσεις όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$, και όμοια όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$.

Παρατήρηση 8.1.4. Δεν ισχύουν τα αντίστροφα των 1., 2. της πρότασης (8.1.2). Δηλαδή αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που προκύπτει

από το γεγονός ότι είναι αύξουσα δηλαδή ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I. Ανάλογα ισχύουν, κι αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Για παράδειγμα η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά δεν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε σημείο στο $(-\infty, +\infty)$, αφού $(x^3)' = 3\,x^2$ και είναι > 0 για κάθε $x \neq 0$, αλλά είναι μηδέν για $x = 0$.

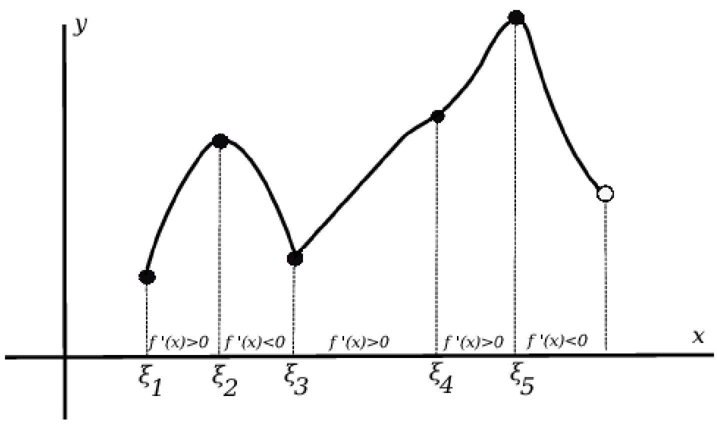
Παρατήρηση 8.1.5. Οι προηγούμενες προτάσεις ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ένωση κάποιων διαστημάτων τότε ενδέχεται τα συμπεράσματα να μην ισχύουν στις ενώσεις των διαστημάτων.
Για παράδειγμα: 1) η $f(x) = \frac{|x|}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι σταθερή στο $D(f)$. Είναι σταθερή -1 στο $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο $(0, +\infty)$.
2) Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο $-\frac{1}{x^2} < 0$ στο πεδίο ορισμού της $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $D(f)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Υπάρχει ένας εύχρηστος τρόπος για να χαρακτηρίζουμε τα υποψήφια σημεία τοπικών ακροτάτων ξ_i μιας συνάρτησης $y = f(x)$ με βάση το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ δεξιά κι αριστερά των ξ_i.

Πρόταση 8.1.6. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I και είναι συνεχής σε κάποιο υποδιάστημα $(a, b) \subset I$ και ο ξ ανήκει στο (a, b).*

1. *Αν είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε σημείο x στο (a, ξ) και $f'(x) \leq 0$ για κάθε σημείο x στο (ξ, b), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.*

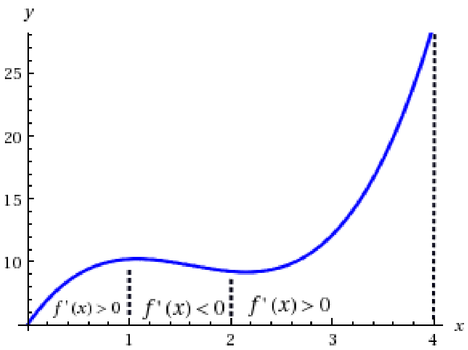
2. *Αν είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε σημείο x στο (a, ξ) και $f'(x) \geq 0$ για κάθε σημείο x στο (ξ, b), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.*



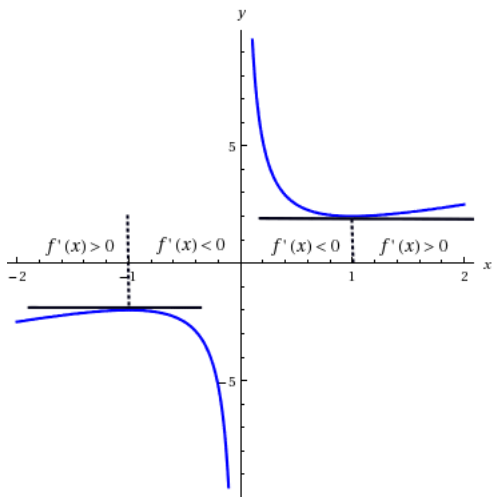
Σχήμα 8.1: Διαστήματα μονοτονίας και σημεία τοπικού ακροτάτου.

Χαρακτηρισμός υποψήφιων σημείων τοπικών ακροτάτων: Έστω ότι μας δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ σε κάποιο διάστημα (οποιουδήποτε τύπου) κι ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί όλα τα υποψήφια σημεία $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ τοπικού ακροτάτου (συμπεριλαμβανομένων και των πιθανών άκρων του διαστήματος) και η παράγωγος $f'(x)$ έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα ανοιχτά υποδιαστήματα που χωρίζονται από τα σημεία $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$. Τότε:
(i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου,
(ii) κάθε ξ_i που χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος είναι ετερόσημη είναι σημείο τοπικού ακροτάτου,
(iii) κάθε ξ_i που χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος είναι ομόσημη δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 8.1.7. Η $f(x) = 2\,x^3 - 9\,x^2 + 12\,x + 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ και έχει παράγωγο $f'(x) = 6\,x^2 - 18\,x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ στο $(0, 4)$. Η παράγωγος είναι θετική στο διάστημα $(0, 1)$ και στο $(2, 4)$, και είναι αρνητική στο διάστημα $(1, 2)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $[2, 4]$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$. Συνεπώς τα $x = 0$ και $x = 2$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της $f(x)$ και τα σημεία $x = 1$ και $x = 4$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου.



Παράδειγμα 8.1.8. Η $f(x) = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η παράγωγος είναι $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ και είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και αρνητική στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1)$ και στο $(1, +\infty)$, και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0)$ και στο $(0, 1]$. Συνεπώς το $x = -1$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $f(x)$ και το σημείο $x = 1$ και είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.



8.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Μπορεί η εξίσωση $x^3 - 12\,x = c$ να έχει δυο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2, 2]$? στο $(\infty, -2]$? στο $[2, +\infty)$?

Άσκηση 2. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = 2 - \sqrt[5]{x^2}$ και παρατηρούμε ότι έχει την ίδια τιμή 1 για $x = 1$ και $x = -1$. Υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(-1, 1)$ στον οποίο να μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης?

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x\,sinx + \cos x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις. Να προσδιορίσετε την θέση των λύσεων σε σχέση με το $x = 0$.

Άσκηση 4. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x = 1$? Η εξίσωση $e^x = 1 + x$?

Άσκηση 5. Να αποδειχτεί ότι: (i) $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (ii) $\log x \leq x - 1$ για κάθε x θετικό πραγματικό. (iii) $(1 + x)^a > 1 + a\,x$, αν $x > 0$ και $a > 1$.

Άσκηση 6. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) να δειχθεί ότι

$$n\,b^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < n\,a^{n-1}$$

όπου a, b θετικοί πραγματικοί με $b < a$ και n φυσικός $n > 1$.

Άσκηση 7. Να αποδειχθεί ότι $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + x + 1 & \text{με} \quad x \geq 1 \\ 2\,a\,x + 1 & \text{με} \quad x < 1 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του πραγματικού a η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$?

Άσκηση 9. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικών ακροτάτων στο πεδίο ορισμού καθεμιάς απο τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$i) \quad y = (x - 1)\,\sqrt[3]{x^2}\,, \qquad (ii) \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x + 4}\,, \qquad (iii) \quad y = x^2\,e^{-x}\,.$$

Άσκηση 10. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα

$$(i) \quad y = (x - 1)\,|x| \text{ στο } [-1, 3] \quad (ii) \quad y = x + \frac{1}{x} \text{ στο } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \quad (iii) \quad y = e^x\,\sin x \text{ στο } [0, 2\,\pi]\,.$$

Άσκηση 11. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $y = \frac{x^2-75}{x-10}$ στο διάστημα $[0, 10)$. Ποιά είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό?

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$. Να δειχθεί ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $(-\infty, +\infty)$ αν και μόνο αν $a^2 \leq 3\,b$.

Άσκηση 13. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $2\,a$, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Άσκηση 14. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό k^2, το τετράγωγο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Άσκηση 15. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου παραλληλογράμμου μέγιστου εμβαδού, που δυο πλευρές του να βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες ορθογωνίου συστήματος και μια από τις κορυφές του πάνω στην ευθεία $x + y = 2$.

Άσκηση 16. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ισοσκελή τρίγωνα σταθερής περιμέτρου a, το ισόπλευρο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Κεφάλαιο 9

Δεύτερη παράγωγος κι εφαρμογές

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει τον x_0 και ότι η $f'(x)$ η οποία ορίζεται στο διάστημα αυτό έχει με την σειρά της παράγωγο στο x_0, δηλαδή υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$. Τότε το όριο αυτό ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της $y = f(x)$ και συμβολίζεται ως εξής

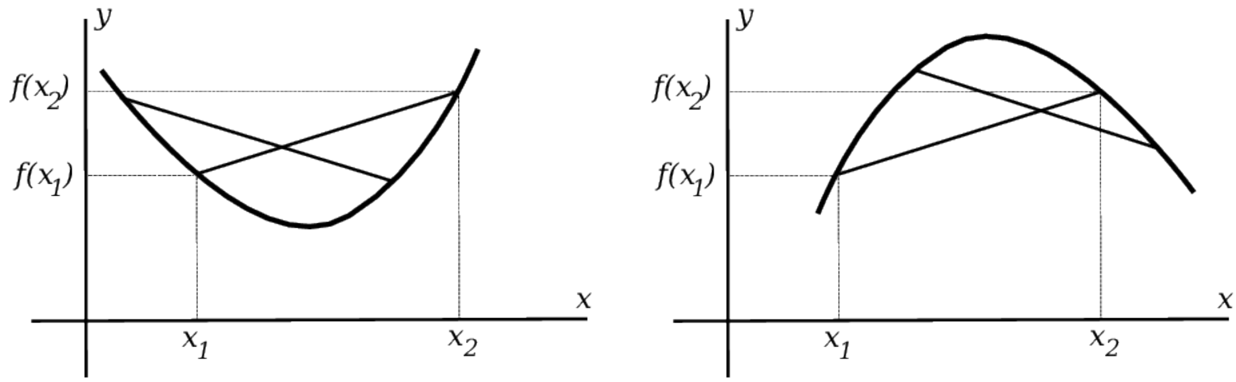
$$f''(x) \quad \text{ή} \quad \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x_0} \qquad \text{ή} \qquad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

9.1 Τοπικά ακρότατα

Κριτήριο δεύτερης παραγώγου: Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει πρώτη παράγωγο στο διάστημα (a, b), ο x_0 ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον x_0. Τότε:
(1) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) > 0$, τότε ο x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.
(2) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) < 0$, τότε ο x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

9.2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται ως **κυρτή στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Ομοίως, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται ως **κοίλη στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$.



Σχήμα 9.1: Κυρτή συνάρτηση (αριστερά) και κοίλη συνάρτηση (δεξιά).

Αυστηρά οι έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας διατυπώνονται ως εξής:
α) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \leq (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

b) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \geq (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

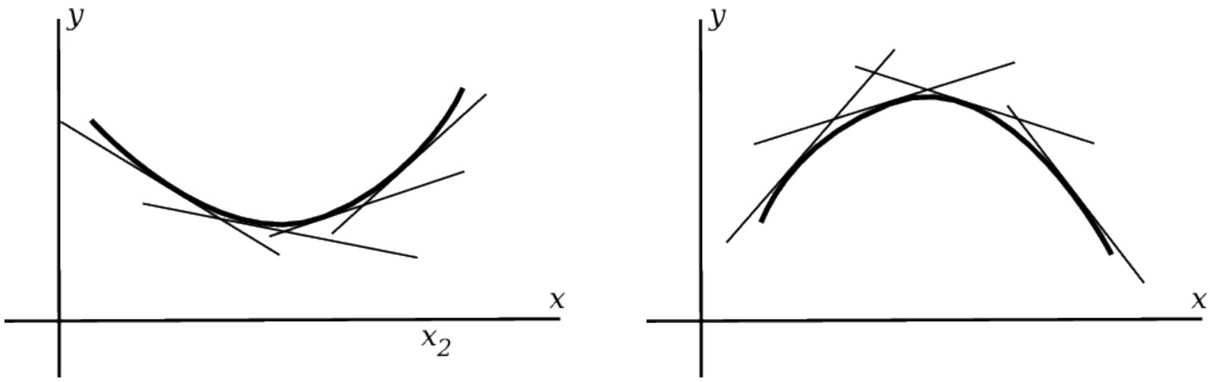
Με τις παρακάτω προτάσεις μπορούμε να χαρακτηρίζουμε πότε μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα I.

Πρόταση 9.2.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I
2) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I.

Η προηγούμενη πρόταση έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο σε κάθε σημείο σε ένα διάστημα I και ας συμβολίσουμε με λ_x την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x, f(x))$. Η κλίση της λ_x είναι ίση με $f'(x)$.Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν καθώς το x αυξάνεται η κάθε εφαπτόμενη ευθεία περιστρέφεται με φορά αντίθετη από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Ανάλογα, η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν καθώς το x αυξάνεται η κάθε εφαπτόμενη ευθεία περιστρέφεται με ίδια με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Μια παραλλαγή της προηγούμενης πρότασης είναι η ακόλουθη

Πρόταση 9.2.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο

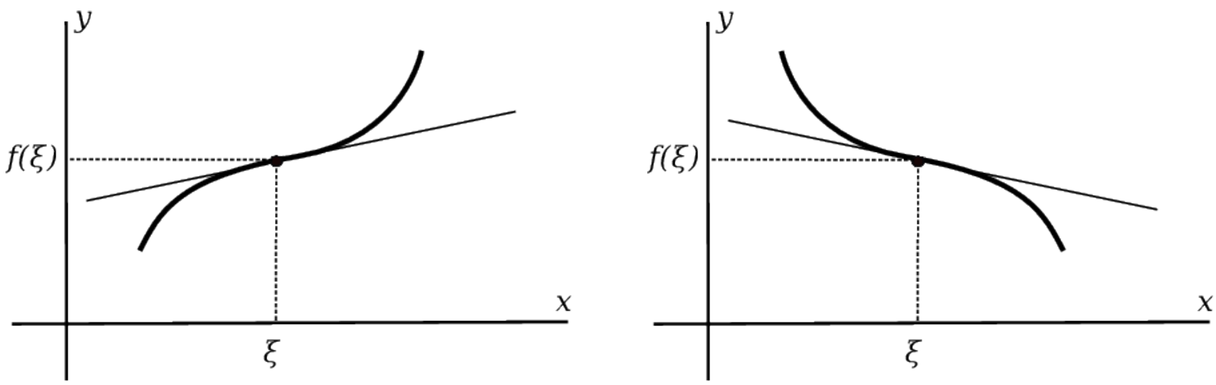


Σχήμα 9.2: Αύξουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κυρτή συνάρτηση (αριστερά). Φθίνουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κοίλη συνάρτηση (δεξιά).

του I.
2) Η $y = f(x)$ *είναι κοίλη στο* I *αν και μόνο αν ισχύει* $f''(x) \leq 0$ *για κάθε* x *εσωτερικό σημείο του* I.

9.3 Σημεία καμπής

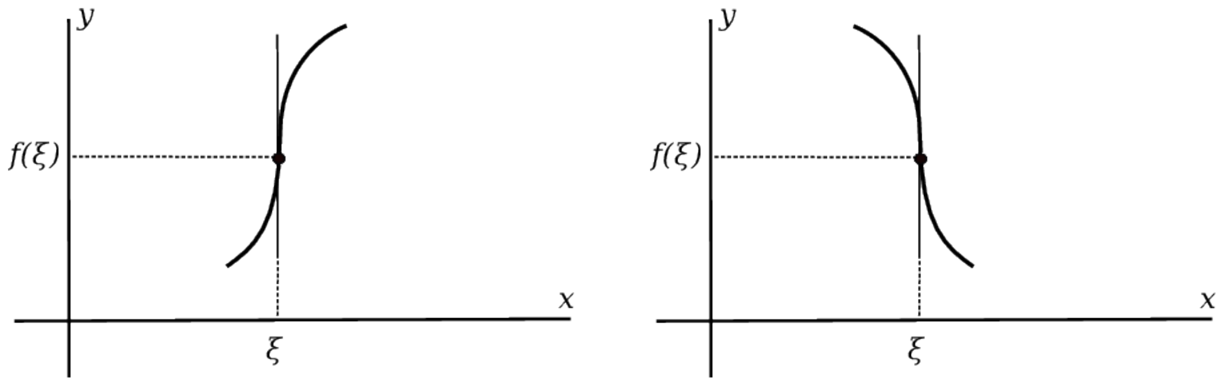
Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ότι ο ξ ανήκει στο (a, b). Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Ο ξ είναι **σημείο καμπής** της $y = f(x)$ αν το μέρος του γραφήματος που είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και δεξιά του και το μέρος γραφήματος που είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ κι αριστερά του είναι στα ίδια ημιεπίπεδα που ορίζει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα στο $(\xi, f(\xi))$. Επίσης, και συμβαίνει το ίδιο και η παράγωγο $f'(\xi)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$ θα λέμε και πάλι ότι το ξ είναι **σημείο καμπής** της $y = f(x)$. Με τις παρακάτω προτάσεις



Σχήμα 9.3: Σημείο καμπής όταν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός.

έχουμε διάφορα κριτήρια για να αποφασίζουμε αν ο ξ είναι σημείο καμπής της $y = f(x)$.

Πρόταση 9.3.1. *Έστω ότι η* $y = f(x)$ *είναι ορισμένη στο διάστημα* (a, b) *και ο* ξ *ανήκει στο*



Σχήμα 9.4: Σημείο καμπής όταν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

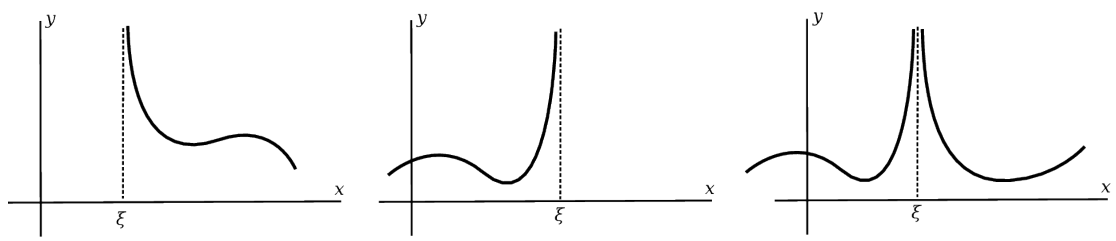
(a,b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα $(c,\xi]$ και κοίλη σε κάποιο διάστημα (ξ,d) ή αντίθετα, αν είναι κοίλη σε κάποιο διάστημα $(c,\xi]$ και κυρτή σε κάποιο διάστημα (ξ,d), τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $y = f(x)$.

Πρόταση 9.3.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a,b) και ο ξ ανήκει στο (a,b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (c,ξ) και $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (ξ,d) ή αντίθετα, αν είναι $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (c,ξ) και $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (ξ,d), τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $y = f(x)$.*

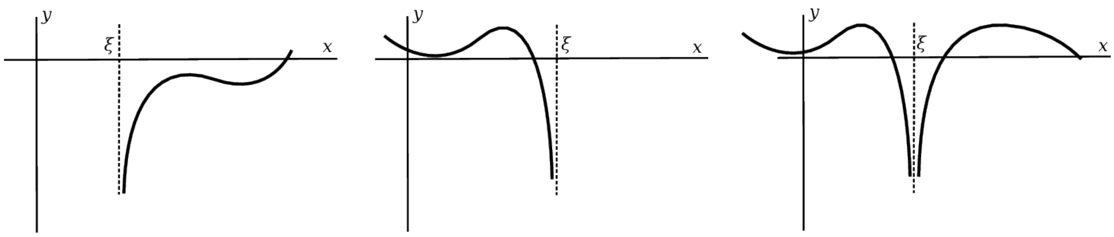
Παράδειγμα 9.3.3. Η $f(x) = x^3$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x$. Επειδή είναι $f''(x) \leq 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f''(x) \geq 0$ στο $(0, +\infty)$, ο $x = 0$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

9.4 Ασύμπτωτες

Ορισμός 9.4.1. Η ευθεία $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της $y = f(x)$ σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi^\pm} f(x) = \pm\infty$.



Σχήμα 9.5: $\lim_{x\to\xi^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ κατακόρυφη ασύμπτωτος στο $+\infty$.



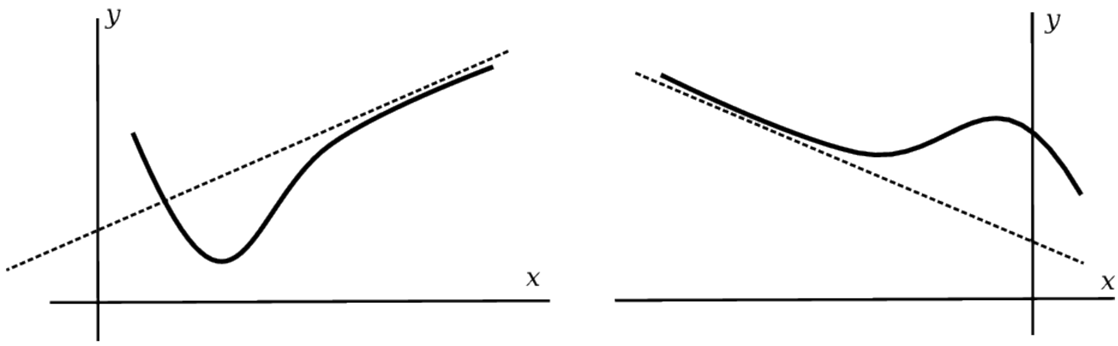
Σχήμα 9.6: $\lim_{x\to\xi^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$ κατακόρυφη ασύμπτωτος στο $-\infty$.

Ορισμός 9.4.2. Μια ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu\, x + \nu$ χαρακτηρίζεται ως **(πλάγια) ασύμπτωτη στο** $+\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - \mu\, x - \nu\Big) = 0$$

Ορισμός 9.4.3. Μια ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu\, x + \nu$ χαρακτηρίζεται ως **(πλάγια) ασύμπτωτη στο** $-\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(-\infty, b)$ και

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - \mu\, x - \nu\Big) = 0$$



Σχήμα 9.7: Πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο $+\infty$ (αριστερά) και στο $-\infty$ (δεξιά). Το γράφημα της $y = f(x)$ προσεγγίζει την ευθεία ℓ κοντά στο $+\infty$ $(-\infty)$.

Τρόπος εύρεσης πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας: Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ (αντίστοιχα $(-\infty, b)$). Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \mu \in \mathbb{R} \qquad \Big(\text{αντίστοιχα} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \mu \in \mathbb{R}\Big)$$

και στην συνέχεια για τον συγκεκριμένο αριθμό $\mu \in \mathbb{R}$, το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - \mu\, x\Big) = \nu \in \mathbb{R} \qquad \Big(\text{αντίστοιχα} \qquad \lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - \mu\, x\Big) = \nu \in \mathbb{R}\Big)$$

τότε η ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu\, x + \nu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) στο γράφημα της $y = f(x)$.

Η **οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία** στο γράφημα της $y = f(x)$ είναι μια ειδική περίπτωση πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας. Πράγματι, μια οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία είναι μια πλάγια ασύμπτωτη ευθεία με κλίση ίση με 0, ή ισοδύναμα $\mu = 0$, και $\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Κεφάλαιο 10

Σειρές Taylor

Αν η f έχει παράγωγο f' σ'ένα διάστημα I, και αν η f' με την σειρά της είναι παραγωγίσιμη στο I, σημειώνουμε την παράγωγο της f' με f'' και ονομάζουμε την f'' την δεύτερη παράγωγο της f. Συνεχίζοντας επαγωγικά με αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε διαδοχικά τις συναρτήσεις

$$f,\ f',\ f'',\ f^{(3)},\ \ldots,\ f^{(n)}$$

στις οποίες η καθεμιά συνάρτηση είναι η παράγωγος της προηγούμενης συνάρτησης. Η $f^{(n)}$ ονομάζεται η n-παράγωγος, ή η n-τάξης παράγωγος της f.

Για να υπάρχει η $f^{(n)}(x)$ σε ένα σημείο x, θα πρέπει η $f^{(n-1)}(t)$ να υπάρχει σε μια περιοχή του x (ή σε μια περιοχή της μορφής $[x, \varepsilon)$ ή $(\varepsilon, x]$ αν το x είναι άκρο του πεδίου ορισμού της f), και η $f^{(n-1)}$ θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x. Αφού η $f^{(n-1)}$ πρέπει να υπάρχει σε μια περιοχή του x, η $f^{(n-2)}$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στην περιοχή αυτή του x.

10.1 Το θεώρημα Taylor

Το θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange: Υποθέτουμε ότι η f ορίζεται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που περιέχει τον x_0, και n φυσικός. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η f έχει παραγώγους μέχρι και n τάξης, που είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$, και υπάρχει η $f^{(n+1)}(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει κάποιος ξ γνησίως ανάμεσα στους x και x_0 ώστε να είναι

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ και λέγεται n-παραγοντικό[1].

[1] Γενικά, το $0!$ ορίζεται να είναι 1 και επαγωγικά $n! = n \times (n-1)!$ οπότε $4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.

Για $n = 1$ το παραπάνω θεώρημα είναι το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) του διαφορικού λογισμού (δες σελ. 70 Πρόταση 7.8). Το

$$R_n(x, x_0; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

όπου $x < \xi < x_0$ ή $x_0 < \xi < x$, λέγεται σφάλμα τύπου Lagrange.

Γενικά, το θεώρημα μας πληροφορεί ότι η f μπορεί να προσεγγισθεί από ένα πολυώνυμο βαθμού n, και ότι η παραπάνω σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το σφάλμα της προσέγγισης αν γνωρίζουμε τις τιμές που φράσσεται η $|f^{(n+1)}(x)|$.

Παράδειγμα 10.1.1. Για παράδειγμα, έστω $f(x) = \sqrt{x}$ και $x_0 = 4$, $x = 4.00001$ και $n = 2$. Τότε το θεώρημα του Taylor μας πληροφορεί ότι

$$\begin{aligned}\sqrt{4.00001} &= \sqrt{4} + \tfrac{1}{1!}\tfrac{1}{2\sqrt{4}}(4.00001 - 4) - \tfrac{1}{2!}\tfrac{1}{4\sqrt{4^3}}(4.00001 - 4)^2 + \tfrac{1}{3!}\tfrac{3}{8\sqrt{\xi^5}}(4.00001 - 4)^3 \\ &= 2 + 2.5 \times 10^{-6} - 1.5625 \times 10^{-12} + 6.25 \times 10^{-17}\tfrac{1}{\sqrt{\xi^5}} = \\ &= 2.00000249999843750 + 6.25 \times 10^{-17}\tfrac{1}{\sqrt{\xi^5}}\end{aligned}$$

για κάποιον ξ με $4 < \xi < 4.00001$. Όμως

$$0 < 6.25 \times 10^{-17}\frac{1}{\sqrt{\xi^5}} < \frac{6.25}{\sqrt{4^5}} \times 10^{-17} = 0.1953125 \times 10^{-17}$$

οπότε

$$2.00000249999843750 < \sqrt{4.00001} < 2.000002499998437501953125$$

και συνεπώς ο 2.00000249999843750 προσσεγγίζει τον $\sqrt{4.00001}$ με ακρίβεια ως και δέκατου έβδομου δεκαδικού ψηφίου. Συγκρίνετε με την προσεγγιστική τιμή

$$\sqrt{4.00001} \approx 2.000002499998437501953121948248$$

με ακρίβεια μέχρι 30 δεκαδικά ψηφία.

10.2 Σειρές Taylor

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I, το οποίο περιέχει το x_0. Τότε για κάθε x στο I και για κάθε φυσικό n ισχύει ο τύπος

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0; f)$$

όπου $R_n(x, x_0; f)$ το σφάλμα τύπου Lagrange (ή ολοκληρωτικού τύπου όπως θα δούμε παρακάτω). Αν για κάθε x στο I το σφάλμα $R_n(x, x_0; f)$ τείνει να γίνει μηδέν όσο μεγαλώνει το n, τότε ονομάζουμε **σειρά Taylor της συνάρτησης** $f(x)$ **στον** x_0 το εξής άπειρο άθροισμα:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Μια διεξοδική διαπραγμάτευση των σειρών Taylor προϋποθέτει γνώσεις ακολουθιών και σειρών πραγματικών αριθμών που ξεφεύγει από τους στόχους του μαθήματος. Παρακάτω παραθέτουμε τις σειρές Taylor ορισμένων συνηθισμένων συναρτήσεων στο $x_0 = 0$, καθώς και τα αντίστοιχα διαστήματα σύγκλισης των σειρών

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad (-1 < x \leq 1),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

Από τις παραπάνω σειρές για κατάλληλη επιλογή του x (ποιές είναι αυτές?) βρίσκουμε τους παρακάτω ενδιαφέροντες τύπους:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots, \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \,, \qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots$$

Μια εναλλακτική μορφή γραφής της σειράς Taylor είναι να θέσουμε την διαφορά $x - x_0 = h$, οπότε $x = x_0 + h$, και το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor γράφεται ως εξής

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,h + \frac{f''(x_0)}{2!}\,h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,h^n + \cdots \,.$$

10.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να βρεθούν οι τρεις πρώτοι μη-τετριμμένοι όροι στην σειρά Taylor στον $x_0 = 0$ της συνάρτησης $y = e^{-x^2}$.

Άσκηση 2. Να αναπτυχθεί το πολυώνυμο $x^3 - x^2 + x + 1$ σε δυνάμεις του $x - 1$.

Άσκηση 3. Γνωρίζοντας την σειρά Taylor στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων που δίνονται στην προηγούμενη σελίδα των σημειώσεων να υπολογισθούν τα ακόλουθα άπειρα αθροίσματα

$$i)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}\, \pi^{2n}}{(2n)!}\,, \qquad ii)\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \,, \qquad iii)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \,.$$

Άσκηση 4. Έστω

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots$$

η σειρά Taylor της $y = f(x)$ στο 0.
Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι άρτια (περιττή) σε κάποιο διάστημα με μέσο 0 αν και μόνο αν η σειρά Taylor περιέχει μόνο δυνάμεις του x με άρτιους (περιττούς) εκθέτες.

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα σε σειρά Taylor στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων που δίνονται στην προηγούμενη σελίδα να αποδειχθεί ότι

$$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,, \qquad ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\,, \qquad iii)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

$$iv)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 1\,, \qquad v)\ \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}\,, \qquad vi)\ \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = 0\,.$$

Κεφάλαιο 11

Το ολοκλήρωμα Riemann

Το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού οποιασδήποτε επιφάνειας (όπως κυκλικοί τομείς, δακτύλιοι και δίσκοι, ελλειπτικοί δίσκοι, παραβολικά και υπερβολικά χωρία κτλ) είναι γνωστό από την αρχαιότητα. Για απλά γεωμετρικά σχήματα, όπως τρίγωνα, παραλληλόγραμμα και τραπέζια, ο υπολογισμός του εμβαδού τους είναι σχετικά εύκολη υπόθεση και βρίσκεται μέσω των γνωστών μας στοιχειωδών τύπων. Χρησιμοποιώντας ως δομικά στοιχεία τα γεωμετρικά αυτά σχήματα μπορούμε να φτιάξουμε πιο σύνθετες επιφάνειες, όπως πολυγωνικές, οπότε ο υπολογισμός του εμβαδού των τελευταίων είναι απλά το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων.

Το ουσιαστικό ερώτημα που ανακύπτει είναι αν υπάρχει μια ανάλογη μέθοδος με την οποία να μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό μιας γενικά καμπυλόγραμμης επιφάνειας. Για λόγους απλούστευσης ας θεωρούμε ότι το εμβαδό που θέλουμε να υπολογίσουμε περικλείεται από τον άξονα των x και από το γράφημα μιας συνεχούς [1] συνάρτησης $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

11.1 Η μέθοδος

Επιλέγουμε $n + 1$ το πλήθος, διαδοχικά σημεία $x_0 = a\,, x_1\,, x_2\,, \dots x_{n-1}\,, x_n = b$, και χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n μικρότερα διαδοχικά υποδιαστήματα $[a, x_1] = [x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots [x_{n-2}, x_{n-1}]$ και $[x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1}, b]$. Τα σημεία $x_0 = a\,, x_1\,, x_2\,, \dots x_{n-1}\,, x_n = b$ λέγονται **διαιρετικά σημεία** και το σύνολό τους $\Delta = \{x_0\,, x_1\,, x_2\,, \dots x_{n-1}\,, x_n\}$ το ονομάζουμε **διαμέριση** του διαστήματος $[a, b]$.

Για παράδειγμα, μια πολύ απλή διαμέριση είναι η

$$x_0 = a\,,\ x_1 = a + \tfrac{b-a}{n},\ x_2 = x_1 + \tfrac{b-a}{n} = a + 2\,\tfrac{b-a}{n},\ \dots x_{n-1} = a + (n-1)\,\tfrac{b-a}{n},\ x_n = a + n\,\tfrac{b-a}{n} = b\,,$$

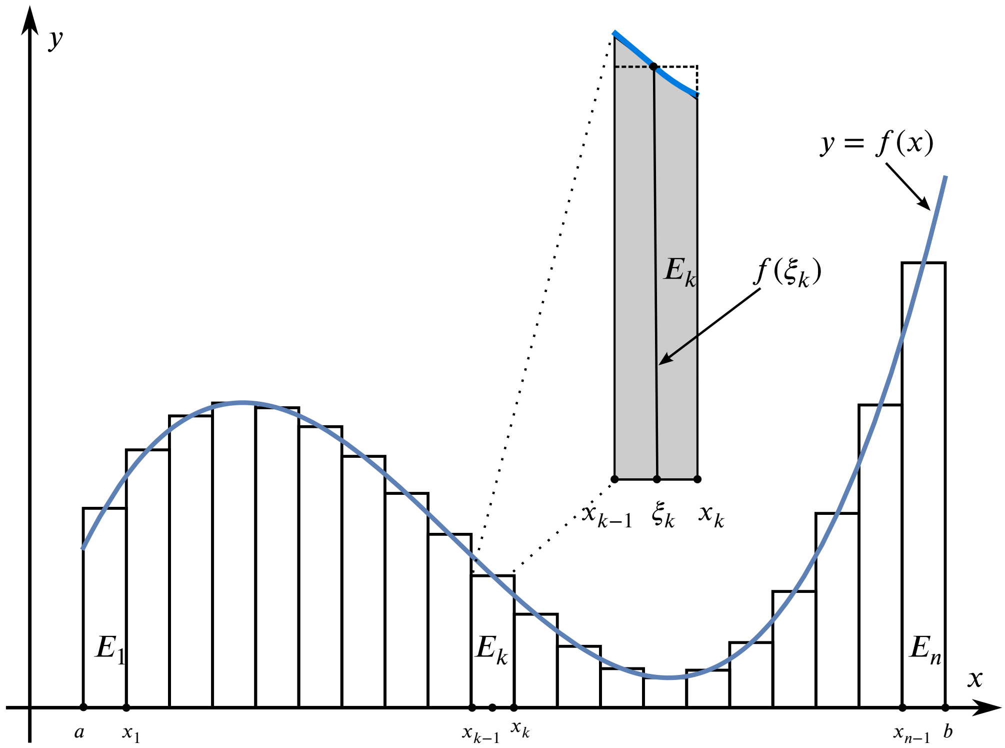
δηλαδή χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους $\frac{b-a}{n}$.

[1]χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο, αφού όπως θα δούμε παρακάτω μια συνάρτηση μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann χωρίς να είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Ονομάζουμε **πλάτος** μιας διαμέρισης Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων που ορίζονται από αυτήν, δηλαδή

$$\text{πλάτος}(\Delta) = \max\{x_k - x_{k-1} \quad | \quad 1 \le k \le n\}\,.$$

Η μοναδική απαίτηση για την επιλογή της διαμέρισης Δ είναι ότι το πλάτος της πρέπει να είναι αρκετά μικρό. Αφού επιλέξουμε μια τυχαία διαμέριση Δ του $[a, b]$, παρατηρούμε ότι το εμβαδό E που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το άθροισμα των εμβαδών E_i των επιμέρους στοιχειωδών επιφανειών A_i, $i = 1, \dots n$, όπου η A_k στοιχειώδης επιφάνεια σχηματίζεται ως εξής: κάτω βάση έχει το ευθύγραμμο τμήμα $[x_{k-1}, x_k]$, πάνω βάση έχει το γράφημα της $y = f(x)$, δεξιά πλευρά έχει το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία με συντεταγμένες $(x_k, 0)$ και $\big(\, x_k, f(x_k)\,\big)$, κι αριστερή πλευρά to ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία με συντεταγμένες $(x_{k-1}, 0)$ και $\big(\, x_{k-1}, f(x_{k-1})\,\big)$.



Σχήμα 11.1: Χωρισμός σε κατακόρυφες στοιχειώδεις επιφάνειες

Οπότε

$$E = E_1 + \cdots + E_n\,.$$

Ωστόσο, το πρόβλημα υπολογισμού του Ε παραμένει γιατί ούτε για τις στοιχειώδεις επιφάνειες A_i, $i = 1, \dots n$, μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο εμβαδό E_i, αφού η πάνω βάση της κάθε A_i είναι μια καμπύλη γραμμή. Αν όμως το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, τότε το κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, και συνεπώς όταν το x διατρέχει ένα οποιοδήποτε από αυτά τα υποδιαστήματα, το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ δεν είναι μεν σταθερό, αλλά μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν αλλάζει σημαντικά, δηλαδή είναι περίπου σταθερό. Αυτό είναι συνέπεια του ότι θεωρήσαμε ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, κι ετσι όσο πιο μικρό είναι το πλάτος της διαμέρισης τόσο πιο μικρές είναι οι διακυμάνσεις του ύψους σε κάθε υποδιάστημα. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε **ενδιάμεσο σημείο** ξ_k στο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, τότε οι αντίστοιχες τιμές $f(x)$ στο υποδιάστημα αυτό είναι περίπου ίσες με $f(\xi_k)$, και συνεπώς το εμβαδό της στοιχειώδους επιφάνειας A_k είναι περίπου ίσο με το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου Π_k που έχει βάση το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_k)$. Δηλαδή, το εμβαδό της κάθε επιμέρους στοιχειώδους επιφάνειας A_i είναι περίπου ίσο με

$$E_i \approx f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})\,, \qquad i = 1, 2, \ldots n\,,$$

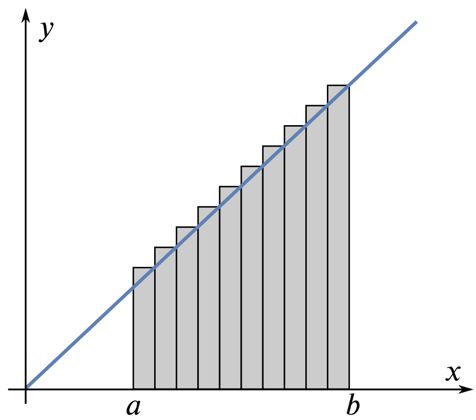
και συνολικά το εμβαδό E που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι περίπου ίσο με

$$E \approx f(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})\,.$$

Το παραπάνω άθροισμα εξαρτάται από τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, την συνάρτηση $f(x)$, την διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$, καθώς και από το σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \ldots \xi_n\}$ των ενδιάμεσων σημείων και θα το συμβολίζουμε με $\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi)$, δηλαδή

$$\Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) = f(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + f(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})\,.$$

Παράδειγμα 11.1.1. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό E του τραπεζίου που σχηματίζεται από το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x$, τον x-άξονα στο διάστημα $[a, b]$ και από τις κατακόρυφες παράλληλες ευθείες $x = a$, $x = b$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Προφανώς μπορούμε να υπολογίσουμε το E με στοιχειώδη γεωμετρία αφού είναι απλά η διαφορά του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου με κορυφές τα σημεία με συντεταγμένες $(0, 0)$, $(b, 0)$ και (b, b) και του ορθογωνίου με κορυφές τα σημεία με συντεταγμένες $(0, 0)$, $(a, 0)$ και (a, a). Δηλαδή



Σχήμα 11.2: Διαμέριση τραπεζίου

$$E = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}\,a^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την μέθοδο υπολογισμού εμβαδού που αναπτύξαμε στα προηγούμενα θεωρώντας την διαμέριση

$$\Delta = \{a, a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, \ldots a + n\,\tfrac{b-a}{n} = b\}$$

όπου όλα τα υποδιαστήματα έχουν το ίδιο πλάτος $\frac{b-a}{n}$. Επιπλέον, για ευκολία στις πράξεις επιλέγουμε το σύνολο των ενδιάμεσων σημείων να είναι το

$$\Xi = \{a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, a + \tfrac{b-a}{n}, \ldots a + n\,\tfrac{b-a}{n} = b\}$$

δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξί άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Τότε το άθροισμα είναι ίσο με

$$
\begin{aligned}
\Sigma(f,a,b,\Delta,\Xi) &= f(\xi_1)\,(x_1-x_0)+f(\xi_2)\,(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)\,(x_n-x_{n-1}) \\
&= \left(a+\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n}+\left(a+2\,\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n}+\cdots+\left(a+n\,\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} \\
&= \left(n\,a+\left[1+2+\cdots+(n-1)+n\right]\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} \\
&= \left(n\,a+\tfrac{n(n+1)}{2}\,\tfrac{b-a}{n}\right)\tfrac{b-a}{n} \qquad = \quad a(b-a)+\tfrac{n+1}{2\,n}\,(b-a)^2\,,
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο για το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου

$$1+2+3+\cdots(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Συνεπώς, όταν το πλάτος $\frac{b-a}{n}$ της διαμέρισης γίνει αρκετά μικρό, δηλαδή το n γίνει όσο μεγάλο θέλουμε ($n\to\infty$) τότε το άθροισμα

$$\Sigma(f,a,b,\Delta,\Xi)=a(b-a)+\frac{n+1}{2\,n}\,(b-a)^2$$

θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά στην τιμή του εμβαδού E που θέλουμε να υπολογίσουμε. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι

$$\mathrm{E}=\lim_{n\to\infty}\left(a(b-a)+\frac{n+1}{2\,n}\,(b-a)^2\right)=a(b-a)+\frac{1}{2}\,(b-a)^2=\frac{1}{2}\,(b^2-a^2)$$

που είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε προηγουμένως με στοιχειώδη γεωμετρία. Συνεπώς η μέθοδος που αναπτύξαμε δουλεύει!

11.2 Το ορισμένο ολοκλήρωμα Riemann

Γενικότερα, έστω $y=f(x)$ ορισμένη και φραγμένη στο διάστημα $[a,b]$, για την οποία δεν υποθέτουμε ότι είναι συνεχής ούτε ότι όλες οι τιμές της είναι μη αρνητικές στο $[a,b]$. Παίρνουμε τυχαία διαμέριση $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots x_n\}$ του $[a,b]$ και αντίστοιχο τυχαίο σύνολο $\Xi=\{\xi_1,\ldots\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\Sigma(f,a,b,\Delta,\Xi)=f(\xi_1)\,(x_1-x_0)+f(\xi_2)\,(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)\,(x_n-x_{n-1})\,.$$

Το $\Sigma(f,a,b,\Delta,\Xi)$ ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της $y=f(x)$ στο $[a,b]$ ως προς την διαμέριση Δ και το σύνολο Ξ των ενδιάμεσων σημείων. Έστω ότι καθώς το πλάτος της Δ γίνεται όσο μικρό θέλουμε, το άθροισμα $\Sigma(f,a,b,\Delta,\Xi)$ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε σε ένα πραγματικό αριθμό τον οποίο σημειώνουμε με I. Τότε λέμε ότι η $y=f(x)$ είναι **ολοκληρώσιμη** κατά

Riemann στο $[a, b]$ και συμβολίζουμε τον αριθμό I με

$$I = \int_a^b f(x)\,d\,x\,.$$

Συμβολικά τα προηγούμενα συνοψίζονται στο εξής

$$\lim_{\text{πλάτος } (\Delta)\to 0} \Sigma(f, a, b, \Delta, \Xi) = \int_a^b f(x)\,d\,x\,.$$

Φυσικά τα παραπάνω θα πρέπει να ισχύουν για κάθε διαμέριση Δ και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ. Όμως αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$, τότε για να υπολογίσουμε τον αριθμό I αρκεί να περιοριστούμε σε κάποια διαμέριση Δ και κάποια επιλογή ενδιάμεσων σημείων Ξ και να εξασφαλίσουμε ότι το πλάτος της διαμέρισης που επιλέξαμε είναι αρκετά μικρό.

Οι παρακάτω προτάσεις μας εξασφαλίζουν την ολοκληρωσιμότητα κατά Riemann μιας μεγάλης κλάσης συναρτήσεων.

Πρόταση 11.2.1. *Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Πρόταση 11.2.2. *Αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται **τμηματικά συνεχής** σε ένα διάστημα $[a, b]$, αν η συνάρτηση ορίζεται στο $[a, b]$ και είναι συνεχής στο $[a, b]$ εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$. Επιπλέον, σε κάθε σημείο ασυνέχειας θα πρέπει να υπάρχουν τα αριστερά και δεξιά όρια. Στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ αρκεί να υπάρχει ένα από τα δυό πλευρικά όρια (στο a αρκεί να υπάρχει το από δεξιά όριο και στο b άκρο το από αριστερά όριο).

Πρόταση 11.2.3. *Αν η $y = f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

11.3 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων Riemann

Πρόταση 11.3.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και λ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Τότε και η $y = \lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\boxed{\int_a^b \lambda\, f(x)\,d\,x = \lambda \int_a^b f(x)\,d\,x}$$

Πρόταση 11.3.2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε και η $y = f(x) + g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\boxed{\int_a^b \big(f(x)+g(x) \big)\, d\,x = \int_a^b f(x)\, d\,x + \int_a^b g(x)\, d\,x}$$

Συνδυάζοντας τις δυο προηγούμενες προτάσεις έχουμε ότι αν οι συναρτήσεις $y = f(x)$ $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και λ, μ είναι δυο πραγματικοί αριθμοί τότε και η $y = \lambda\, f(x) + \mu\, g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^b \big(\lambda\, f(x) + \mu\, g(x)\big)\, d\,x = \lambda \int_a^b f(x)\, d\,x + \mu \int_a^b g(x)\, d\,x$$

Γενικότερα, αν οι συναρτήσεις $y = f_1(x)$, … $y = f_k(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε και η $y = \lambda_1\, f(x) + \cdots + \lambda_k\, f_k(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει

$$\int_a^b \big(\lambda_1\, f_1(x) + \ldots + \lambda_k\, f_k(x)\big)\, d\,x = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, d\,x + \ldots + \lambda_k \int_a^b f_k(x)\, d\,x$$

Πρόταση 11.3.3. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε και η $y = f(x)\, g(x)$ είναι και αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Όμως δεν υπάρχει τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου δυο συναρτήσεων με τα επιμέρους ολοκληρώματα των δυο συναρτήσεων.

Πρόταση 11.3.4. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και υπάρχει κάποιος $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \geq M$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε και η $y = \frac{1}{f(x)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Όπως και στην προηγούμενη πρόταση για το γινόμενο συναρτήσεων, δεν υπάρχει τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

Πρόταση 11.3.5. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται στο $[a, b]$ εκτός από σε ένα πεπερασμένου πλήθους σημείων του $[a, b]$. Αν μία από τις δυο συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε και η άλλη είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\int_a^b f(x)\, d\,x = \int_a^b g(x)\, d\,x$$

Πρόταση 11.3.6. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη $[a, b]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και σε κάθε υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$.*

Πρόταση 11.3.7. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και στο $[b, c]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και ισχύει*

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,d\,x = \int_a^b f(x)\,d\,x + \int_b^c f(x)\,d\,x}$$

Γενικότερα, αν η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στα $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$ ... $[a_{k-1}, a_k]$ τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a_1, a_k]$ και ισχύει

$$\int_{a_1}^{a_k} f(x)\,d\,x = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,d\,x + \cdots + \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,d\,x$$

Πρόταση 11.3.8. *Έστω ότι οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και ισχύει ότι $f(x) \le g(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(x)\,d\,x \le \int_a^b g(x)\,d\,x\,.$$

Ειδικότερα,

α) Αν η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και το A είναι ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα της $f(x)$ στο $[a, b]$, δηλαδή $f(x) \le A$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)\,d\,x \le A\,(b - a)\,.$$

β) Αν η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και το K είναι ένα οποιοδήποτε κάτω φράγμα της $f(x)$ στο $[a, b]$, δηλαδή $f(x) \ge K$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε ισχύει ότι

$$\int_a^b f(x)\,d\,x \ge K\,(b - a)\,.$$

Πρόταση 11.3.9. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε και η $|f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη x στο $[a, b]$ και ισχύει ότι*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,d\,x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,d\,x}$$

11.4 Μέση τιμή συνάρτησης

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Ορίζουμε ως **μέση τιμή της** $y = f(x)$ **στο** $[a, b]$ τον αριθμό

$$\boxed{\text{μέση τιμή της } f(x) \text{ στο } [a,b] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,d\,x}$$

Αν η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι ο αριθμός μ τότε

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,d\,x = \mu \Rightarrow \int_a^b f(x)\,d\,x = \mu\,(b-a) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^b \mu\ d\,x$$

που σημαίνει ότι η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι η τιμή εκείνη που οφείλει να έχει η σταθερή συνάρτηση στο $[a, b]$ έτσι ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι ίσο με το οκοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$.

Πρόταση 11.4.1. (Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$ τέτοιος ώστε*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,d\,x = f(\xi)$$

Για παράδειγμα, η $y = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, 2]$ και $\frac{1}{2-1}\int_1^2 x\,d\,x = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$. Ο ξ στο $[1, 2]$ για τον οποίο ισχύει $f(\xi) = \frac{3}{2}$ είναι ο $\xi = \frac{3}{2}$.

11.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Τα παρακάτω αθροίσματα είναι αθροίσματα Riemann. Να γραφεί το όριό τους καθώς το $n \to \infty$ στην μορφή ενός ολοκληρώματος Riemann στο $[0, 1]$

α)
$$\frac{n}{1^2+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2} + \frac{n}{n^2+n^2}$$

β)
$$\frac{1}{1^2+n^2} + \frac{2}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n-1}{(n-1)^2+n^2} + \frac{n}{n^2+n^2}$$

γ)
$$\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \cdots + \sqrt{n+(n-1)} + \sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$$

(*Υπόδειξη:* Για το α) παρατηρούμε ότι ο k-στός όρος του αθροίσματος γράφεται

$$\frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\,\frac{1}{n} = f(\xi_k)\,(x_x - x_{k-1})$$

για κατάλληλη συνάρτηση $y = f(x)$ στο $[0, 1]$, κατάλληλη διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ και κατάλληλη επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_0, \ldots x_n\}$. Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι το πλάτος της διαμέρισης γίνεται όσο μικρό θέλουμε όταν $n \to \infty$, οπότε έχουμε ένα ολοκλήρωμα Riemann. Με όμοιο τρόπο λύνονται κι οι υπόλοιπες.)

Άσκηση 2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a, b]$ και $A = f(a)$, $B = f(b)$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει η $x = f^{-1}(y)$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_a^b f(x)\, d\, x + \int_A^B f^{-1}(y)\, d\, y = B\, b - A\, a\,.$$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας αυτής?
(*Υπόδειξη*: Θεωρήστε διαμέριση $\Delta_x = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχη διαμέριση $\Delta_y = \{y_0 = A, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n = B\}$ του $[A, B]$ με $y_k = f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots n$. Τα αθροίσματα $\Sigma_1 = y_1(x_1 - x_0) + \cdots + y_n(x_n - x_{n-1})$ και $\Sigma_2 = x_0(y_1 - y_0) + \cdots + x_{n-1}(y_n - y_{n-1})$ είναι αθροίσματα Riemann για το πρώτο και δεύτερο ολοκλήρωμα, αντίστοιχα, για κατάλληλα ενδιάμεσα σημεία (ποιά είναι αυτά ?) Υπολογίστε το άθροισμα $\Sigma_1 + \Sigma_2$ των δυο αθροισμάτων.)

Άσκηση 3. Να αποδειχθεί ότι

$$i)\quad \frac{3}{4}\, e^{-2} \leq \int_{\frac{1}{2}}^{2} x\, e^{-x}\, d\, x \leq 3\, e^{-1/2}\,, \qquad ii)\quad t\, e^{-2\,t} \leq \int_t^{2\,t} e^{-x}\, d\, x \leq t\, e^{-t}\,, \quad (t > 0)$$

χωρίς να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα.

Άσκηση 4. Να βρεθεί η μέση τιμή της $y = x$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

Κεφάλαιο 12

Το αόριστο ολοκλήρωμα Riemann

12.1 Αντιπαράγωγοι

Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στο διάστημα I, οποιουδήποτε τύπου. Αν μια δεύτερη συνάρτηση $y = F(x)$, που ορίζεται στο ίδιο διάστημα I, έχει την ιδιότητα

$$F'(x) = f(x), \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I,$$

τότε η $y = F(x)$ λέγεται **αντιπαράγωγος** ή **παράγουσα** ή **αρχική συνάρτηση** της $y = f(x)$ στο διάστημα I.

Για παράδειγμα, η $y = \ln|x|$ είναι αντιπαράγωγος της $y = \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Έστω ότι η $y = F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $y = f(x)$ στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής

$$y = F(x) + c$$

όπου c είναι ένας οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του x), και από καμιά άλλη συνάρτηση.

Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της $y = x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$y = \frac{y^3}{3} + c$$

όπου c μια αυθαίρετη σταθερή.

Θα πρέπει να προσεχθεί ότι αν μια συνάρτηση έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης δυο ξένων διαστημάτων, τότε δεν σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι σταθερή στην ένωση των δυο αυτών διαστημάτων. Για παράδειγμα η βηματική συνάρτηση

$$y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αφού είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Όμως, δεν είναι σταθερή στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αφού η τιμή της εξαρτάται από το x καθώς αυτό διατρέχει το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Οπότε καταλαβαίνουμε γιατί οι παραπάνω διατυπώσεις για τις αντιπαραγώγους αναφέρονται σε διάστημα και όχι σε στην ένωση περισσότερων του ενός διαστημάτων.

Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = \ln|x| + c$, όπου c μια σταθερά. Όμως, οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι όλες οι συναρτήσεις τις μορφής

$$y = \begin{cases} \ln|x| + c_1\,, & x < 0 \\ \ln|x| + c_2\,, & x > 0 \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι δυο αυθαίρετες σταθερές (ανεξάρτητες του x), όχι απαραίτητα ίσες.

12.2 Αόριστα ολοκληρώματα

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)\,d\,x\,.$$

Θεωρούμε τώρα τις εξής επεκτάσεις του συμβόλου του ολοκληρώματος

$$(i) \qquad \int_b^a f(x)\,d\,x = -\int_a^b f(x)\,d\,x\,.$$

δηλαδή επιτρέπεται να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στο κάτω μέρος του συμβόλου του ολοκληρώματος και το μικρότερο στο πάνω μέρος. Επίσης, αν η $y = f(x)$ ορίζεται μόνο στο σημείο a, τότε την θεωρούμε ολοκληρώσιμη και γράφουμε

$$(ii) \qquad \int_a^a f(x)\,d\,x = 0\,.$$

Οπότε, έχουμε ορίσει το ολοκλήρωμα της $f(x)$ για οποιαδήποτε διάταξη των a, b, με την προϋπόθεση ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αν $b > a$, ή στο $[b, a]$ αν $b < a$, ή στο σημείο a, αν $a = b$. Με αυτές στις επεκτάσεις η ιδιότητα

$$\int_a^c f(x)\,d\,x = \int_a^b f(x)\,d\,x + \int_b^c f(x)\,d\,x\,,$$

που ισχύει όταν $a < b < c$, επεκτείνεται σε όλες τις περιπτώσεις διάταξης των a, b, c, με τη προϋπόθεση η $y = f(x)$ να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από το μικρότερο μέχρι το μεγαλύτερο από τα a, b, c.

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε ένα διάστημα I οποιουδήποτε τύπου και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο a του I και στην συνέχεια θεωρούμε ένα x να διατρέχει το I και για κάθε τέτοιο x θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^x f(t)\,d\,t\,.$$

Αυτό είναι ένας αριθμός η τιμή του οποίου εξαρτάται από το x. Τέλος, παίρνουμε και μια αυθαίρετη σταθερή c που δεν εξαρτάται από τον x και ορίζουμε, λοιπόν στο I μια συνάρτηση με τύπο

$$y = F(x) = \int_a^x f(t)\, d\, t + c\,.$$

Την συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε το **αόριστο ολοκλήρωμα** της $y = f(x)$ στο διάστημα I. Ο αριθμός a που εμφανίζεται στο κάτω άκρο του ολοκληρώματος λέγεται το **αρχικό σημείο** του αόριστου ολοκληρώματος

$$y = F(x) = \int_a^x f(x)\, d\, x + c\,.$$

Η επιλογή του a είναι αυθαίρετη και αν θέλουμε να το αντικαταστήσουμε με ένα άλλο αριθμό a' στο διάστημα I, κάνουμε το εξής απλό

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, d\, t + c = \int_a^{a'} f(t)\, d\, t + \int_{a'}^x f(t)\, d\, t + c = \int_{a'}^x f(t)\, d\, t + c'\,,$$

όπου

$$c' = \int_a^{a'} f(t)\, d\, t + c\,,$$

μια νέα αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή, η αντικατάσταση του αρχικού σημείου $a \in I$ από κάποιο άλλο αριθμό $a' \in I$, ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της σταθεράς c από κάποια άλλη σταθερά c'. Οπότε η καταλληλότερη επιλογή του αρχικού σημείου στο αόριστο ολοκλήρωμα είναι αυτή που είναι πιο βολική για τις πράξεις υπολογισμού του ολοκληρώματος $\int_a^x f(t)\, d\, t$.

Για παράδειγμα, για να βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ παίρνουμε αρχικό σημείο το 0 κι έχουμε

$$\int_0^x t\, d\, t = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}\,,$$

κι έτσι το αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x$ είναι το $y = \frac{x^2}{2} + c$, όπου c μια αυθαίρετη σταθερά. Αν επιλέξουμε ένα άλλο αρχικό σημείο a τότε το αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x$ είναι

$$\int_a^x t\, d\, t = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{t=a}^{t=x} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\,,$$

και η σταθερά είναι $c = -\frac{a^2}{2}$

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο του ολοκληρώματος χωρίς όρια στις πάνω και κάτω μεριές για να δηλώσουμε ταυτόχρονα όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $y = f(x)$ σε κάποιο διάστημα I, δηλαδή

$$\boxed{\int f(x)\, d\, x = \int_a^x t\, d\, t + c\,.}$$

και με αυτόν το τρόπο δηλώνουμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων, δηλαδή μια οικογένεια συναρτήσεων που παραμετρικοποιούνται από μια πραγματική σταθερά c. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann μπορούμε να αποδείξουμε ότι για το αόριστο ολοκλήρωμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\boxed{\begin{array}{ll} i) & \displaystyle\int \big(f(x) + g(x) \big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \\ ii) & \displaystyle\int \big(\lambda f(x) \big)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx \end{array}}$$

12.3 Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.

Πρόταση 12.3.1. Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού.
Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I. Παίρνουμε οποιοδήποτε a στο I και θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$y = F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + c$$

στο I. Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο ξ στο I, τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και ισχύει

$$F'(\xi) = f(\xi)$$

Ειδικότερα, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει

$$F'(x) = f(x)$$

για κάθε x στο I.

Άμεση απόρροια της παραπάνω πρότασης είναι ότι αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμά της στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I, και αντιστρόφως.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι απόρροια του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού και έχουν μεγάλη πρακτική σημασία τόσο στον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων όσο και ορισμένων ολοκληρωμάτων Riemann:

Πρόταση 12.3.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο I και έστω ότι η $y = F(x)$ είναι μια αντιπαράγωγός της στο I.*

α) Τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x)$ στο I είναι ακριβώς όλες οι συναστήσεις $y = F(x) + c$, όπου c μια σταθερά, δηλαδή

$$\boxed{\int f(x)\,d\,x = F(x) + c \qquad (x \text{ στο } I)}$$

β) Το ολοκλήρωμα Riemann της $y = f(x)$ σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του I είναι ίσο με την διαφορά των τιμών της $y = F(x)$ στα άκρα του διαστήματος, δηλαδή

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,d\,x = F(b) - F(a) \qquad (a,\ b \text{ στο } I)}$$

Παρακάτω δίνονται μερικά βασικά αόριστα ολοκληρώματα και τα αντίστοιχα ορισμένα ολοκληρώματα Riemann καθώς και τα αντίστοιχα διαστήματα που ισχύουν:

Αόριστο	Ορισμένο	διαστήματα
$\int 1\, d\,x = x + c$	$\int_a^b 1\, d\,x = b - a$	$(-\infty, +\infty)$
$\int x^\lambda\, d\,x = \dfrac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$	$\int_a^b x^\lambda\, d\,x = \dfrac{b^{\lambda+1} - a^{\lambda+1}}{\lambda+1}$	$(-\infty, +\infty)$ $\lambda \in \mathbb{N}$ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $\lambda \in \mathbb{Z},\ \lambda \leq -2$ $[0, +\infty)$ $\lambda > 0, \lambda \notin \mathbb{Z}$ $(0, +\infty)$ $\lambda < 0, \lambda \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x}\, d\,x = \ln\|x\| + c$	$\int_a^b \frac{1}{x}\, d\,x = \ln\|b\| - \ln\|a\| = \ln \frac{b}{a}$	$(-\infty, 0)$ $(0, +\infty)$
$\int \lambda^x\, d\,x = \dfrac{\lambda^x}{\ln\lambda} + c$	$\int_a^b \lambda^x\, d\,x = \dfrac{\lambda^b - \lambda^a}{\ln\lambda}$	$(-\infty, \infty)$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$
$\int \cos x\, d\,x = \sin x + c$	$\int_a^b \cos x\, d\,x = \sin b - \sin a$	$(-\infty, \infty)$
$\int \sin x\, d\,x = -\cos x + c$	$\int_a^b \sin x\, d\,x = \cos a - \cos b$	$(-\infty, \infty)$
$\int \dfrac{1}{(\cos x)^2}\, d\,x = \tan x + c$	$\int_a^b \dfrac{1}{(\cos x)^2}\, d\,x = \tan b - \tan a$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k, \pi, \frac{\pi}{2} + k\,\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \dfrac{1}{(\sin x)^2}\, d\,x = -\cot x + c$	$\int_a^b \dfrac{1}{(\sin x)^2}\, d\,x = \cot a - \cot b$	$\left(k\,\pi, \pi + k\,\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x = \arcsin x + c$	$\int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x = \arcsin b -$ $\arcsin a$	$(-1, 1)$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x = -\arccos x + c$	$\int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, d\,x = \arccos a -$ $\arccos b$	$(-1, 1)$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\, d\,x = \arctan x + c$	$\int_a^b \dfrac{1}{1+x^2}\, d\,x = \arctan b -$ $\arctan a$	$(-\infty, +\infty)$

Για τα ολοκληρώματα 9, 10 σημειώστε ότι ισχύει η ταυτότητα $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

12.4 Μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων Riemann

12.4.1 Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής

Πρόταση 12.4.1. *Έστω ότι η $u = f(y)$ είναι συνεχής στο διάστημα I, η $y = g(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και οι τιμές της $y = g(x)$ περιέχονται στο I (οπότε ορίζεται η σύνθεση $z = f(g(x))$ στο I), τότε ισχύει*

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, d\, x = \int f(y)\, d\, y \Big|_{y=g(x)} \qquad (x \text{ στο } I)}$$

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα ισχύει ότι

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, d\, x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, d\, y \qquad (a, b \text{ στο } I)}$$

Παράδειγμα 12.4.2.

$$\begin{aligned}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\, d\, x &= \int \frac{1}{x^2+1}\, \frac{d(x^2+1)}{d\, x}\, d\, x = \int \frac{1}{y}\, d\, y \Big|_{y=x^2+1} = \left(\ln|y| + c\right)\Big|_{y=x^2+1} = \\ &= \ln(x^2+1) + c\end{aligned}$$

12.4.2 Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες

Πρόταση 12.4.3. *Αν οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις κι έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο στο διάστημα I, τότε ισχύει*

$$\boxed{\int f(x)\, g'(x)\, d\, x = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, d\, y \qquad (x \text{ στο } I)}$$

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα ισχύει

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g'(x)\, d\, x = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, d\, y \qquad (a, b \text{ στο } I)}$$

Παράδειγμα 12.4.4.

$$\begin{aligned}\int \ln x\, d\, x &= \int \ln x\, \frac{d\,(x)}{d\, x}\, d\, x = x\, \ln x - \int \frac{d\,(\ln x)}{d\, x}\, x\, d\, x = x\, \ln x - \int \frac{1}{x}\, x\, d\, x = \\ &= x\, \ln x - \int 1\, d\, x = x\, \ln x - x + c \qquad \text{στο διάστημα } (0, +\infty)\end{aligned}$$

Παράδειγμα 12.4.5.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\, \sin x\, d\,x &= -\int_0^{\pi} x\, \frac{d(\cos x)}{d\,x}\, d\,x = -\pi\, \cos\pi + 0\, \cos 0 + \int_0^{\pi} \frac{d\,(x)}{d\,x}\, \cos x\, d\,x = \\ &= \pi + \int_0^{\pi} \cos x\, d\,x = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi\end{aligned}$$

12.4.3 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Ο υπολογισμός μιας μεγάλης κλάσης ολοκληρωμάτων ανάγεται, με κατάλληλη αντικατάσταση, στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητών συναρτήσεων της μορφής

$$\int r(x)\, d\,x = \int \frac{a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + a_1\, x + a_0}{b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + b_1\, x + b_0}\, d\,x\,.$$

Πρώτο βήμα: Αν $m \geq n$ τότε εκτελούμε στην διαίρεση των πολυώνυμων και βρίσκουμε πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$r(x) = \frac{a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + a_1\, x + a_0}{b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + b_1\, x + b_0} = p(x) + \frac{q(x)}{b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + b_1\, x + b_0}$$

όπου ο βαθμός του $q(x)$ να είναι $< n$ για κάθε x. Ο υπολογισμός του $\int p(x)\, d\,x$ είναι εύκολος αφού πρόκειται για ολοκλήρωμα πολυωνυμικής συνάρτησης, οπότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος ανάγεται ουσιαστικά στην περίπτωση που $m < n$, που περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα.

Δεύτερο βήμα: Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων ή δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή το οποίο είναι αρκετά δύσκολο αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις είναι εφικτό. Γενικά ισχύει το εξής:

Κάθε πολυώνυμο

$$B(x) = b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + b_1\, x + b_0$$

μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων στην μορφή

$$B(x) = b_n\, x^n + \cdots + b_0 = b_n(x-a)^k \cdots (x-\gamma)^{\lambda}\Big((x-\mu)^2 + \nu^2\Big)^{\rho} \cdots \Big((x-\epsilon)^2 + \delta^2\Big)^{\tau}$$

όπου οι εκθέτες $\kappa, \ldots \lambda, \rho, \ldots, \tau$ είναι φυσικοί αριθμοί με $\kappa + \cdots + \lambda + 2\,\rho + \cdots + 2\,\tau = n$ και οι αριθμοί $\nu, \ldots, \delta$ που εμφανίζονται στους δευτεροβάθμιους παράγοντες είναι όλοι > 0. Στην προηγούμενη ανάλυση, οι παράγοντες $(x-\alpha)$, …, $(x-\gamma)$ αντιπροσωπεύουν τις πραγματικές ρίζες του $B(x)$ και οι αντίστοιχοι εκθέτες την πολλαπλότητα των ριζών. Οι δευτεροβάθμιοι όροι αντιπροσωπεύουν τις μιγαδικές ρίζες του πολυνωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες την πολλαπλότητά τους. Παρατηρείστε ότι οι μιγαδικές ρίζες εμφανίζονται με τις συζυγείς τους

$$(x-\mu)^2 + \nu^2 = (x - \mu - i\,\nu)(x - \mu + i\,\nu)$$

Επίσης, οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \dots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε. Είναι τα ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $-\infty, \alpha, \dots, \gamma, +\infty$.

Τρίτο βήμα: Αναλύουμε την ρητή συνάρτηση $r(x)$ σε **απλούς λόγους** της μορφής

$$
\begin{aligned}
r(x) = &\left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots \frac{A_k}{(x-a)^k}\right) + \cdots \left(\frac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2} + \cdots \frac{\Gamma_k}{(x-\gamma)^\lambda}\right) \\
&+ \left(\frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\right) + \cdots \\
&\cdots + \left(\frac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \frac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\right).
\end{aligned}
$$

Οι αριθμοί $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ είναι άγνωστοι που υπολογίζονται ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με το πολυώνυμο $B(x)$. Στα δυο μέλη της εξίσωσης σχηματίζονται δυο πολυώνυμα ως προς x και εξισώνουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων με τον ίδιο βαθμό στο x. Προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα για τα $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ το οποίο και επιλύουμε.

Τέταρτο βήμα: Παρατηρώντας τους παραπάνω απλούς λόγους συμπεραίνουμε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της ρητής συνάρτησης ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων τριών τύπων

$$
(I) \quad \int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\, d\,x, \qquad (II) \quad \int \frac{x-\mu}{\left((x-\mu)^2+\nu^2\right)^k}\, d\,x, \qquad (III) \quad \int \frac{1}{\left((x-\mu)^2+\nu^2\right)^k}\, d\,x
$$

1) Το ολοκλήρωμα τύπου (I) με την αντικατάσταση $y = x - \alpha$, είτε στο $(-\alpha, 0)$ είτε στο $(\alpha, +\infty)$, ανάγεται στο υπολογισμό ολοκληρώματος που δίνεται στον πίνακα στην σελίδα 98, και τελικά είναι

$$
\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\, d\,x = \begin{cases} -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{(x-a)^{k-1}} + c\,, & k \geq 2 \\[2ex] \ln|x-a| + c\,, & k = 1 \end{cases}
$$

2) Με παρόμοιο τρόπο αντικαθιστώντας $y = (x-\mu)^2 + \nu^2$ το ολοκλήρωμα τύπου (II) είναι

$$
\int \frac{x-\mu}{\left((x-\mu)^2+\nu^2\right)^k}\, d\,x = \begin{cases} -\dfrac{1}{k-1}\dfrac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}} + c\,, & k \geq 2 \\[2ex] \frac{1}{2}\ln((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1} + c\,, & k = 1 \end{cases}
$$

3) Το πιο δύσκολο ολοκλήρωμα για να υπολογισθεί είναι το ολοκλήρωμα τύπου (III). Με την αντικατάσταση $y = \frac{x-\mu}{\nu}$ ανάγεται στο ολοκλήρωμα

$$
I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\, d\,y\,.
$$

Αν $k = 1$, τότε

$$I_1 = \arctan y + c$$

Αν $k > 1$, παραλείποντας τις λεπτομέρειες, με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες καταλήγουμε σε μια αναδρομική σχέση και επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$I_k = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{y}{y^2+1} + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\arctan y + c$$

Παράδειγμα 12.4.6. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^4}{x^4+x^2-2}\,d\,x$$

Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου στον παρονομαστή δεν είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον αριθμητή, εκτελούμε την διαίρεση των πολυωνύμων και έχουμε ότι

$$x^4 = (2-x^2) + 1\ \cdot (x^4+x^2-2)\,.$$

Συνεπώς

$$\frac{x^4}{x^4+x^2-2} = 1 + \frac{2-x^2}{x^4+x^2-2}$$

Στην συνέχεια αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι το πολυώνυμο είναι διτετράγωνης μορφής. Θέτοντας $y = x^2$, γίνεται y^2+y-2 το οποίο αναλύεται στην μορφή $(y-1)(y+2)$, αφού οι ρίζες του είναι οι $1, -2$. Άρα

$$x^4+x^2-2 = (x^2-1)(x^2+2) = (x-1)(x+1)(x^2+2)$$

Αναλύουμε την ρητή συνάρτηση

$$\frac{2-x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{2-x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)}$$

σε απλούς λόγους των παραγόντων στον παρονομαστή κι έχουμε

$$\frac{2-x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C\,x+D}{x^2+2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω εξίσωση με $(x-1)(x+1)(x^2+2)$ κι έχουμε

$$\begin{aligned} 2-x^2 &= A(x+1)(x^2+2) + B(x-1)(x^2+2) + (C\,x+D)(x+1)(x-1) \\ &= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (2\,A+2\,B-C)x + (2\,A-2\,B-D) \end{aligned}$$

Οπότε θα πρέπει να ισχύει στο σύστημα $A+B+C=0$, $A-B+D=-1$, $2\,A+2\,B-C=0$, $2\,A-2\,B-D=2$. Από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση έχουμε ότι θα πρέπει $C=0$, και

$A+B=0$. Οι υπόλοιπες δυο εξισώσεις, με $A=-B$, γίνονται $-2\,B+D=-1$, $-4\,B-D=2$, που λύνονται εύκολα δίνοντας $B=-\frac{1}{6}$ και $D=-\frac{4}{3}$ και επειδή $A=-B$, τότε και $A=\frac{1}{6}$. Άρα

$$\frac{2-x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)}=\frac{1}{6}\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\,\frac{1}{x+1}-\frac{4}{3}\,\frac{1}{x^2+2}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^4+x^2-2}\,d\,x &= \int \left(1+\frac{2-x^2}{x^4+x^2-2}\right)d\,x=\int 1\,d\,x+\int \frac{2-x^2}{x^4+x^2-2}\,d\,x\\ &= x+\frac{1}{6}\int\frac{1}{x-1}\,d\,x-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+1}\,d\,x-\frac{4}{3}\int\frac{1}{x^2+2}\,d\,x\\ &= x+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\,\ln|x+1|-\frac{2\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c\,,\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

12.4.4 Ολοκληρώματα ρητών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Πολλά ολοκληρώματα συναρτήσεων που είναι ρητές συναρτήσεις των βασικών τριγωνομετρικών $\cos x$ και $\sin x$ μετατρέπονται σε ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων (που είδαμε πως αντιμετωπίζονται στη προηγούμενη παράγραφο) με την αντικατάσταση

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες εύκολα αποδεικνύεται ότι με αυτήν την αντικατάσταση ισχύει ότι

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}\,,\qquad \sin x=\frac{2\,u}{1+u^2}\qquad \text{και}\qquad \frac{d\,u}{d\,x}=\frac{1+u^2}{2}$$

Παράδειγμα 12.4.7. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\sin x}\,d\,x$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω αντικαταστάσεις το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\int \frac{1}{\sin x}\,d\,x=\int \frac{1+u^2}{2\,u}\,\frac{2}{1+u^2}\,d\,u=\int \frac{1}{u}\,d\,u=ln|u|+c=\ln|\tan\left(\frac{x}{2}\right)|+c$$

σε κάθε διάστημα $(k\,\pi,\pi+k\,\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ο παρονομαστής της ρητής τριγωνομετρικής συνάρτησης της οποίας το ολοκλήρωμα θέλουμε να υπολογίσουμε μηδενίζεται όταν $x=-\pi$, όπως στο παράδειγμα. Αν ο παρανομαστής μηδενίζεται σε κάποιο άλλο σημείο x_0, τότε με την αλλαγή μεταβλητής $z=x-x_0-\pi$, αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Η περίπτωση όπου ο παρανομαστής δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο τότε η παραπάνω μέθοδος, με κατάλληλες τροποποιήσεις, μπορεί να εφαρμοσθεί αλλά δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

12.4.5 Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων

Θεωρούμε τα ολοκληρώματα των ακόλουθων τριών τύπων

$$(I) \quad \int R(x, \sqrt{1-x^2})\,d\,x \qquad (II) \quad \int R(x, \sqrt{x^2-1})\,d\,x \qquad (III) \quad \int R(x, \sqrt{x^2+1})\,d\,x$$

όπου με $R(s,t)$ δηλώνουμε μια ρητή συνάρτηση ως προς και τα δυο ορίσματά της.

(I) Για το ολοκλήρωμα τύπου (I) το οποίο ορίζεται στο διάστημα $[-1,1]$, εκτελούμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό βρίσκουμε ότι

$$x = \frac{2\,u}{1+u^2}\,.$$

Επιπλέον έχουμε τις ισότητες

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \frac{d\,u}{d\,x} = \frac{(1+u^2)^2}{2(1-u^2)}\,,$$

οπότε το ολοκλήρωμα (I) ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης ως προς την μεταβλητή u, που εξετάσαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

(II) Για το ολοκλήρωμα τύπου (II) στο διάστημα $[1,+\infty)$ θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x + \sqrt{x^2-1}\,.$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$x = \frac{u^2+1}{2\,u}\,, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2\,u}\,, \qquad \frac{d\,u}{d\,x} = \frac{2\,u^2}{u^2-1} \qquad (*)$$

οπότε και πάλι αναγόμαστε σε υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης ως προς u. Στο διάστημα $(-\infty,-1]$ θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x - \sqrt{x^2-1}\,.$$

για την οποία ισχύουν οι ίδιες σχέσεις $(*)$

(III) Τέλος για το ολοκλήρωμα τύπου (III) που ορίζεται στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$u = x + \sqrt{x^2+1}$$

και τις ισότητες που επάγει

$$x = \frac{u^2-1}{2\,u}\,, \qquad \sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2\,u}\,, \qquad \frac{d\,u}{d\,x} = \frac{2\,u^2}{u^2+1}$$

οπότε και πάλι αναγόμαστε στον υπολογισμό ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης ως προς την μεταβλητή u.

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση των τριών τύπων ολοκληρωμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας γενικής ρητής συνάρτησης του τύπου

$$\int R(x, \sqrt{\alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma})\, d\, x$$

όπου $R(s,t)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των δυο ορισμάτων της s,t. Γράφουμε το τριώνυμο ως εξής

$$\alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma = \alpha \left(\big(x + \frac{\beta}{2\,\alpha}\big)^2 + \frac{4\alpha\,\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right)$$

και διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1η) <u>Αν $\alpha > 0$ και $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$.</u> Τότε με την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\,\gamma - \beta^2}}\big(x + \frac{\beta}{2\alpha}\big)$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\frac{\sqrt{4\alpha\,\gamma - \beta^2}}{2\alpha} \int R\left(-\frac{\lambda}{2\alpha} + \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\,\alpha}\, u\,,\ \frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}}{2\sqrt{\alpha}}\, \sqrt{u^2 + 1} \right) d\, u$$

δηλαδή σε ένα ολοκλήρωμα τύπου (III) που αναλύσαμε προηγουμένως.

2η) <u>Αν $\alpha > 0$ και $4\alpha\gamma - \beta^2 < 0$.</u> Τότε με την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \frac{2\alpha}{\sqrt{\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma}}\big(x + \frac{\beta}{2\alpha}\big)$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\,\gamma}}{2\alpha} \int R\left(-\frac{\lambda}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\,\alpha}\, u\,,\ \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{\alpha}}\, \sqrt{u^2 - 1} \right) d\, u$$

δηλαδή σε ένα ολοκλήρωμα τύπου (II) της προηγούμενης ανάλυσης.

3η) <u>Αν $\alpha < 0$ και $4\alpha\gamma - \beta^2 < 0$.</u> Τότε με την αλλαγή μεταβλητής

$$u = \frac{-2\alpha}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\,\gamma}}\big(x + \frac{\beta}{2\alpha}\big)$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$-\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\,\gamma}}{2\alpha} \int R\left(-\frac{\lambda}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\,\alpha}\, u\,,\ \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\sqrt{-\alpha}}\, \sqrt{1 - u^2} \right) d\, u$$

δηλαδή σε ένα ολοκλήρωμα τύπου (I) της προηγούμενης ανάλυσης.

Η περίπτωση $\alpha < 0$ και $4\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ αποκλείεται γιατί τότε δεν ορίζεται η συνάρτηση $\sqrt{\alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma}$ σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$. Αν τουλάχιστον ένα από τα α, και $4\alpha\gamma - \beta^2$ είναι μηδέν τότε το ολοκλήρωμα ανάγεται στον υπολογισμό απλού ολοκληρώματος.

12.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να υπολογισθεί το καθένα από τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής:

$$a)\ \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(\sin x)^2}}\,d\,x\,,\quad b)\ \int \frac{\sin x}{(\cos x)^2}\,d\,x\,,\quad c)\ \int \frac{e^x}{e^{2x+1}}\,d\,x\,,\quad d)\ \int \frac{d\,x}{x\,\ln x}\,d\,x\,,$$

$$e)\ \int x\,e^{x^2}\,d\,x\,,\quad f)\ \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,d\,x\,,\quad g)\ \int \frac{1}{4+x^2}\,d\,x\,,\quad h)\ \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,d\,x\,.$$

Απ. $a)\ 3(\sin x)^{1/3}+c$, $b)\ \frac{1}{\cos x}+c$ $c)\ \arctan(e^x)+c$, $d)\ \ln|\ln x|+c$, $e)\ \frac{1}{2}e^{x^2}+c$, $f)\ \arcsin(\frac{x}{2})+c$, $g)\ \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2})+c$, $h)\ \arctan(e^x)+c$.

Άσκηση 2. Να υπολογισθεί το καθένα από τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα με ολοκληρώσεις κατά μέλη και αλλαγές μεταβλητής:

$$a)\ \int e^{-x}(\sin x)\,d\,x\,,\quad b)\ \int x^2e^{2x}\,d\,x\,,\quad c)\ \int x^3e^{-x^2}\,d\,x\,,\quad d)\ \int e^{\sqrt{x}}\,d\,x\,,$$

$$e)\ \int x^2\sin x\,d\,x\,,\quad f)\ \int x\,\ln x\,d\,x\,,\quad g)\ \int \arcsin x\,d\,x\,,\quad h)\ \int x^2\arccos x\,d\,x\,,$$

$$i)\ \int (\sin x)^4\,d\,x\,,\quad j)\ \int \frac{x}{(\cos x)^2}\,d\,x\,,\quad k)\ \int (\tan x)^2\,d\,x\,,\quad l)\ \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,d\,x\,,$$

Απ. $a)\ -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+c$, $b)\ \frac{1}{4}e^{2x}(2\,x^2-2\,x+1)+c$, $c)\ -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)+c$, $d)\ 2\,e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$, $e)\ (2-x^2)\cos x+2\,x\,\sin x+c$, $f)\ -\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}\ln x+c$, $g)\ \sqrt{1-x^2}+x\,\arcsin x+c$, $h)\ -\frac{1}{9}\sqrt{1-x^2}(2+x^2)+\frac{x^x}{3}\arccos x+c$, $i)\ \frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin(2\,x)+\frac{1}{32}\sin(4\,x)+c$, $j)\ \ln|\cos x|+x\,\tan x+c$, $k)\ -x+\tan x+c$, $l)\ -\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+c$.

Άσκηση 3.

(α) Θεωρούμε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα

$$I=\int e^{a\,x}\,\sin(b\,x)\,d\,x$$

Χρησιμοποιώντας δυο ολοκληρώσεις κατά παράγοντες να αποδειχθεί ότι

$$I=\frac{1}{a}e^{a\,x}\,\sin(b\,x)-\frac{b}{a^2}e^{a\,x}\cos(b\,x)-\frac{b^2}{a^2}\,I\Rightarrow(1+\frac{b^2}{a^2})\,I=\frac{e^{a\,x}}{a^2}\,(a\,\sin(b\,x)-b\,\cos(b\,x))+c$$

(β) Με παρόμοιο τρόπο να αποδειχθεί ότι

$$\int e^{a\,x}\,\cos(b\,x)\,d\,x=\frac{a}{a^2+b^2}\,e^{a\,x}\cos(b\,x)+\frac{b}{a^2+b^2}\,e^{a\,x}\sin(b\,x)+c$$

Άσκηση 4. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:

$$a)\quad \int \frac{x+2}{x^2-4\,x+4}\,d\,x\,,\quad b)\quad \int \frac{2\,x^2+3\,x-1}{x^2+x^2-2\,x}\,d\,x\,,\quad c)\quad \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,d\,x\,,$$

$$d)\quad \int \frac{x^4+2\,x-1}{x^4+2\,x^2+1}\,d\,x\,,\quad e)\quad \int \frac{x^2}{(x^2+2\,x+2)^2}\,d\,x\,,\quad f)\quad \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4}\,d\,x\,,$$

Απ. $a)\ -\frac{4}{x-2}+\ln|x-2|+x+c\,,\quad b)\ \ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+c\,,\quad c)\ \frac{1-2\,x}{(x-1)^2}+\ln|x-1|+c\,,$
$d)\ x-\frac{1}{1+x^2}-2\arctan x+c\,,\quad e)\ \frac{1}{x^2+2\,x+2}+\arctan(x+1)+c\,,\quad f)\ \frac{-2\,x^2+x-1}{2(x-1)^3}+c\,.$

Άσκηση 5. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα ρητών τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$a)\quad \int \frac{\left((\cos x)^2+\sin x+1\right)}{\sin x}\,d\,x\,,\quad b)\quad \int \frac{\cos x+\sin x}{1+\cos x}\,d\,x\,.$$

Απ. $a)\ x+\cos x-2\ln|\tan(\frac{x}{2})|+c\,,\quad b)\ x-2\ \ln|\cos(\frac{x}{2})|-\tan(\frac{x}{2})+c\,.$

Άσκηση 6. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$a)\quad \int \sqrt{1-x^2}\,d\,x\,,\quad b)\quad \int \sqrt{x^2-1}\,d\,x\,,\qquad c)\quad \int \sqrt{x^2+1}\,d\,x\,,$$

$$d)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,d\,x\,,\quad e)\quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,d\,x\,,\quad f)\quad \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,d\,x\,.$$

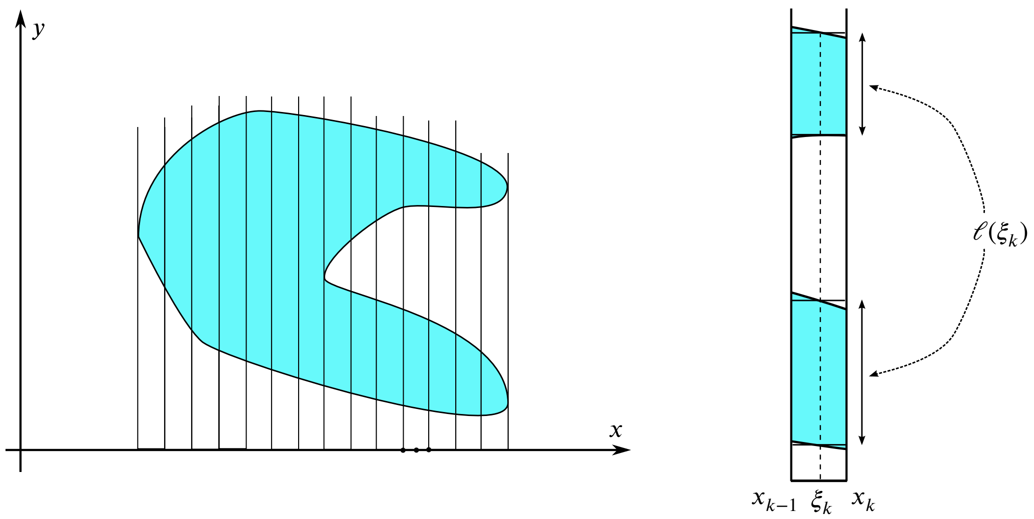
Απ. $a)\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+c\,,\quad b)\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|\right)+c\,,$
$c)\ \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1}+\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right)+c\,,\quad d)\ \ln|x+\sqrt{x^2+1}|)+c\,,$
$e)\ \sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2x}{\sqrt{3}}+\sqrt{1+\frac{1}{3}(2\,x+1)^2}\right|+c\,,\quad f)\ \ln\left|3-2\,x-2\sqrt{2-3\,x+x^2}\right|+c\,.$

Κεφάλαιο 13

Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων

13.1 Υπολογισμός εμβαδών με την μέθοδο των παράλληλων διατομών

Θεωρούμε μια φραγμένη επίπεδη επιφάνεια A με ομαλό σύνορο, δηλαδή που περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση. Ως x-άξονα θεωρούμε μια οποιαδήποτε ευθεία ℓ στο ίδιο επίπεδο με την A. Από κάθε σημείο x της ℓ φέρνουμε κάθετες ευθείες ως προς την ℓ οι οποίες τέμνουν την A σε ένα ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα και συμβολίζουμε με $\ell(x)$ το συνολικό μήκος, δηλαδή το άθροισμα των μηκών των επιμέρους ευθύγραμμων τμημάτων.



Σχήμα 13.1: Χωρισμός σε κατακόρυφες στοιχειώδεις επιφάνειες

Επειδή η A είναι φραγμένη υπάρχει κάποιο διάστημα $[a, b]$ έξω από το οποίο οι διατομές με την επιφάνεια είναι κενές, οπότε $\ell(x) = 0$ για $x \notin [a, b]$. Επιλέγουμε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος. Συμβολίζουμε με A_k το μέρος της A το οποίο περιέχεται ανάμεσα στις ευθείες κάθετες ως προς τον άξονα x στα σημεία x_{k-1} και x_k, και συμβολίζουμε το εμβαδό της A_k με E_k. Επειδή η A είσαι ίση με τα ένωση των επιφανειών A_k τότε το συνολικό εμβαδό της είσαι ίσο με το εμβαδό των επιμέρους επιφανειών, δηλαδή

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$$

Επιλέγουμε ενδιάμεσα σημεία ξ_k σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ και φέρνουμε κάθετη διατομή ως προς τον x-άξονα στο κάθε ξ_k. Στην συνέχεια φτιάχνουμε τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα όπως φαίνονται στο σχήμα δεξιά. Αν το πλάτος του $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό τότε η επιφάνεια A_k θα είναι περίπου ίση με την επιφάνεια Π_k των ορθογώνιων παραλληλόγραμμων. Το κάθε Π_k έχει μήκος βάσης $(x_k - x_{k-1})$ και άθροισμα υψών $\ell(\xi_k)$, οπότε το εμβαδό του κάθε τμήματος A_k θα είναι περίπου ίσο με

$$E_k \approx \ell(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

και συνολικά το εμβαδό της επιφάνειας A θα είναι περίπου ίσο με

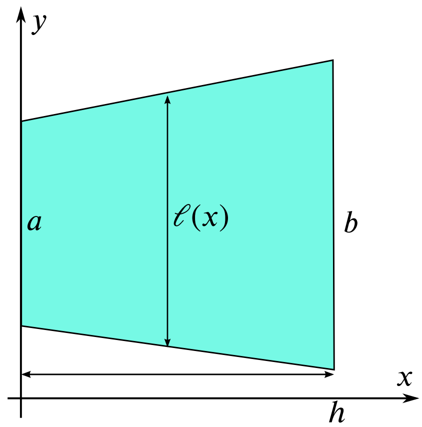
$$\mathrm{E} = \ell(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + \ell(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + \ell(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$$

Αν το πλάτος της διαμέρισης Δ είναι αρκετά μικρό, τότε το άθροισμα Riemann $\ell(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + \cdots + \ell(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$ θα είναι όσο κοντά θέλουμε στο E της επιφάνειας A, οπότε

$$E = \int_a^b \ell(x)\,d\,x$$

Δηλαδή το εμβαδό μιας φραγμένης επίπεδης επιφάνειας είναι το ολοκλήρωμα των μηκών των διατομών της που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.

Παράδειγμα 13.1.1. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα θα υπολογίσουμε το εμβαδό ενός τραπεζίου με ύψος h και του οποίου οι παράλληλες πλευρές έχουν μήκη a και b. Ως x-άξονα θεωρούμε την ευθεία που είναι κάθετη στις παράλληλες πλευρές του τραπεζίου και το σημείο 0 επιλέγουμε να είναι η τομή της με την ευθεία της βάσης του τραπεζίου με πλευρά μήκους a, ενώ το σημείο h το σημείο τομής της με την αντίστοιχη πλευρά μήκους b. Αν ο x είναι εκτός του διαστήματος $[0, h]$ η αντίστοιχη διατομή του τραπεζίου είναι κενή, ενώ όταν ο x διατρέχει το $[0, h]$ το μήκος της διατομής στο τυχαίο x είναι



Σχήμα 13.2: Εμβαδό τραπεζίου

$$\ell(x) = \frac{b-a}{h}\,x + a$$

Ο τύπος είναι εύκολο να αποδειχθεί βρίσκοντας τις εξισώσεις των δυο ευθειών του τραπεζίου που δεν είναι παράλληλες και υπολογίζοντας την διαφορά των υψών τους στο άξονα των y για το τυχαίο $x \in [0, h]$. Εναλλακτικά μπορούμε να τον αποδείξουμε χρησιμοποιώντας μετρικές σχέσεις κατάλληλων ομοίων τριγώνων. Άρα το εμβαδό του τραπεζίου είναι ίσο με

$$E = \int_0^h \ell(x)\,d\,x = \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}\,x + a\right)\,d\,x = \frac{b-a}{h}\frac{h^2}{2} + a\,h = \frac{b+a}{2}\,h$$

Ο τύπος αυτός περιλαμβάνει και τις ειδικές περιπτώσεις του εμβαδού τριγώνου ($a = 0$ ή $b = 0$) και του εμβαδού παραλληλογράμμου ($a = b$).

Παράδειγμα 13.1.2. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό κυκλικού δίσκου με ακτίνα $r > 0$. Ως x-άξονα θεωρούμε μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου και ως σημείο 0 επιλέγουμε να είναι το κέντρο του δίσκου οπότε το μήκος της διατομής που είναι κάθετη στον x-άξονα είναι ίσο με

$$\ell(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

για κάθε x στο διάστημα $[-r, r]$ και μηδέν για x έξω από το $[-r, r]$.

Οπότε το εμβαδό του δίσκου είναι ίσο με

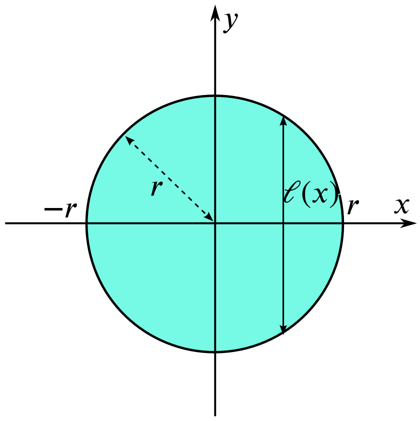
$$E = \int_{-r}^{r} \ell(x)\, d\,x = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, d\,x$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = x/r$ το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$E = \int_{-1}^{1} 2\,r^2\sqrt{1 - t^2}\, d\,t = 2\,r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, d\,t$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα (άσκηση 6α στη σελίδα 107) έχουμε

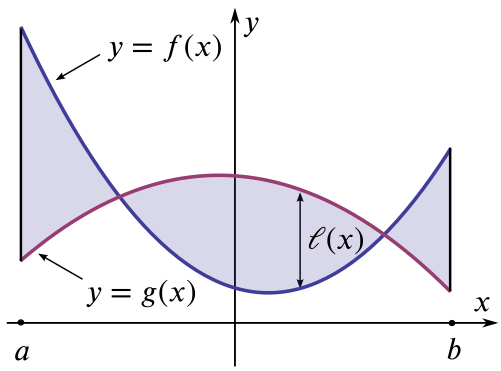
$$E = 2r^2\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t\right)\Big|_{t=-1}^{t=1} = r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \pi\, r^2$$



Σχήμα 13.3: Εμβαδό δίσκου

Παράδειγμα 13.1.3. Μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των παράλληλων διατομών είναι ο υπολογισμός του εμβαδού που περικλείεται ανάμεσα στα γραφήματα δυο συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = g(x)$ στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(a, f(\alpha))$ και $(a, g(\alpha))$, και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(b, f(b))$ και $(b, g(b))$. Για κάθε $x \in [a, b]$ η διατομή είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου το μήκος είναι

$$\ell(x) = |f(x) - g(x)|$$



Σχήμα 13.4: Εμβαδό ανάμεσα στα γραφήματα δυο συναρτήσεων

ενώ για κάθε x έξω από το $[a, b]$ η διατομή είναι κενή. Οπότε το εμβαδό είναι ίσο με

$$E = \int_{a}^{b} |f(x) - g(x)|\, d\,x$$

Αν θέλουμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε το εμβαδό της επιφάνειας που περιέχεται ανάμεσα στις καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$, στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(-1, -1)$ και $(-1, 1)$ και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(3, 3)$ και $(3, 9)$, τότε αυτό είναι

$$E = \int_{-1}^{3} |x^2 - x| \, d\, x$$

Μελετώντας το πρόσημο της ποσότητας $x^2 - x = x(x - 1)$ στο διάστημα $[-1, 3]$ έχουμε

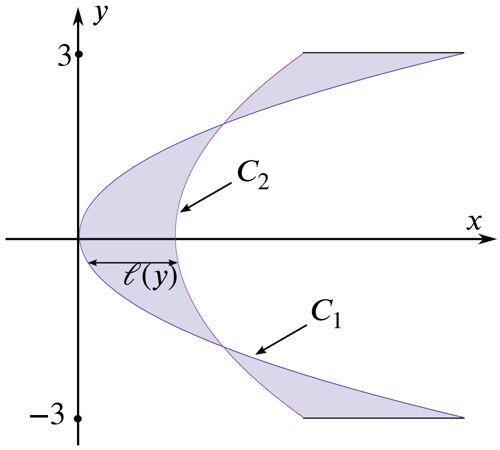
$$E = \int_{-1}^{3} |x^2 - x| \, d\, x = \int_{-1}^{0} (x^2 - x) \, d\, x + \int_{0}^{1} (x - x^2) \, d\, x + \int_{1}^{3} (x^2 - x) \, d\, x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{17}{3}$$

Παρατήρηση 13.1.4. Ορισμένες φορές οι καμπύλες που περιέχουν την επίπεδη επιφάνεια της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό, δίνονται σε πεπλεγμένη μορφή των x, y, οι οποίες είναι δύσκολο να λυθούν ως προς y, όμως μπορεί να λύνονται εύκολα ως προς x. Τότε τροποποιούμε την μέθοδο των παράλληλων διατομών κατάλληλα, δηλαδή θεωρούμε παράλληλες διατομές προς τον άξονα των y. Σε αυτή την περίπτωση το εμβαδό είναι

$$E = \int_{a}^{b} \ell(y) \, d\, y$$

όπου $\ell(y)$ το μήκος μιας διατομής στο τυχαίο $y \in [a, b]$.

Για παράδειγμα, θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στις καμπύλες C_1, C_2 που δίνονται από τις σχέσεις $y^2 = x$ και $y^2 = 3(x - 2)$, αντίστοιχα, στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(5, 3)$ και $(9, 3)$, και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία με συντεταγμένες $(5, -3)$ και $(9, -3)$. Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x, βρίσκουμε ότι



$$\ell(y) = |y^2 - \frac{y^2}{3} - 2| = \frac{2}{3}|y^2 - 3|$$

Μελετώντας το πρόσημο της $y^2 - 3$ για $y \in [-3, 3]$ βρίσκουμε ότι

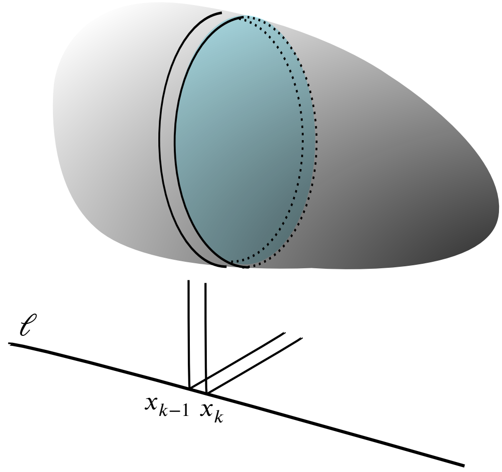
$$E = \int_{-3}^{3} \frac{2}{3}|y^2 - 3| \, d\, y = \int_{-3}^{-\sqrt{3}} \frac{2}{3}(y^2 - 3) \, d\, y + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{3}(-y^2 + 3) \, d\, y + \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{2}{3}(y^2 - 3) \, d\, y = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

13.2 Υπολογισμός όγκου στερεών σωμάτων

13.2.1 Η μέθοδος των παράλληλων διατομών

του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος και συμβολίζουμε με $\boldsymbol{B}_k$ το μέρος όγκου της B που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα κάθετα στην ℓ στα σημεία x_{k-1} και x_k. Το $\boldsymbol{B}$ είναι ίσο με την ένωση των

Θεωρούμε ένα φραγμένο στερεό σώμα B. Παίρνουμε μια οποιαδήποτε ευθεία ℓ στο χώρο και σε κάθε σημείο της φτιάχνουμε το κάθετο επίπεδο και θεωρούμε την διατομή $B^{(x)}$ του επιπέδου με το σώμα B. Επειδή το σώμα είναι φραγμένο υπάρχει ένα διάστημα $[a, b]$ της ℓ ώστε για κάθε x έξω από το $[a, b]$ η διατομή $B^{(x)}$ του B είναι κενή. Για κάθε x στο $[a, b]$ συμβολίζουμε με $E(x)$ το εμβαδό της διατομής $B^{(x)}$. Επιλέγουμε διαμέριση



$$\Delta = \{a = x_0\,, x_1\,, x_2\,, \dots x_{n-1}\,, x_n = b\}$$

$B_1, B_2, \dots B_n$, οπότε αν συμβολίσουμε με V_k τον αντίστοιχο όγκο του B_k, τότε έχουμε

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

Επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ενδιάμεσο σημείο ξ_k και φτιάχνουμε το κυλινδρικό σώμα C_k του οποίου οι δυο βάσεις ανήκουν στα δυο επίπεδα κάθετα στην ℓ στα σημεία x_{k-1} και x_k και του οποίου η τομή με το επίπεδο κάθετο στην ℓ στο σημείο ξ_k είναι ακριβώς η διατομή $B^{(\xi_k)}$. Επειδή το πλάτος της διαμέρισης είναι μικρό το σώμα B_k είναι περίπου ίσο με το ορθό κυλινδρικό σώμα C_k, οπότε ο όγκος V_k του B_k είναι περίπου ίσος με τον όγκο του C_k, δηλαδή $V_k \approx E(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$ για καθε $k = 1, 2, \dots n$. Συνεπώς

$$V \approx E(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + E(\xi_2)\,(x_2 - x_1) + \cdots + E(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$$

Αν το πλάτος της διαμέρισης γίνει όσο μικρό θέλουμε τότε το άθροισμα Riemann $E(\xi_1)\,(x_1 - x_0) + \cdots + E(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$ θα πλησιάσει όσο κοντά θέλουμε στον όγκο V του σώματος B, δηλαδή

$$V = \int_a^b E(x)\,d\,x$$

Άρα ο όγκος φραγμένου στερεού σώματος είναι ίσος με το ολοκλήρωμα των εμβαδών των διατομών του που είναι κάθετες στην ίδια ευθεία.

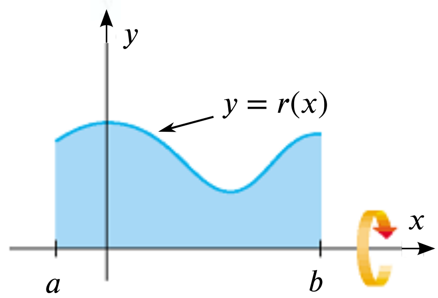
13.2.2 Όγκος στερεών σωμάτων παραγόμενων με περιστροφή

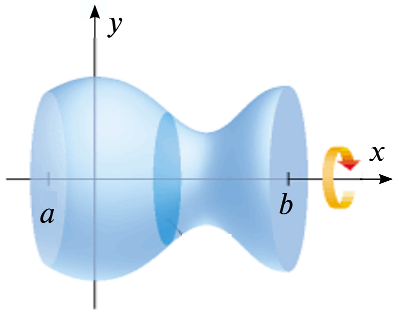
Οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο ο όγκος V του B είναι ίσος με

$$V = \pi \int_a^b \big(r(x)\big)^2\,d\,x$$

Άρα, ο όγκος του στερεού σώματος που παράγεται με περιστροφή είναι ίσος με το γινόμενο του π με το ολοκλήρωμα του τετραγώνου των ακτίνων περιστροφής.

Φέρνουμε μια ευθεία ℓ στον χώρο την οποία θεωρούμε ως τον x-άξονα και διάστημα $[a, b]$ της ℓ. Για κάθε $x \in [a, b]$ φτιάχνουμε έναν επίπεδο κυκλικό δίσκο με κέντρο τον x και ακτίνα ίση με $r(x)$, όπου για λόγους απλούστευσης υποθέτουμε ότι $r(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Το σύνολο όλων των κυκλικών δίσκων καθώς το x διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ φτιάχνουν ένα στερεό σώμα B το οποίο λέγεται παραγόμενο στερεό από την περιστροφή της $y = r(x)$ με άξονα περιστροφής τον x-άξονα ($y = 0$). Η ονομασία προκύπτει από το ότι το στερεό B μπορεί να παραχθεί από την περιστροφή γύρω από τον x-άξονα, κατά γωνία 2π, του τμήματος της επιφάνειας που περικλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της $y = r(x)$ και του x-άξονα για $x \in [a, b]$. Για κάθε x στο $[a, b]$ η διατομή του B που είναι κάθετη στην ℓ στο x είναι ο κυκλικός δίσκος με ακτίνα $r(x)$ και κέντρο το x. Το εμβαδό αυτό είναι $E(x) = \pi \left(r(x)\right)^2$.





Παράδειγμα 13.2.1. Θεωρούμε μια μπάλα ακτίνας $R > 0$ και μια ευθεία ℓ που διέρχεται από το κέντρο της μπάλας και επιλέγουμε το σημείο 0 της ℓ να είναι το κέντρο της μπάλας. Η μπάλα σηματίζεται από το σύνολο των κυκλικών δίσκων που είναι κάθετοι στην ευθεία ℓ σε κάθε x στο διάστημα $[-R, R]$ της ℓ με κέντρο το σημείο x και ακτίνα $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Οπότε σύμφωνα με τα προηγούμενα ο όγκος μιας μπάλας ακτίνας R είναι

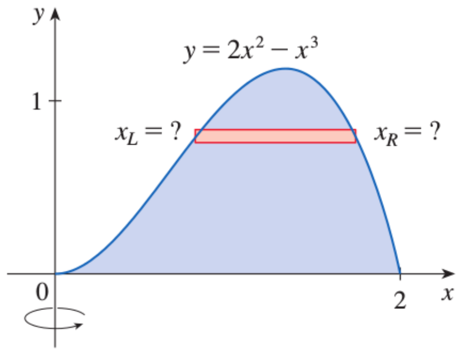
$$V = \pi \int_{-R}^{R} (r(x))^2 \, d\, x = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, d\, x = \pi \, R^2 (R - (-R)) - \pi \left(\frac{R^3}{3} - (-\frac{R^3}{3}) \right) = \frac{4}{3} \pi \, R^3$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μπάλα είναι το στερεό που παράγεται με περιστροφή κατά γωνία 2π ως προς τον x-άξονα του ημικύκλιου $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, με $x \in [-R, R]$.

13.2.3 Υπολογισμός όγκου με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών

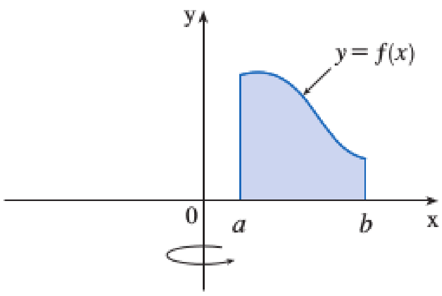
όπου $\frac{32}{27}$ είναι η μέγιστη τιμή της $y = 2\,x^2 - 3\,x^3$ που επιτυγχάνεται όταν $x = \frac{4}{3}$, και x_L, x_R είναι οι δυο θετικές ρίζες της εξίσωσης $y = 2\,x^2 - x^3$. Όμως για να βρούμε τις ρίζες αυτές θα πρέπει να λύσουμε μια εξίσωση τρίτου βαθμού, το οποίο από την μία δεν είναι και τόσο εύκολο, αλλά κι από την άλλη ο τύπος του Cardano που δίνει τις ρίζες αυτές δεν είναι τόσο εύχρηστος για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στην συνέχεια. Για να υπολογίσουμε τον όγκο στερεών που παράγονται με περιστροφή όπως σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μια εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού του όγκου, η οποία έχει γενικότερη ισχύ, κι ονομάζεται μέθοδος των **κυλινδρικών φλοιών**.

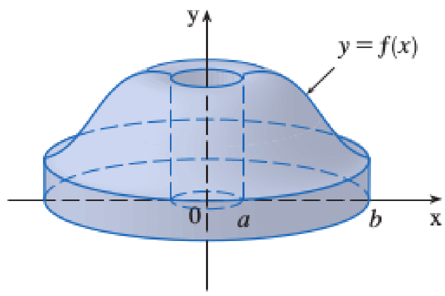
Ο υπολογισμός όγκου με την προηγούμενη μέθοδο δεν είναι πάντα εφικτός. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το πρόβλημα υπολογισμού του όγκου του στερεού που παράγεται από περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 2x^2 - x^3$ και της $y = 0$. Αν φτιάξουμε τις κάθετες διατομές στον y-άξονα τότε σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο ο όγκος είναι



$$V = \pi \int_0^{\frac{32}{27}} \left((x_R(y))^2 - (x_L(y))^2\right) d\,y$$

Ας θεωρήσουμε το στερεό σώμα B το οποίο παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f(x)$, όπου για απλούστευση υποθέτουμε ότι $f(x) > 0$, την $y = 0$, και τις κάθετες ευθείες $x = a$, και $x = b$ με $b > a \geq 0$, όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα.

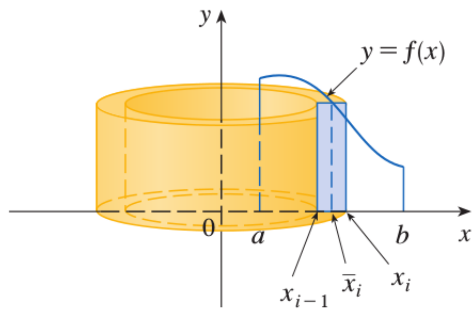


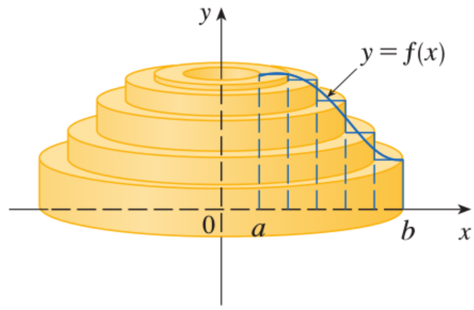


$$V = \int_a^b 2\,\pi\,x\,f(x)\,d\,x$$

Για να θυμόμαστε τον τύπο θεωρούμε έναν κυλινδρικό φλοιό ακτίνας x και ύψους $f(x)$ που όταν τον κόψουμε ο όγκος του είναι η περιφέρεια $2\,\pi\,x$ επί το ύψος $f(x)$ επί το πλάτος $\Delta\,x$.

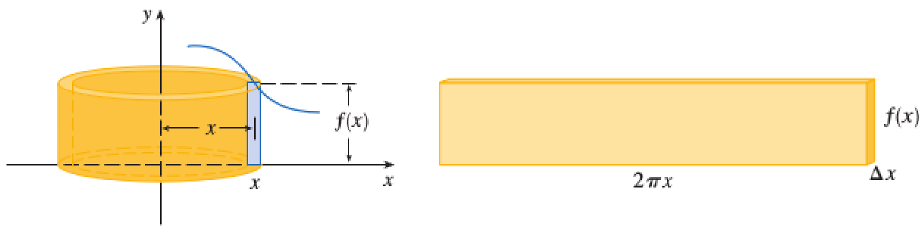
Παίρνουμε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$, και έστω $\overline{x}_i$ του μέσο του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$. Αν το παραλληλόγραμμο με βάση το διάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ και ύψος $f(\overline{x}_i)$ περιστραφεί γύρω από τον y-άξονα το αποτέλεσμα είναι ένας κυλινδρικός φλοιός με μέση ακτίνα $\overline{x}_i$ ύψος $f(\overline{x}_i)$ και πλάτος $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ του οποίου ο όγκος είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού του κυλίνδρου με ακτίνα $\overline{x}_i$ και ύψος $f(\overline{x}_i)$ επί το πλάτος Δx, δηλαδή $V_i = 2\pi \overline{x}_i f(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1})$. Οπότε μια προσέγγιση του όγκου του σώματος B είναι



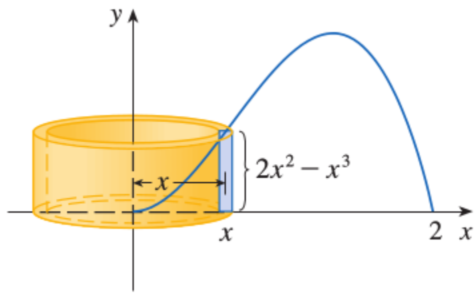


$$V \approx 2\pi \overline{x}_1 f(\overline{x}_1)(x_1 - x_0) + \cdots + 2\pi \overline{x}_n f(\overline{x}_n)(x_n - x_{n-1})$$

Αν το πλάτος της διαμέρισης γίνει όσο μικρό θέλουμε τότε το άθροισμα Riemann $2\pi \overline{x}_1 f(\overline{x}_1)(x_1 - x_0) + \cdots + 2\pi \overline{x}_n f(\overline{x}_n)(x_n - x_{n-1})$ θα πλησιάσει όσο κοντά θέλουμε στον όγκο V του σώματος B, δηλαδή



Παράδειγμα 13.2.2. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = 2x^2 - x^3$ και τον x-άξονα ($y = 0$). Από το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός έχει ακτίνα x, περιφέρεια $2\pi x$ και ύψος $f(x) = 2x^2 - x^3$. Οπότε, σύμφωνα με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών, ο όγκος του στερεού είναι

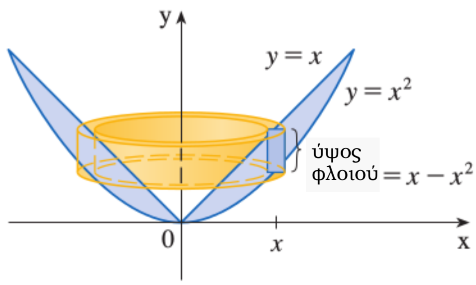


$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\, dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 2\pi\left(8 - \frac{32}{5}\right) = \frac{16}{5}\pi$$

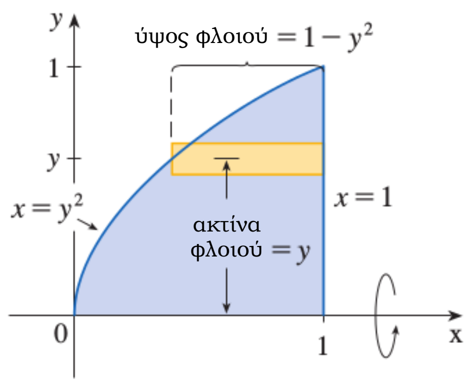
$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = 2\pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{6}.$$

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\, dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\, dx = 2\pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 13.2.3. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = x^2$ και της $y = x$. Από το διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός έχει ακτίνα x, περιφέρεια $2\pi x$ και ύψος $f(x) = x - x^2$. Οπότε, σύμφωνα με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών, ο όγκος του στερεού είναι



Παράδειγμα 13.2.4. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου που περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = \sqrt{x}$, της ευθείας $y = 0$ και της $x = 1$. Για να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών λύνουμε την $y = \sqrt{x}$ ως προς x, δηλ. $x = y^2$ και παρατηρούμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός έχει ακτίνα y, περιφέρεια $2\pi y$ και ύψος $1 - y^2$. Οπότε ο όγκος του στερεού είναι

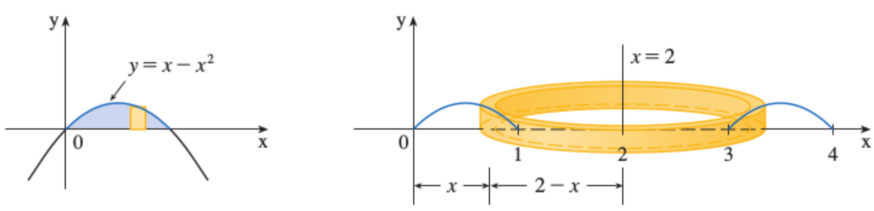


Ο όγκος του στερεού αυτού μπορεί να υπολογισθεί πιο εύκολα θεωρώντας κάθετες διατομές στον x-άξονα, οπότε όπως έχουμε περιγράψει στην προηγούμενη παράγραφο. Η ακτίνα περιστροφής στην περίπτωσή μας είναι $r(x) = \sqrt{x}$, οπότε

$$V = \pi \int_0^1 r(x)^2 \, d\,x = \pi \int_0^1 x \, d\,x = \pi \, \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2}$$

Παράδειγμα 13.2.5. Θα υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από την ευθεία $x = 2$, του χωρίου του περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = x - x^2$ και την ευθεία $y = 0$. Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα διαπιστώνουμε ότι ένας κυλινδρικός φλοιός που παράγεται από την περιστροφή γύρω από την ευθεία $x = 2$ έχει ακτίνα $2 - x$, περιφέρεια $2\pi(2 - x)$ και ύψος $x - x^2$. Συνεπώς ο όγκος του στερεού είναι

$$V = \int_0^1 2\pi(2-x)(x-x^2)\, d\,x = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, d\,x = 2\pi\Big(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{2}\,.$$



13.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες των γραφημάτων των παραβολών $y = x^2$ και $y^2 = x$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής των δυο παραβολών στο τεταρτημόριο είναι τα $(0,0)$ και $(1,1)$ και εφαρμόστε την μέθοδο των παράλληλων διατομών και ειδικότερα το Παραδείγμα 14.3 ή 14.4 **Απ.** $\frac{1}{3}$

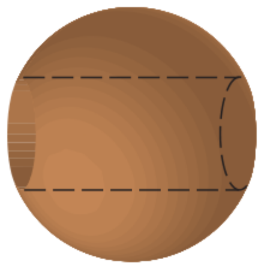
Άσκηση 2. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και την ευθεία $y + x = 1$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία είναι τα $(1,0)$ και $(0,1)$ και εφαρμόστε την μέθοδο των παράλληλων διατομών και ειδικότερα το Παραδείγμα 14.3 ή 14.4 **Απ.** $\frac{\pi-2}{4}$

Άσκηση 3. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$, την ευθεία $y = 0$ και την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A = (1,1)$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 2x - 1$. Αν χρησιμοποιήσετε διατομές κάθετες στον x-άξονα το χωρίο του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό χωρίζεται σε δυο υποχωρία. Αν θεωρήσετε διατομές κάθετες στον y-άξονα το χωρίο είναι ένα και ο υπολογισμός του εμβαδού είναι πιο άμεσος. **Απ.** $\frac{1}{12}$

Άσκηση 4. Ένας κατασκευαστής ανοίγει μια κυκλική οπή ακτίνας $3\,cm$ στο κέντρο μιας μεταλλικής σφαίρας ακτίνας $5\,cm$. Να υπολογισθεί ο όγκος του τμήματος της σφαίρας (δακτυλιδιού) που απομένει.



Υπόδειξη: Το δακτυλίδι παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου ανάμεσα στον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$ και της ευθείας $y = 3$. Βρείτε τα σημεία τομής τους $(-4,3)$ και $(4,3)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον x-άξονα. **Απ.** $\frac{256}{3}\pi\, cm^3$

Άσκηση 5. Να υπολογισθούν οι όγκοι των στερεών που παράγονται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x}$, και τις ευθείες $y = 0$ και $x = 4$, α) γύρω από την ευθεία $x = 4$ και β) γύρω από την ευθεία $y = 2$. **Απ.** α) $\frac{256}{15}\pi$, β) $\frac{40}{3}\pi$

Άσκηση 6. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = 2\sqrt{x-1}$, και την ευθεία $y = x - 1$, γύρω από την ευθεία $x = -1$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής της παραβολής με την ευθεία είναι τα $(1,0)$ και $(5,4)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον y-άξονα **Απ.** $\frac{96}{5}\pi$

Άσκηση 7. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από την $y = 4$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 2x$, και την ευθεία $y = x$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθείας είναι τα $(0,0)$ και $(3,3)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον x-άξονα **Απ.** $\frac{153}{5}\pi$

Άσκηση 8. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x}$, και τις ευθείες $y = 0$ και $x = 1$, γύρω από την ευθεία $x = 2$.

Υπόδειξη: Βρείτε ότι τα σημεία τομής της παραβολής με τις ευθείες είναι τα $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$ και θεωρήστε παράλληλες διατομές κάθετες στον y-άξονα **Απ.** $\frac{28}{15}\pi$

(Οι ακόλουθες ασκήσεις να λυθούν με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών.)

Άσκηση 9. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$, και τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$ και $x = 2$. **Απ.** 2π

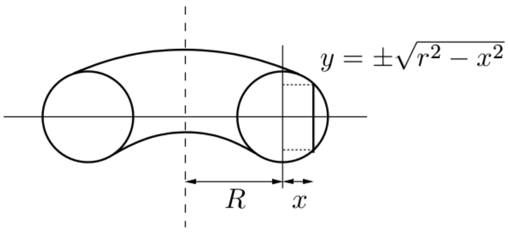
Άσκηση 10. Να υπολογισθεί ο όγκος του φραγμένου στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από τον y-άξονα του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = 4(x-2)^2$, και $y = x^2 - 4x + 7$. **Απ.** 16π

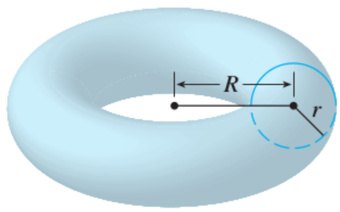
Άσκηση 11. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από τον x-άξονα του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $x = 1 + y^2$, και τις ευθείες $x = 0$, $y = 1$ και $y = 2$. **Απ.** $\frac{21}{2}\pi$

Άσκηση 12. Να υπολογισθεί ο όγκος των στερεών που παράγονται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$, και τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ α) γύρω από την ευθεία $x = 1$, β) γύρω από την ευθεία $x = 4$. **Απ.** α) $\frac{21}{2}\pi$, β) $\frac{67}{6}\pi$.

Άσκηση 13. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από την ευθεία $y = 3$ του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x-1}$, και τις ευθείες $y = 0$, και $x = 5$. **Απ.** 24π .

Άσκηση 14. Να υπολογισθεί ο όγκος του τόρου (σαμπρέλας) ακτίνων R και r, με την μέθοδο των κυλινδρικών φλοιών χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα σχήματα





Υπόδειξη: Ακτίνα φλοιού: $x + R$, περιφέρεια φλοιού: $2\pi(x + R)$, ύψος φλοιού: $2\sqrt{r^2 - x^2}$, όρια ολοκλήρωσης: $x \in [-r, r]$. **Απ.** $2\pi R(\pi r^2)$.

Κεφάλαιο 14

Διαφορικές Εξισώσεις

14.1 Εισαγωγικά

Η πιο απλή διαφορική εξίσωση (ΔΕ) πρώτης τάξης είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y' = F(x, y)$$

Η άγνωστη είναι μια πραγματική συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία εξαρτάται από μια πραγματική μεταβλητή x που διατρέχει κάποιο διάστημα I του $\mathbb{R}$. Η μεταβλητή x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, και η άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή της ΔΕ. Υιοθετούμε την σύμβαση ότι με y' συμβολίζουμε την πρώτη παράγωγο της $y = f(x)$, δηλαδή $y' = f'(x)$ και την παράγωγο n-τάξης με $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.

Το ζητούμενο είναι από μια δοσμένη σχέση της παραπάνω μορφής, π.χ. την $y' = 0$, γνωρίζοντας δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης $y = f(x)$, σε κάθε σημείο $x \in \mathrm{I}$ και για κάθε $y \in f(I) \subset \mathbb{R}$, να βρούμε (αν είναι δυνατόν) το σύνολο των συναρτήσεων που η πρώτη τους παράγωγος αλλάζει με τον δοσμένο τρόπο. Για παράδειγμα, αν $y' = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$, τότε γνωρίζουμε ότι το σύνολο των συναρτήσεων με αυτή την ιδιότητα είναι οι σταθερές συναρτήσεις, δηλαδή $y = c$, όπου c ένας οποιοδήποτε σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γενικότερα, μια n-τάξης ΔΕ είναι μια εξίσωση της μορφής

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

που εμπλέκει οπωσδήποτε την n-τάξης παράγωγο $y^{(n)}$ κι ενδεχομένως την ανεξάρτητη μεταβλητή x, την άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ και τις παραγώγους $y^{(k)}$ με $k \leq n - 1$.

Παράδειγμα 14.1.1. Μια ειδική λύση της ΔΕ $y' + 2\,x\,y = 0$ είναι η συνάρτηση $y = e^{-x^2}$, γιατί

$$(e^{-x^2})' + 2\,x\,e^{-x^2} = -2\,x\,e^{-x^2} + 2\,x\,e^{-x^2} = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν την ΔΕ είναι η μονοπαραματρική οικογένεια συναστήσεων $y = c\,e^{-x^2}$, όπου c μια πραγματική παράμετρος, η οποία περιλαμβάνει την ειδική λύση για $c = 1$.

Γενικότερα, μιλάμε για την γενική λύση μιας n-τάξης ΔΕ όταν η άγνωστη συνάρτηση που ικανοποιεί την ΔΕ εξαρτάται από n το πλήθος πραγματικές παραμέτρους.

Παράδειγμα 14.1.2. Η ΔΕ $y'' + y = 0$, ικανοποιείται στο $(-\infty, +\infty)$ τόσο από την συνάρτηση $y_1 = \sin x$, αφού $(\sin x)'' + \sin x = (\cos x)' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$, όσο κι από την $y_2 = \cos x$, αφού $(\cos x)'' + \cos x = (-\sin x)' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$. Η γενική λύση είναι η ΔΕ είναι η $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Το ότι ο γραμμικός συνδυασμός των y_1, y_2 είναι λύση της ΔΕ είναι απόρροια του γεγονότος ότι τόσο η y όσο και η y'' εμφανίζονται με γραμμικό τρόπο στην ΔΕ.

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε την διαδικασία επίλυσης απλών ΔΕ με μεθόδους που βασίζονται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων που έχουμε περιγράψει στις προηγούμενες ενότητες.

14.2 Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

14.2.1 ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

Οι ΔΕ της κατηγορίας αυτής χωρίζουν την ανεξάρτητη μεταβλητή x και την εξαρτημένη y και έχουν την γενική μορφή

$$B(y)\, y' = A(x)$$

Η πιο απλή ΔΕ αυτής της μορφής είναι όταν $B(y) = 1$, και $A(x)$ μια δοσμένη συνάρτηση του x που ορίζεται στο διάστημα I, δηλαδή

$$y' = A(x)$$

Λύση της εξίσωσης αυτής στο I είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο I και ικανοποιεί την ΔΕ, δηλαδή

$$f'(x) = A(x)$$

ή αλλιώς οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της συνάρτησης $y = A(x)$ στο I. Αν η $y = A(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο I, τότε σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, οι λύσεις της $y' = A(x)$ στο I είναι οι ίδιες με τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $y = A(x)$ στο I.
Με άλλα λόγια η γενική λύση της $y' = A(x)$ στο I είναι η

$$y = f(x) = \int A(x)\, d\,x = \int_a^x A(t)\, d\,t + c\,, \qquad (x \text{ στο } I)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την γενική μορφή της ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

$$B(y)\, y' = A(x)$$

Μια λύση της παραπάνω ΔΕ είναι μια συνάρτηση $y = f(x)$ που ικανοποιεί την ΔΕ, δηλαδή

$$B\big(f(x)\big)\, f'(x) = A(x)$$

Θεωρώντας την ισότητα αυτή ως ισότητα συναρτήσεων και παίρνοντας το αόριστο ολοκλήρωμά τους ως προς x, έχουμε

$$\int B\big(f(x)\big)\, f'(x)\, d\,x = \int A(x)\, d\,x \quad \overset{y=f(x)}{\Longrightarrow} \quad \int B(y)\, d\,y = \int A(x)\, d\,x$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση $y = f(x)$. Οπότε, αν $G(y)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $B(y)$ και $H(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $A(x)$ τότε η τελευταία εξίσωση μας πληροφορεί ότι

$$G\big(f(x)\big) = H(x) + c$$

Οι $G(y)$ και $H(x)$ είναι, υποτίθεται, γνωστές συναρτήσεις αφού υπολογίζονται με ολοκλήρωση από τις συναρτήσεις $B(y)$ και $A(x)$, αντίστοιχα, οπότε λύνοντας την $G\big(f(x)\big) = H(x) + c$ ως προς $f(x)$, έχουμε την γενική λύση $y = f(x)$ της ΔΕ. Θα πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι έστω κι αν μπορούμε να υπολογίσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα (το οποίο δεν είναι εφικτό πάντα για αυθαίρετες συναρτήσεις $B(y)$ και $A(x)$) η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης μπορεί να είναι αρκετά δύσκολο εγχείρημα.

Παράδειγμα 14.2.1. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές

$$y\,y' = x$$

Ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $B(y) = y$ είναι το $\frac{1}{2}\,y^2$, ενώ της $A(x) = x$ είναι το $\frac{1}{2}\,x^2$. Συνεπώς, η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$\frac{1}{2}\,y^2 = \frac{1}{2}\,x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 2\,c \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + c$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας σημειώνουμε την αυθαίρετη σταθερή $2\,c$ ως c. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις α) Αν $c > 0$ τότε οι συναρτήσεις $y = f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = f(x) = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις της ΔΕ στο $(-\infty, +\infty)$. β) Αν $c = 0$, τότε οι συναρτήσεις $y = f(x) = x$ και $y = f(x) = -x$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις της ΔΕ στο $(-\infty, +\infty)$. γ) Αν $c < 0$ τότε οι συναρτήσεις $y = f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = f(x) = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις της ΔΕ ή στο $(-\infty, -\sqrt{|c|})$ ή στο $(\sqrt{|c|}, +\infty)$.

Παράδειγμα 14.2.2. Θα λύσουμε την ομογενή γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$y' + p(x)\,y = 0$$

όπου η $p(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I. Η ΔΕ χωρίζει μεταβλητές γιατί μπορεί να γραφεί ως εξής

$$y' + p(x)\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\,y' = -p(x)$$

με $y \neq 0$. Μια αντιπαράγωγος (ή αόριστο ολοκλήρωμα) της $\frac{1}{y}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ είναι η $\ln|y|$ και μια αντιπαράγωγος της $-p(x)$ στο I είναι η $-\int p(x)\,d\,x$. Οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα

$$\ln|y| = -\int p(x)\,d\,x + c \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{-\int p(x)\,d\,x + c} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{c}\,e^{-\int p(x)\,d\,x}$$

Αν συμβολίσουμε την σταθερή $\pm e^c$ με c, η γενική λύση της ΔΕ $y' + p(x)\,y = 0$ στο διάστημα I είναι η

$$y = f(x) = c\,e^{-\int p(x)\,d\,x}, \qquad (x \text{ στο } I)$$

Παρατηρούμε ότι αν $c = 0$, τότε έχουμε ότι $y = 0$ η οποία είναι μια ειδική λύση της ΔΕ $y' + p(x)\,y = 0$ στο διάστημα I.

14.2.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Η πιο γενική μορφή μιας γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης είναι η ΔΕ

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

όπου $p(x)$ και $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I. Η επίλυση της ΔΕ αυτής επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με μια κατάλληλη συνάρτηση έτσι ώστε το αριστερό μέλος της εξίσωσης να γίνει συνολικά η παράγωγος γινομένου συναρτήσεων. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας και είναι η συνάρτηση

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,d\,x} = e^{\int_a^x p(t)\,d\,t}$$

για κάθε $x \in I$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu'(x) = p(x)\,e^{\int p(x)\,d\,x} = p(x)\,\mu(x)$$

Οπότε, αν $y = f(x)$ η γενική λύση της ΔΕ στο I, τότε έχουμε διαδοχικά

$$
\begin{aligned}
& f'(x) + p(x)\, f(x) = q(x) && \Rightarrow \\
& && \text{(πολλ και τα δυο μέλη με } \mu(x) \text{)} \\
& \mu(x)\big(f'(x) + p(x)\, f(x)\big) = \mu(x)\, q(x) && \Rightarrow \\
& \mu(x) f'(x) + \mu(x)\, p(x)\, f(x) = \mu(x)\, q(x) && \Rightarrow \\
& && \text{(} \mu'(x) = \mu(x)\, p(x) \text{)} \\
& \big(\mu(x)\, f(x)\big)' = \mu(x)\, q(x) && \Rightarrow \\
& && \text{(ολοκλ. και τα δυο μέλη ως προς } x \text{)} \\
& \textstyle\int \big(\mu(x)\, f(x)\big)'\, d\,x = \int \mu(x)\, q(x)\, d\,x && \Rightarrow \\
& \mu(x)\, f(x) = \textstyle\int \mu(x)\, q(x)\, d\,x + c && \Rightarrow \\
& f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\, q(x)\, d\,x + \frac{c}{\mu(x)}
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η μοναδική λύση της ΔΕ $y' + p(x)\, y = q(x)$ είναι η

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)\, q(x)\, d\,x + \frac{c}{\mu(x)}$$

όπου

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\, d\,x}$$

Παράδειγμα 14.2.3. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ $y' - 2\,x\,y = x$. Πρώτα απ'όλα υπολογίζουμε την συνάρτηση $\mu(x)$ με την οποία θα πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της ΔΕ. Έχουμε

$$\mu(x) = e^{\int -2\,x\,d\,x} = e^{-x^2}$$

Σημειώστε ότι στην ολοκλήρωση για την εύρεση της $\mu(x)$ δεν χρειάζεται να εμφανίσουμε σταθερή ολοκλήρωσης c. Πολλαπλασιάζουμε την ΔΕ με e^{-x^2} κι έχουμε

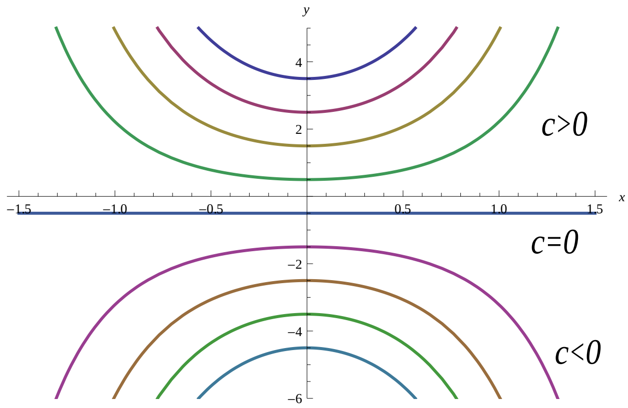
$$e^{-x^2}\, y' - 2\,x\, e^{-x^2}\, y = x\, e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-x^2}\, y\right)' = x\, e^{-x^2}$$

Ολοκληρώνουμε την προηγούμενη ως προς x κι έχουμε

$$e^{-x^2}\, y = \int x\, e^{-x^2}\, d\,x + c = -\frac{1}{2} \int \left(e^{-x^2}\right)'\, d\,x + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \quad \Rightarrow \quad e^{-x^2}\, y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

Οπότε λύνοντας την τελευταία ως προς y, η μοναδική λύση της ΔΕ είναι η

$$y = -\frac{1}{2} + c\, e^{x^2}$$



Σχήμα 14.1: Η γραφική παράσταση της λύσης της ΔΕ για διάφορες τιμές της παραμέτρου c.

14.3 Γραμμικές ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε ΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής

$$y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$$

όπου k, ℓ είναι δυο πραγματικοί αριθμοί. Το κύριο χαρακτηριστικό των ΔΕ αυτών είναι ότι η άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$, καθώς και οι παράγωγοί της μέχρι δεύτερης τάξης y' και y'', εμφανίζονται με γραμμικό τρόπο. Οι ΔΕ της μορφής αυτής ονομάζονται γραμμικές δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Υποθέτουμε ότι ο όρος μη-ομογένειας $q(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα I.

Θεωρούμε την ομογενή ΔΕ με $q(x) = 0$ και αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$y = e^{\rho\,x}$$

Εισάγωντας στην ομογενή ΔΕ βρίσκουμε ότι θα πρέπει

$$(\rho^2 + k\,\rho + \ell)\,e^{\rho\,x} = 0$$

δηλαδή το ρ θα πρέπει να είναι λύση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού $\rho^2 + k\,\rho + \ell = 0$, η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**. Οπότε, η επίλυση της γενικής ΔΕ ανάγεται στις εξής τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό πραγματικών λύσεων της πολυωνυμικής εξίσωσης δευτέρου βαθμού $\rho^2 + k\,\rho + \ell = 0$.

Πρώτη περίπτωση: Η $\rho^2 + k\,\rho + \ell = 0$ έχει δυο διαφορετικές πραγματικές λύσεις, τις ρ_1 και ρ_2, οπότε είναι $k = -\rho_1 - \rho_2$ και $\ell = \rho_1\,\rho_2$. Αν η $y = f(x)$ είναι γενική λύση της μη-ομογενούς

ΔΕ $y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$, στο $\boldsymbol{I}$, τότε θα πρέπει να ισχύει

$$f''(x) + k\,f'(x) + \ell\,f(x) = q(x) \qquad \Rightarrow$$

$$f''(x) - (\rho_1 + \rho_2)\,f'(x) + \rho_1\,\rho_2\,f(x) = q(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\big(f'(x) - \rho_1\,f(x)\big)' - \rho_2\,\big(f'(x) - \rho_1\,f(x)\big) = q(x)$$

Θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = f'(x) - \rho_1\,f(x)$$

μέσω της οποίας η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$g'(x) - \rho_2\,g(x) = q(x)$$

η οποία είναι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα και η γενική λύση της είναι

$$g(x) = e^{\rho_2\,x}\int e^{-\rho_2\,x}\,q(x)\,d\,x + c_1\,e^{\rho_2\,x}$$

Αφού υπολογίσουμε την $g(x)$ από την προηγούμενη ισότητα επανερχόμαστε στον ορισμό της $g(x)$ και παρατηρούμε ότι και η σχέση που συνδέει την $g(x)$ με την λύση $f(x)$ της ΔΕ που θέλουμε να βρούμε είναι πάλι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης δηλαδή η

$$f'(x) - \rho_1\,f(x) = g(x)$$

Οπότε, με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, έχουμε ότι η $f(x)$ είναι η

$$f(x) = e^{\rho_1\,x}\int e^{-\rho_1\,x}\,g(x)\,d\,x + c_2\,e^{\rho_1\,x}$$

Παράδειγμα 14.3.1. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = x$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\rho^2 - 3\,\rho + 2 = 0$ είναι οι $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$. Υπολογίζουμε την βοηθητική συνάρτηση $g(x)$ η οποία είναι λύση της ΔΕ

$$g'(x) - 2\,g(x) = x$$

κι έχουμε

$$g(x) = e^{2\,x}\int x\,e^{-2\,x}\,d\,x + c_1\,e^{2\,x} = e^{2\,x}\Big(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\Big)\,e^{-2\,x} + c_1\,e^{2\,x} = -\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + c_1\,e^{2\,x}$$

Με την βοήθεια της $g(x)$ η γενική λύση $y = f(x)$ της αρχικής ΔΕ είναι

$$\begin{aligned} y = f(x) \;&= e^x \int e^{-x}\Big(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2} + c_1\, e^{2\,x}\Big)\, d\,x + c_2 e^x \\ &= e^x\Big(-\frac{1}{4}\int\, e^{-x}\, d\,x - \frac{1}{2}\int\, x\, e^{-x}\, d\,x + c_1 \int\, e^x\, d\,x\Big) + c_2\, e^x \\ &= e^x\Big(\, \frac{1}{4}\, e^{-x} + \frac{1}{2}\,(x+1)\, e^{-x} + c_1\, e^x\Big) + c_2\, e^x \\ &= \frac{3}{4} + \frac{x}{2} + c_1\, e^{2\,x} + c_2\, e^x \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι στις επιμέρους ολοκληρώσεις δεν είναι απαραίτητο να εμφανίσουμε επιπλέον σταθερές ολοκλήρωσης. Είναι αρκετό να βεβαιωθούμε ότι εμφανίζονται οι σταθερές c_1 και c_2 στην διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η γενική λύση απαρτίζεται από δυο μέρη. Ένα μέρος που περιέχει τις δυο σταθερές c_1, και c_2, και ένα μέρος που δεν περιέχει σταθερές. Το πρώτο μέρος είναι λύση της ομογενούς ΔΕ, ενώ το δεύτερο μέρος είναι μια ειδική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ, δηλαδή

$$y = f(x) = y_{\text{ειδ.}} + y_{\text{ομογ.}}\,, \qquad y_{\text{ειδ.}} = \frac{3}{4} + \frac{x}{2}\,, \qquad y_{\text{ομογ.}} = c_1\, e^{2\,x} + c_2\, e^x$$

Αυτό είναι κοινό χαρακτηριστικό όλων των γραμμικών ΔΕ δεύτερης τάξης, και είναι απόρροια της γραμμικότητάς τους.

Δεύτερη περίπτωση: Η χαρακτηριστική δευτεροβάθμια εξίσωση $\rho^2 + k\,\rho + \ell = 0$ έχει μια διπλή πραγματική λύση, την ρ, οπότε είναι $k = -2\,\rho$ και $\ell = \rho^2$. Αν η $y = f(x)$ είναι γενική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ $y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$, στο I, τότε θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} & f''(x) + k\,f'(x) + \ell\,f(x) = q(x) && \Rightarrow \\ & f''(x) - 2\,\rho\,f'(x) + \rho^2\,f(x) = q(x) && \Rightarrow \\ & \big(f'(x) - \rho\,f(x)\big)' - \rho\,\big(f'(x) - \rho\,f(x)\big) = q(x) \end{aligned}$$

Θεωρούμε και πάλι την βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = f'(x) - \rho\,f(x)$$

μέσω της οποίας η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$g'(x) - \rho\,g(x) = q(x)$$

η οποία είναι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα και η γενική λύση της είναι

$$g(x) = e^{\rho x} \int e^{-\rho x}\, q(x)\, d\,x + c_1\, e^{\rho x}$$

Αφού υπολογίσουμε την $g(x)$ από την προηγούμενη ισότητα επανερχόμαστε στον ορισμό της $g(x)$ και παρατηρούμε ότι και η σχέση που συνδέει την $g(x)$ με την λύση $f(x)$ της ΔΕ που θέλουμε να βρούμε είναι πάλι μια γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης δηλαδή η

$$f'(x) - \rho\, f(x) = g(x)$$

Οπότε, με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, έχουμε ότι η $f(x)$ είναι η

$$f(x) = e^{\rho x} \int e^{-\rho x}\, g(x)\, d\,x + c_2\, e^{\rho x}$$

Παράδειγμα 14.3.2. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 2\,y' + \ y = \sin x$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση $\rho^2 - 2\,\rho + 1 = 0$ έχει μια διπλή ρίζα την $\rho = 1$. Υπολογίζουμε την βοηθητική συνάρτηση $g(x)$ η οποία είναι λύση της ΔΕ

$$g'(x) - \ g(x) = \sin x$$

κι έχουμε

$$g(x) = e^x \int e^{-x}\ \sin x\, d\,x + c_1\, e^x = -\frac{1}{2}\,(\cos x + \sin x) + c_1\, e^x$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της Άσκησης 3.(α) στη σελίδα 106, με $a = -1$ και $b = 1$. Με την βοήθεια της $g(x)$ η γενική λύση $y = f(x)$ της αρχικής ΔΕ είναι

$$\begin{aligned} y = f(x) \ &= e^x \int e^{-x}\Big(-\frac{1}{2}\,(\cos x + \sin x) + c_1\, e^x\Big)\, d\,x + c_2 e^x \\ &= e^x\Big(-\frac{1}{2} \int\ e^{-x}(\cos x + \sin x)\ d\,x + c_1 \int\ d\,x\Big) + c_2\, e^x \\ &= e^x\Big(\ \frac{1}{2}\, e^{-x}\ \cos x + c_1\, x\Big) + c_2\, e^x \\ &= \frac{1}{2}\ \cos x + c_1\, x\, e^x + c_2\, e^x \end{aligned}$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της Άσκησης 3(α),(β) σελ. 106 για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Παρατηρούμε ότι και πάλι η λύση εκφράζεται ως άθροισμα δυο επιμέρους όρων. Ο ένας όρος $c_1\, x\, e^x + c_2\, e^x$ που περιέχει τις σταθερές ολοκλήρωσης c_1, και

c_2 και αποτελεί την γενική λύση της ομογενούς ΔΕ $y'' - 2\,y' + y = 0$, κι ο όρος $\frac{1}{2}\cos x$ που είναι μια ειδική λύση της μή ομογενούς ΔΕ $y'' - 2\,y' + y = \sin x$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι σε αντιδιαστολή με την προηγούμενη περίπτωση όπου είχαμε δυο διαφορετικές ρίζες ρ_1, και ρ_2 και η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ είναι

$$y_{\text{ομογ}} = c_1\, e^{\rho_1\, x} + c_2\, e^{\rho_2\, x}$$

στην περίπτωση που έχουμε μια διπλή ρίζα, η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ είναι

$$y_{\text{ομογ}} = c_1\, x\, e^{\rho\, x} + c_2\, e^{\rho\, x}$$

Αυτό αποτελεί κοινό χαρακτηριστικό όλων των γραμμικών ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές για τις οποίες η αντίστοιχη χαρακτηριστική δευτεροβάμια εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα ρ.

Τρίτη περίπτωση: Η χαρακτηριστική δευτεροβάθμια εξίσωση $\rho^2 + k\,\rho + \ell = 0$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, τις $\rho + i\,\lambda$, και $\rho - i\,\lambda$ οπότε είναι $k = -2\,\rho$ και $\ell = \rho^2 + \lambda^2$. Αν η $y = f(x)$ είναι γενική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ $y'' + k\,y' + \ell\,y = q(x)$, στο I, τότε θα πρέπει να ισχύει

$$f''(x) + k\,f'(x) + \ell\,f(x) = q(x) \qquad \Rightarrow$$

$$f''(x) - 2\,\rho\,f'(x) + (\rho^2 + \lambda^2)\,f(x) = q(x)$$

για κάθε x στο I. Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της προηγούμενης ΔΕ με τον όρο $e^{-\rho\,x}$, και εισαγάγουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$g(x) = e^{-\rho\,x}\,f(x)$$

για την οποία η ΔΕ ανάγεται στην

$$g''(x) + \lambda^2\,g(x) = e^{-\rho\,x}\,q(x)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της προηγούμενης σχέσης μια φορά με τον όρο $\sin(\lambda\,x)$ και μια φορά με τον όρο $\cos(\lambda\,x)$ και βρίσκουμε αντίστοιχα τις

$$\big(g'(x)\,\sin(\lambda\,x) - \lambda\,g(x)\,\cos(\lambda\,x)\big)' = e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\sin(\lambda\,x)$$

$$\big(g'(x)\,\cos(\lambda\,x) + \lambda\,g(x)\,\sin(\lambda\,x)\big)' = e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\cos(\lambda\,x)$$

Παίρνοντας το αόριστο ολοκλήρωμα και στα δυο μέλη των προηγούμενων σχέσεων έχουμε

$$g'(x)\,\sin(\lambda\,x) - \lambda\,g(x)\,\cos(\lambda\,x) = \int e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\sin(\lambda\,x)\,d\,x + c_1$$

$$g'(x)\,\cos(\lambda\,x) + \lambda\,g(x)\,\sin(\lambda\,x) = \int e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\cos(\lambda\,x)\,d\,x + c_2$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες σταθερές. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με $-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda\,x)$ και την δεύτερη με $\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda\,x)$ και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} g(x) = \ & \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda\,x)\int e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\cos(\lambda\,x)\,d\,x - \frac{1}{\lambda}\cos(\lambda\,x)\int e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\sin(\lambda\,x)\,d\,x \\ & -\frac{c_1}{\lambda}\cos(\lambda\,x) + \frac{c_2}{\lambda}\sin(\lambda\,x) \end{aligned}$$

Επανερχόμενοι στον ορισμό της βοηθητικής συνάρτησης $g(x)$ έχουμε ότι η λύση $y = f(x)$ της ΔΕ στην περίπτωση δυο συζυγών μιγαδικών ριζών του χαρακτηριστηκού πολυωνύμου είναι

$$\begin{aligned} f(x) = \ & \frac{e^{\rho\,x}}{\lambda}\sin(\lambda\,x)\int e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\cos(\lambda\,x)\,d\,x - \frac{e^{\rho\,x}}{\lambda}\cos(\lambda\,x)\int e^{-\rho\,x}\,q(x)\,\sin(\lambda\,x)\,d\,x \\ & -\frac{c_1}{\lambda}e^{\rho\,x}\cos(\lambda\,x) + \frac{c_2}{\lambda}e^{\rho\,x}\sin(\lambda\,x) \end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε τα αόριστα ολοκληρώματα, σύμφωνα με τον ορισμό τους, με ορισμένο ολοκλήρωμα από ένα αυθαίρετο και βολικό από πλευράς πράξεων x_0 μέχρι x, η λύση $y = f(x)$ μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$f(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{\lambda}e^{\rho\,(x-t)}\sin\big(\lambda\,(x-t)\big)\,q(t)\,d\,t - \frac{c_1}{\lambda}e^{\rho\,x}\cos(\lambda\,x) + \frac{c_2}{\lambda}e^{\rho\,x}\sin(\lambda\,x)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(\lambda\,x)\,\cos(\lambda\,t) - \cos(\lambda\,x)\,\sin(\lambda\,t) = \sin\big(\lambda\,(x-t)\big)$$

Παράδειγμα 14.3.3. Θα βρούμε την γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 2\,y' + 2 = 2\,\cos x + \sin x$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho^2+2\,\rho+2 = 0$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες τις $\rho_1 = -1+i$, και $\rho_2 = -1-i$. Αν $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της ΔΕ, θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση $g(x) = e^x\,f(x)$ για την οποία η ΔΕ

$$f''(x) + 2\,f'(x) + 2\,f(x) = 2\,\cos x + \sin x$$

μετατρέπεται στην

$$g''(x) + g(x) = 2\,e^x\,\cos x + e^x\,\sin x$$

Αφού το φανταστικό μέρος της ρίζας είναι $\lambda = 1$, πολλαπλασιάζουμε την προηγούμενη σχέση μια φορά με $\sin x$ και μια $\cos x$ την προηγούμενη και παίρνουμε

$$(g'(x)\,\sin x - g(x)\,\cos x)' = e^x\left(2\cos x\sin x + (\sin x)^2\right)$$

$$(g'(x)\,\cos x + g(x)\,\sin x)' = e^x\big(2\,(\cos x)^2 + \cos x\,\sin x\big)$$

Οπότε ολοκληρώνοντας κατά μέλη τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$g'(x)\,\sin x - g(x)\,\cos x = \int e^x\left(2\cos x\sin x + (\sin x)^2\right)d\,x = e^x\,(\sin x)^2 + c_1$$

$$g'(x)\,\cos x + g(x)\,\sin x = \int e^x\left(2\,(\cos x)^2 + \cos x\,\sin x\right)d\,x = e^x(1+\cos x\,\sin x) + c_2$$

όπου για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της Άσκησης 3 στη σελ. 106, καθώς και τριγωνομετρικές ταυτότητες. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη από τις τελευταίες σχέσεις με $-\cos x$ και την δεύτερη με $\sin x$ και τις σχέσεις που προκύπτουν τις προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε

$$g(x) = e^x\,\sin x - c_1\,\cos x + c_2\,\sin x$$

και επομένως η λύση της ΔΕ είναι η

$$y = f(x) = e^{-x}\,g(x) = \sin x - c_1\,e^{-x}\,\cos x + c_2\,e^{-x}\,\sin x$$

14.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές. Για κάθε εξίσωση να βρεθούν όλες οι λύσεις της και τα αντίστοιχα διαστήματα.

$$a)\quad y' = e^{-y}\,,\quad b)\quad y^2\,y' = 1\,,\qquad c)\quad (1+x^2)\,y\,y' = 1+y^2\,,\quad d)\quad x\,y\,y' = (1+x^2)\,(1+y^2)\,,$$

$$e)\quad y' = y^2\,,\quad f)\quad (x-1)y' = x\,y\,,\quad g)\quad y' = (y-1)(y-2)\,,\qquad h)\quad (x^2-4)y' = y\,.$$

Απ. $a)\,y = \ln|x+c|$, $b)\,y = \sqrt[3]{3\,x+c}$, $c)\,y^2+1 = c\,e^{\arctan x}$, $d)\,y^2+1 = c\,x^2e^{x^2}$, $e)\,y = \frac{-1}{x+c}$, $f)\,y = c\,(x-1)\,e^x$, $g)\,y = \dfrac{2-c\,e^x}{1-c\,e^x}$, $h)\,y = 0$, ή $y = c + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|$.

Άσκηση 2. Να βρεθεί η γενική λύση της $y' + k\,y = 0$ στο $(-\infty,+\infty)$, όπου k πραγματική σταθερή παράμετρος.
Απ. $y = c\,e^{-k\,x}$

Άσκηση 3. Να λυθούν οι παρακάτω γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης. Για κάθε εξίσωση να βρεθούν όλες οι λύσεις της και τα αντίστοιχα διαστήματα.

$$a)\quad y' + y = x\,e^{2\,x}\,,\quad b)\quad x\,y' - y = 1\,,\qquad c)\quad x\,y' - y = x\,,$$

$$d)\quad y' + x\,y = x^3\,,\quad e)\quad y' + (\tan x)\,y = \cos x\,,\quad f)\quad y' + (\cot x)\,y = \cos x\,.$$

Απ. $a)\,y = \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\right)e^{2\,x} + c\,e^{-x}$, $b)\,y = c\,x - 1$, $c)\,y = c\,x + x\ln|x|$, $d)\,y = x^2 - 2 + c\,e^{-x^2/2}$, $e)\,y =$

$x\,\cos x + c\,\cos x\,,\quad f)\; y = -\frac{1}{2}\,\frac{(\cos x)^2}{\sin x} + c\,\frac{1}{\sin x}\,.$

Άσκηση 4. Να βρεθούν οι συντελεστές k και ℓ έτσι ώστε η γραμμική ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές $y'' + k\,y' + \ell\,y = 0$ να ως έχει λύση την

$$a)\quad y = e^{-x} + 3\,e^{3\,x}\,,\qquad b)\quad y = (1+2\,x)\,e^{x}\,,\qquad c)\quad y = e^{-2\,x}\,\sin(3\,x)$$

Ποιά είναι η γενική λύση της ΔΕ σε κάθε περίπτωση?

Απ. $a)\; k=-1,\; \ell=-2,\quad y = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{2\,x}\,,\quad b)\; k=-2,\; \ell=1,\quad y = c_1\,e^{x} + c_2\,x\,e^{x}\,,$
$c)\; k=4,\; \ell=13,\quad y = c_1\,e^{-2\,x}\cos(3\,x) + c_2\,e^{-2\,x}\sin(3\,x)\,.$

Άσκηση 5. Να βρεθεί η γενική λύση για κάθε μια από τις ακόλουθες ΔΕ γραμμικές ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$a)\quad y'' - 4\,y' + 3\,y = e^{x}\,,\quad b)\quad y'' + 6\,y' + 9\,y = x\,e^{3\,x}\,,\qquad c)\quad y'' - 2\,y' + 5\,y = \sin(2\,x)$$

Απ. $a)\; y = -\frac{1}{4}\,e^{x}\,(1+2\,x) + c_1\,e^{x} + c_2\,e^{3\,x}\,,\quad b)\; y = \frac{1}{108}\,e^{3\,x}(3\,x-1) + c_1\,e^{-3\,x} + c_2\,x\,e^{-3\,x}\,,$
$c)\; y = \frac{1}{17}\,\big(4\,\cos(2\,x) + \sin(2\,x)\big) + c_1\,e^{x}\cos(2\,x) + c_2\,e^{x}\sin(2\,x)\,.$

Κεφάλαιο 15

Εφαρμογές των Διαφορικών Εξισώσεων στην Φυσική και στην Οικολογία

15.1 Αδρανοποίηση ραδιενεργών υλικών

Όλα τα χημικά στοιχεία της φύσης εμφανίζονται σε διάφορες παραλλαγές που ονομάζονται ισότοπα. Αυτό ισχύει τόσο για τα ελαφριά, όπως το υδρογόνο, όσο και για τα βαριά, όπως το ουράνιο. Η διαφορά ενός ισότοπου από το άλλο βρίσκεται στη σύσταση του πυρήνα. Ακριβέστερα, όλα τα ισότοπα ενός στοιχείου έχουν στον πυρήνα τους τον ίδιο αριθμό πρωτονίων, αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων.

Οι πυρήνες ορισμένων ισοτόπων είναι ασταθείς και συνεχώς διασπώνται, εκπέμποντας και ακτινοβολία. Αυτά τα ισότοπα λέγονται ραδιενεργά. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του άνθρακα, C. Αυτό το στοιχείο το βρίσκουμε κυρίως στη μορφή του σταθερού ισότοπου ^{12}C (άνθρακας-12). Ωστόσο, κάθε δείγμα άνθρακα περιέχει και ένα ποσοστό του σταθερού ισότοπου ^{13}C , καθώς και του ραδιενεργού ^{14}C .

Η διάσπαση ενός ασταθούς πυρήνα θεωρείται πως είναι μια αμιγώς κβαντομηχανική διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι είναι πιθανοκρατική, οπότε ο χρόνος ζωής κάθε πυρήνα ενός ραδιενεργού ισότοπου είναι απροσδιόριστος. Εμπειρικά, ωστόσο, έχει διαπιστωθεί ότι, ο συνολικός αριθμός των ασταθών πυρήνων, $N(t)$, σε χρόνο t, που περιέχει ένα ραδιενεργό υλικό μειώνεται με ρυθμό ανάλογο προς τον ίδιο τον $N(t)$. Με άλλα λόγια, η μεταβολή του $N(t)$ περιγράφεται από μια ΔΕ της μορφής

$$N' = -b\,N$$

όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t, η εξαρτημένη μεταβλητή είναι ο συνολικός αριθμός των ασταθών πυρήνων $N(t)$ και $b > 0$ μια θετική πραγματική παράμετρος. Η παραπάνω ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και η γενική της λύση είναι

$$N(t) = c\,e^{-b\,t}$$

(δες Άσκηση 2 σελ. 130 στην προηγούμενη ενότητα). Αν γνωρίζουμε ότι για $t = t_0$ ο αριθμός των ασταθών πυρήνων είναι N_0, τότε από την προηγούμενη μπορούμε να προσδιορίσουμε την σταθερή ολοκλήρωσης c, θέτοντας για $t = t_0$, $N(t_0) = N_0$, κι έχουμε

$$N_0 = c\, e^{-b\, t_0} \quad \Rightarrow \quad c = N_0\, e^{b\, t_0}$$

και συνεπώς η συνάρτηση που μας δίνει τον αριθμό των ασταθών πυρήνων γίνεται

$$N(t) = N_0\, e^{-b\,(t-t_0)}$$

Η σταθερή b διαφέρει από ισότοπο σε ισότοπο και άρα είναι χαρακτηριστική του ρυθμού με τον οποίο διασπάται το καθένα τους. Για τον ^{14}C η παράμετρος b είναι $b \approx 1.21{\times}10^{-4}$/έτος. Ωστόσο, στις πηγές που δίνουν πληροφορίες για τις ιδιότητες των χημικών στοιχείων (Περιοδικοί Πίνακες) δεν αναφέρεται η τιμή της σταθερής b για καθένα από τα ραδιενεργά ισότοπα, αλλά ο χρόνος ημιζωής τους (half-life). Πρόκειται για το χρονικό διάστημα $T_{1/2}$ που απαιτείται για να μειωθεί το πλήθος των ασταθών ραδιενεργών πυρήνων στο μισό του αρχικού. Σύμφωνα με την λύση που βρήκαμε, αυτό το χρονικό διάστημα προσδιορίζεται από τη συνθήκη $\frac{1}{2} = e^{-bT_{1/2}}$. Άρα

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} \approx \frac{0.693}{b}$$

και ειδικότερα για τον ^{14}C, $T_{1/2} = 5\,730$ έτη.

Επειδή ο λόγος του ^{14}C προς το ^{12}C στην ατμόσφαιρα είναι σταθερός, το ίδιο ισχύει και για το σώμα των ανθρώπων και των άλλων έμβιων όντων. Αλλά, μόνο όσο αυτά βρίσκονται στη ζωή. Μόλις πεθάνουν, η απορρόφηση ^{14}C από την ατμόσφαιρα σταματάει. Άρα, με τη συνεχή διάσπασή του, αυτό το ισότοπο όλο και μειώνεται στο νεκρό σώμα και στα οστά τους. Συνεπώς, σε χρόνο T μετά το θάνατό τους, ο ^{14}C έχει μειωθεί στο $N/N_0 = e^{-bT}$ του αρχικού. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί και τη βάση της μεθόδου που χρησιμοποιείται στην παλεοντολογία και την αρχαιολογία για να προσδιορίσουν την ““ηλικία”” των ευρημάτων τους (radioactive dating): Το ποσοστό του ^{14}C που βρίσκεται σήμερα σε απομεινάρια οργανισμών μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το πότε περίπου πέθαναν και, άρα, το πριν από πόσους αιώνες βρίσκονταν στη ζωή.

15.2 Μοντέλα πληθυσμιακής αύξησης

15.2.1 Ο νόμος της εκθετικής αύξησης

Κάτω από ιδεατές συνθήκες (απεριόριστο περιβάλλον, επαρκής διατροφή, απουσία θηρευτών, ανοσία από ασθένειες, μη-μετανάστευση) είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός P ενός βιολογικού είδους αναπτύσσεται με ρυθμό ανάλογο του μεγέθους του υπάρχοντος πληθυσμού. Με μαθηματικούς όρους αυτό περιγράφεται από την σχέση

$$P' = r\,P\,, \qquad P(0) = P_0$$

όπου t δηλώνει τον χρονική μεταβλητή, r παραστάνει την σταθερή αναλογίας, και $P(t)$ περιγράφει τον πληθυσμό [1] στον χρόνο t. Μια εξίσωση αυτού του είδους λέγεται **νόμος εκθετικής αύξησης**. Ο νόμος γράφεται εναλλακτικά και ως

$$\frac{1}{P}\, P' = r\,, \qquad P(0) = P_0$$

και δηλώνει ότι ο σχετικός ρυθμός ανάπτυξης $\frac{P'}{P}$ του P είναι σταθερός. Ο νόμος αυτός διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον βρετανό οικονομολόγο Thomas Malthus το 1798.

Γενικά, αν ο ρυθμός που αλλάζει η ποσότητα P είναι ανάλογη του υπάρχουσας ποσότητα P τότε υπακούει στον νόμο εκθετικής ανάπτυξης. Αν $r > 0$, ο πληθυσμός αυξάνει, αν $r = 0$ ο πληθυσμός μένει σταθερός, κι αν $r < 0$ ο πληθυσμός μειώνεται. Η ΔΕ είναι η όμοια με αυτήν της προηγούμενης παραγράφου και η γενική λύση της είναι

$$P(t) = P_0\, e^{r\,t}$$

Αν θέλουμε να λάβουμε υπόψη στο μοντέλο μας και την μετανάστευση από ένα πληθυσμό με ένα σταθερό ρυθμό m, τότε η εξίσωση τροποποιείται ως εξής

$$P' = r\,P - m\,, \qquad P(0) = P_0$$

η οποία μπορεί να λυθεί εύκολα ή ως ΔΕ με χωριζόμενες μεταβλητές ή ως γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης. Η γενική λύση της τελευταίας είναι

$$P(t) = \frac{m}{r} + \left(P_0 - \frac{m}{r}\right) e^{r\,t}$$

15.2.2 Το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο

Ο πληθυσμός P συχνά αυξάνεται εκθετικά στα αρχικά στάδια ζωής του όμως σταδιακά φτάνει στο όριο χωρητικότητας του εξαιτίας περιβαλλοντικών πιέσεων και περιορισμένων διατροφικών πόρων. Για να περιγράψουμε το γεγονός ότι η σχετική ανάπτυξη μειώνεται καθώς ο πληθυσμός αυξάνει και γίνεται αρνητικός αν το P ξεπεράσει την φέρουσα χωρητικότητα του περιβάλλοντος K, δηλαδή τον μέγιστο πληθυσμό που είναι ικανό να υποστηρίξει το περιβάλλον μακροπρόθεσμα, θεωρούμε ότι ο σχετικός ρυθμός ανάπτυξης είναι

$$\frac{1}{P}\, P' = r\left(1 - \frac{P}{K}\right), \qquad P(0) = P_0$$

Ο νόμος αυτός λέγεται το λογισικό μοντέλο πληθυσμιακής ανάπτυξης και διατυπώθηκε από τον βέλγο μαθηματικό Pierre François Verhulst το 1838. Ισοδύναμα, έχουμε ότι

$$P' = r\,P\left(1 - \frac{P}{K}\right), \qquad P(0) = P_0$$

[1] Αν και ο αριθμός των μελών ενός είδους είναι μια συνάρτηση με τιμές στους ακέραιους υποθέτουμε ότι η $P(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση που θα μπορούσε για παράδειγμα να είναι η συνολική βιομάζα του είδους.

Υποθέτουμε ότι $r > 0$, και $K > 0$ στα παρακάτω. Η λογιστική εξίσωση έχει δυο ειδικές λύσεις οι οποίες καθορίζονται από τα σημεία μηδενισμού της P', δηλαδή $P = 0$ ή $P = K$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $P' < 0$ αν $P > K$ και $P' > 0$ αν $0 < P < K$ και συνεπώς η $P(t)$ είναι φθίνουσα αν $P_0 > K$ και αύξουσα αν $0 < P_0 < K$. Μπορούμε να βρούμε εύκολα την γενική λύση της λογιστικής εξίσωσης αφού είναι χωριζομένων μεταβλητών κι έχουμε

$$\int \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P-K}\right) d\,P = \int r\,d\,t + c \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{P}{P-K}\right| = r\,t + c$$

Λύνοντας την τελευταία ως προς P βρίσκουμε ότι

$$P(t) = \frac{K\,P_0}{P_0\,(1 - e^{-r\,t}) + K\,e^{-r\,t}}$$

όπου η σταθερή c ολοκλήρωσης με την P_0 συνδέονται με την σχέση $e^c = \frac{P_0}{P_0 - K}$. Παρατηρούμε ότι η γενική λύση περιλαμβάνει και τις δυο ειδικές λύσεις $P = 0$ αν $P_0 = 0$, και $\lim_{t\to+\infty} P(t) = K$, αν $P_0 > 0$.

Παραγωγίζοντας την λογιστική εξίσωση ως προς t βρίσκουμε ότι

$$P'' = r\,P'\left(1 - \frac{P}{K}\right) - r\,P\,\frac{P'}{K} = r\,P'\left(1 - \frac{P}{K} - \frac{P}{K}\right) = r^2\,P\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - 2\,\frac{P}{K}\right)$$

Αυτό δείχνει ότι ο ρυθμός αύξησης του P' έχει ακρότατες τιμές όταν $P = 0$, $P = K$ ή $P = \frac{K}{2}$. Αφού όμως οι $P(t) = 0$ και $P(t) = K$ είναι λύσεις ισορροπίας της λογιστικής εξίσωσης, τότε συμπεραίνουμε ότι ο πληθυσμός $P(t)$ αυξάνει γρηγορότερα όταν φθάσει στο μισό της φέρουσας χωρητικότητας, με την προϋπόθεση ότι $0 < P_0 < K$.

Παράδειγμα 15.2.1. Ένα μοντέλο για την διάδοση μιας φήμης είναι ότι ο ρυθμός διάδοσης είναι ανάλογος με το γινόμενο του ποσοστού y του πληθυσμού που έχουν ακούσει την φήμη και του ποσοστού του πληθυσμού που δεν έχουν ακούσει την φήμη. Με μαθηματικούς όρους αυτό περιγράφεται από την ΔΕ

$$y' = r\,y\,(1 - y)\,, \qquad y(0) = y_0$$

όπου r είναι μια σταθερή. Λύνοντας την παραπάνω ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών βρίσκουμε ότι

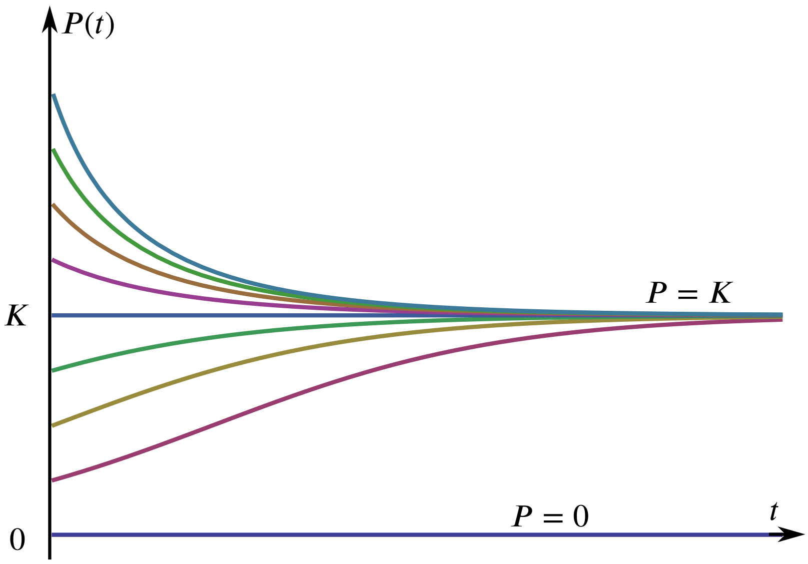
$$y = \frac{y_0}{y_0\,(1 - e^{-r\,t}) + e^{-r\,t}}$$

Ας υποθέσουμε ότι μια μικρή πόλη έχει 1000 κατοίκους. Στις 8 η ώρα το πρωί ($t = 0$), 80 κάτοικοι έχουν ακούσει την φήμη. Μέχρι το μεσημέρι ($t = 4$ ώρες), η φήμη έχει διαδοθεί έτσι ώστε οι μισοί κάτοικοι να την έχουν ακούσει. Δηλαδή,

$$y_0 = \frac{80}{1000} = \frac{2}{25}$$

και

$$\frac{y_0}{y_0\,(1 - e^{-4\,r}) + e^{-4\,r}} = \frac{1}{2}$$



Σχήμα 15.1: Γραφική παράσταση της λύσης της λογιστικής εξίσωσης για διάφορες αρχικές τιμές P_0. Όταν $\frac{K}{2} < P_0 < K$ η $P(t)$ φθάνει την μέγιστη τιμή της $P = K$ πιο γρήγορα από ότι όταν $0 < P_0 < \frac{K}{2}$. Όταν ο αρχικός πληθυσμός ξεπερνά την φέρουσα χωρητικότητα του περιβάλλοντος, δηλαδή $P_0 > K$, τότε η $P(t)$ φθίνει για να γίνει ασυμπτωτικά ίση με $P = K$.

Οπότε, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$2\,y_0 = y_0 - y_0\,e^{-4\,r} + e^{-4\,r} = y_0 + (1 - y_0)\,e^{-4\,t}$$

από την οποία έχουμε ότι

$$(e^{-r})^4 = e^{-4\,r} = \frac{y_0}{1 - y_0}$$

και

$$e^{-r} = \left(\frac{y_0}{1 - y_0}\right)^{1/4}$$

Συνεπώς

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0\,[\,1 - (e^{-r})^t\,] + (e^{-r})^t} = \frac{y_0}{y_0\,\left[1 - (2/23)^{t/4}\right] + (2/23)^{t/4}}$$

Για να εκτιμήσουμε τον χρόνο στον οποίο το 90% των κατοίκων έχουν ακούσει την φήμη, ας υποθέσουμε ότι T είναι ο χρόνος που έχει παρέλθει από τις 8 η ώρα το πρωί. Τότε

$$y(T) = \frac{y_0}{y_0\,\left[1 - (2/23)^{T/4}\right] + (2/23)^{T/4}} = \frac{9}{10}$$

δηλαδή

$$10\,y_0 = 9\,y_0 - 9\,y_0\,(2/23)^{T/4} + 9\,(2/23)^{T/4} = 9\,y_0 + 9\,(1 - y_0)\,(2/23)^{T/4}$$

λύνοντας την τελευταία ως προς $(2/23)^{\mathrm{T}/4}$ έχουμε

$$\left(\frac{2}{23}\right)^{T/4} = \frac{y_0}{9\,(1 - y_0)}$$

και λύνοντας την τελευταία ως προς T παίρνουμε

$$T = \frac{4}{\ln(2/23)} \ln\left[\frac{y_0}{9\,(1-y_0)}\right] = \frac{4}{\ln(2/23)} \ln\left[\frac{2}{207}\right] \approx 7.59855 \text{ ώρες}$$

Άρα, $T \approx 7 + \frac{6}{10} = 7 + \frac{36}{60}$ ώρες, δηλαδή 7 ώρες και 36 λεπτά μετά τις 8 η ώρα το πρωί (ή στις $3:36$ μ.μ.) το 90% των κατοίκων θα έχει ακούσει την φήμη.