1 Οι πραγματικοί αριθμοί

1.1 Σύνολα αριθμών

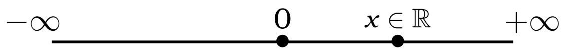
Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Οι ακέραιοι διαμερίζονται σε άρτιους και περιττούς ανάλογα αν ένας ακέραιος διαιρείται με το δύο ή όχι αντίστοιχα. Το μηδέν είναι άρτιος.

Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q} = \{x \ : \ x = \dfrac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0\}$

Το σύνολο των θετικών ρητών $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \ : \ x > 0\}$

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και παριστάνεται με την πραγματική ευθεία



Το σύνολο των θετικών πραγματικών $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0\}$

Το σύνολο των αρνητικών πραγματικών $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}$

Έστω A, B δυο υποσύνολα του $\mathbb{R}$, δηλαδή $A, B \subset \mathbb{R}$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ ορίζεται ως το σύνολο των ζευγαριών (a, b) όπου το a διατρέχει το A και το b διατρέχει το B, δηλαδή $A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \, , \ b \in B\}$.

1.2 Διαστήματα

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Διάφορα κλειστά, ανοικτά, ανοικτά-κλειστά, κλειστά-ανοικτά διαστήματα στον $\mathbb{R}$ είναι

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}, \ \alpha \leq x \leq \beta\}, \qquad [\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}, \ \alpha \leq x < \beta\}$$

$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}, \ \alpha < x \leq \beta\}, \qquad (\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}, \ \alpha < x < \beta\}$$

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq \alpha\}, \qquad (\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}, \ x > \alpha\}$$

$$(-\infty, \beta) = \{x \in \mathbb{R}, \ x < b\}, \qquad (-\infty, \beta] = \{x \in \mathbb{R}, \ x \leq \beta\} \qquad (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Όταν το άκρο ενός διαστήματος στον $\mathbb{R}$ είναι $\pm\infty$ τότε το διάστημα είναι πάντα ανοικτό στο άκρο αυτό και σημειώνεται με παρένθεση. Τα $\pm\infty$ δεν θεωρούνται αριθμοί.

Θεώρημα 1.1. *Το $\mathbb{Q}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία του $\mathbb{R}$ που δεν είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}$.*

Απόδειξη: Έστω $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ τέτοιος που $y^2 = 2$. Θα δείξουμε ότι ο y δεν ανήκει στους ρητούς, $y \notin \mathbb{Q}$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $y \in \mathbb{Q}$, με $y = m/n$ όπου m, n θετικοί ακέραιοι και μ.κ.δ.(m, n)=1, δηλαδή το κλάσμα m/n είναι ανάγωγο. Ειδικότερα οι m, n δεν είναι και οι δυο άρτιοι. Έχουμε ότι $m^2 = 2\,n^2$, άρα ο m είναι άρτιος, (το τετράγωνο περιττού είναι περιττός). Έστω $m = 2k$, k θετικός ακέραιος. Τότε $n^2 = 2k^2$ και συνεπώς και ο n είναι άρτιος. Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι μ.κ.δ.(m, n)=1 κι έτσι οι m, n δεν μπορούν να είναι και οι δυο άρτιοι. Άρα η υπόθεση με την οποία ξεκινήσαμε $y \in \mathbb{Q}$ είναι λάθος, άρα $y \notin \mathbb{Q}$. □

1.3 Αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ και το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι διατεταγμένα σώματα.

1.3.1 Διατεταγμένα σώματα

Ορισμός 1.2. Ένα μή κενό σύνολο Σ λέγεται διατεταγμένο σώμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Αξιώματα της πρόσθεσης

Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x + y$ και λέγεται το άθροισμα των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x + y$ λέγεται πρόσθεση κι ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

• Προσεταιριστική $\forall x, y, z \in \Sigma$ ισχύει ότι $(x + y) + z = x + (y + z)$

• Αντιμεταθετική $\forall x, y \in \Sigma$ ισχύει ότι $x + y = y + x$

• Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με 0 τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \Sigma\,, \quad x + 0 = 0 + x = x$$

• Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου. Για κάθε στοιχείο x του Σ υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται με $-x$ τέτοιο ώστε

$$x + (-x) = (-x) + x = 0\,.$$

Η αφαίρεση στο Σ ορίζεται από την σχέση

$$x - y = x + (-y) \qquad \forall x, y \in \Sigma\,.$$

β) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού

Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x\,y$ και λέγεται το γινόμενο των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x\,y$ λέγεται πολλαπλασιασμός κι ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

• Προσεταιριστική $\forall x, y, z \in \Sigma$ ισχύει ότι $(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$

• Αντιμεταθετική $\forall x, y \in \Sigma$ ισχύει ότι $x\,y = y\,x$

• Ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με 1 τέτοιο ώστε

$$\forall x \in \Sigma\,, \quad x\,1 = 1\,x = x$$

• Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου. Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο x του Σ, υπάρχει μοναδικό στοιχείο του Σ, που συμβολίζεται με x^{-1} τέτοιο ώστε

$$x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1\,, \qquad x \neq 0\,.$$

Η διαίρεση στο Σ ορίζεται από την σχέση

$$\frac{x}{y} = x\,y^{-1} \qquad \forall x, y \in \Sigma\,, \quad y \neq 0\,.$$

γ) Επιμεριστική ιδιότητα

Η επιμεριστική ιδιότητα συνδέει τον πολλαπλασιασμό με πρόσθεση:

$$\forall x, y, z \in \Sigma \qquad \text{ισχύει} \qquad x\,(y + z) = x\,y + x\,z\,.$$

δ) Ιδιότητες της διάταξης

Υπάρχει ένα υποσύνολο Θ του Σ, που λέγεται το σύνολο των θετικών στοιχείων του Σ, το οποίο ορίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες

• Για κάθε στοιχείο x του Σ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$x \in \Theta\,, \qquad -x \in \Theta\,, \qquad x = 0\,.$$

• Αν $x, y \in \Theta$ τότε $x + y \in \Theta$ και $x\,y \in \Theta$.

Το σύνολο Θ ορίζει μια διάταξη στο σώμα Σ ως εξής: Λέμε ότι $x > y$ αν και μόνο αν $x - y \in \Theta$. Γράφοντας $x \geq 0$ εννοούμε ότι $x > y$ ή $x = y$. Από τον ορισμό του Θ προκύπτει ότι

$$x \in \Theta \quad \Leftrightarrow \quad x > 0\,.$$

Από τις ιδιότητες του Θ έπονται οι παρακάτω ιδιότητες της διάταξης $>$:

• (νόμος της τριχοτομίας) Για κάθε ζευγάρι στοιχείων x, y του Σ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα

$$x > y\,, \qquad x < y\,, \qquad x = y\,.$$

• (μεταβατική ιδιότητα) Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$.

• (νόμος διαγραφής για την πρόσθεση) Αν $x > y$ τότε για κάθε z ισχύει ότι $x + z > y + z$

• (νόμος διαγραφής για τον πολ/σμό) Αν $x > y$ και $z > 0$, τότε $xz > yz$.

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι το τυπικό παράδειγμα ενός διατεταγμένου σώματος. Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμοί με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι διατεταγμένο σώμα.

Μια ιδιότητα που διαφοροποιεί το $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$ είναι το αξίωμα της πληρότητας που εξετάζουμε παρακάτω.

1.3.2 Το αξίωμα της πληρότητας

Από την στιγμή που σ' ένα διατεταγμένο σώμα Σ έχουμε ορίσει μια διάταξη $>$ μπορούμε να μιλάμε για υποσύνολα του Σ που είναι άνω ή κάτω φραγμένα.

Ορισμός 1.3. Έστω ένα διατεταγμένο σώμα Σ. Ένα υποσύνολο A του Σ λέγεται

• άνω φραγμένο, αν υπάρχει $a \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $x \leq a$, για κάθε $x \in A$,

• κάτω φραγμένο, αν υπάρχει $b \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $b \leq x$, για κάθε $x \in A$,

• φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Κάθε στοιχείο του Σ που ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό λέγεται άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα του A.

Ορισμός 1.4. α) Έστω A ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το στοιχείο $a \in \Sigma$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A αν

• το a είναι άνω φράγμα του A και

• αν a_1 είναι ένα άνω φράγμα του A τότε $a \leq a_1$.

β) Έστω A ένα κάτω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το στοιχείο $a \in \Sigma$ είναι μέγιστο κάτω φράγμα του A αν

• το a είναι κάτω φράγμα του A και

• αν a_1 είναι ένα κάτω φράγμα του A τότε $a \geq a_1$.

Στην περίπτωση που υπάρχουν, θα συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του A με $\sup A$ (supremum του A), και το μέγιστο κάτω φράγμα του A με $\inf A$ (infimum του A).

Προσοχή !!! Τα $\sup A$, $\inf A$ μπορεί να είναι στοιχεία του A, αλλά μπορεί και να μην είναι. Στην περίπτωση που $\sup A \in A$, $\inf A \in A$, τότε τα $\sup A$ και $\inf A$ είναι το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο του A, αντίστοιχα, δηλαδή $\sup A = \max A$ και $\inf A = \min A$.

Παράδειγμα α) Έστω $A = [0, 1)$. Τότε $\sup A = 1 \notin A$, $\inf A = 0 \in A$.
β) Έστω $A = (1, 3]$. Τότε $\inf A = 1 \notin A$, $\sup A = 3 \in A$.

Το αξίωμα της πληρότητας: Λέμε ότι ένα διατεταγμένο σώμα Σ ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας αν κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του Σ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $a \in \Sigma$.

Ένα διατεταγμένο σώμα Σ που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας λέγεται *πλήρως διατεταγμένο σώμα.*

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών **δεν** είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα, δηλαδή υπάρχει μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα (στο $\mathbb{Q}$). Πράγματι, ας θεωρήσουμε το υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ με

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$$

Το A είναι μη κενό αφού $1 \in A$ και το A είναι άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το 2, αφού $2 > 0$ και $2^2 = 4 > 2 > x^2$, οπότε $x < 2$ για κάθε $x \in A$. Παραλείποντας μια αυστηρή απόδειξη, αν υπήρχε το "ελάχιστο άνω φράγμα" του A αυτό θα ήταν το $\sqrt{2}$, το οποίο όμως γνωρίζουμε από το Θεώρημα 1.1 ότι "λείπει" από το $\mathbb{Q}$.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ισχύει το αξίωμα της πληρότητας.

Αξίωμα της πληρότητας για τους πραγματικούς αριθμούς: Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $a \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.

1.4 Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών

Έστω ε και a πραγματικοί αριθμοί, $\varepsilon, a \in \mathbb{R}$ με $\varepsilon > 0$. Υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\,\varepsilon > a$.

Απόδειξη: Θα πάμε με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n\,\varepsilon > a$. Δηλαδή για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $n\,\varepsilon \leq a$. Τότε το υποσύνολο $A = \{n\,\varepsilon \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ των πραγματικών είναι άνω φραγμένο με ένα άνω φράγμα το a. Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του A, ας το πούμε $\beta = \sup A \in \mathbb{R}$. Προφανώς $\beta - \varepsilon < \beta$, άρα το $\beta - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως μπορούμε να βρούμε φυσικό $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0\varepsilon > \beta - \varepsilon$. Έστω τώρα $n_1 = n_0 + 1$ ο επόμενος φυσικός από τον n_0. Τότε η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$n_0\,\varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (n_1 - 1)\,\varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n_1\,\varepsilon - \varepsilon > \beta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n_1\,\varepsilon > \beta$$

Άτοπο, γιατί το β είναι άνω φράγμα του A (και μάλιστα το ελάχιστο). □

Ουσιαστικά, η Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών μας λέει ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. (Σκεφτείτε την Αρχιμήδεια ιδιότητα για $\varepsilon = 1$).

1.5 Ακέραιο μέρος, άρρητοι αριθμοί και πυκνότητα ρητών και αρρήτων στους πραγματικούς

Πρόταση 1.5. *Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $m \leq x < m + 1$. Ο ακέραιος m λέγεται το* **ακέραιο μέρος** *του x και συμβολίζεται με $[x]$.*

Για παράδειγμα $[2.7] = 2$, $[-2.7] = -3$, $[\pi] = 3$.

Πρόταση 1.6. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, υπάρχει ρητός p με την ιδιότητα $x < p < y$.*

Η προηγούμενη πρόταση μας πληροφορεί για την πυκνότητα των ρητών αριθμών στους πραγματικούς και ουσιαστικά είναι απόρροια της Αρχιμήδειας ιδιότητας των πραγματικών και της ύπαρξης του ακεραίου μέρους.

Ορισμός 1.7. Είδαμε ότι υπάρχουν πραγματικοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί αριθμοί, π.χ. ο $\sqrt{2}$. Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός λέγεται **άρρητος**.

Πρόταση 1.8. *Οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$: για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, με $x < y$, υπάρχει άρρητος a τέτοιος ώστε $x < a < y$.*

1.6 Απόλυτη τιμή

Ορισμός 1.9. (Απόλυτη τιμή) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$|a| = \begin{cases} a & \text{αν} \quad a \geq 0\,, \\ \\ -a & \text{αν} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Το $|a|$ λέγεται **απόλυτη τιμή** του a. Αν τοποθετήσουμε τον a σε ένα σημείο της πραγματικής ευθείας σκεφτόμαστε το $|a|$ ως την απόσταση του a από το 0. Από τον ορισμό προκύπτει ότι $|-a| = |a|$ και ότι $|a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$

Διακρίνοντας περιπτώσεις για το a εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$|a| \leq \varepsilon \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$$

Επιπλέον ισχύει ότι

$$|a| \geq \varepsilon \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad a \leq -\varepsilon \quad \text{ή} \quad a \geq \varepsilon$$

Με τον ίδιο τρόπο (διακρίνοντας περιπτώσεις) εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τον b με τον $-b$ παίρνουμε ότι ισχύει και

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

1.7 Ασκήσεις – 12/09/2012

Άσκηση 1 Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, min των παρακάτω συνόλων

$$\begin{aligned}
&(1)\quad A = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 2\} \\
&(2)\quad B = \{x \in \mathbb{R} : x = -n^2\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\} \\
&(3)\quad C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 + \frac{1}{n}\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots\}
\end{aligned}$$

Άσκηση 2 Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα sup, inf, max, min των παρακάτω συνόλων

$$\begin{aligned}
&(1)\quad A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\ : 0 < x^2 - 1 \leq 2\} \\
&(2)\quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, 0 < x^2 - 1 \leq 2\} \\
&(3)\quad C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\} \\
&(4)\quad D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 < 0\} \\
&(5)\quad E = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\} \\
&(6)\quad F = \{x \in \mathbb{Q} : (x - 1)(x + \sqrt{2}) < 0\}
\end{aligned}$$

Άσκηση 3 Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το A είναι μονοσύνολο αν και μόνο αν $\sup A = \inf A$.
(Ένα σύνολο A λέγεται μονοσύνολο αν περιέχει ένα και μόνο ένα στοιχείο, $A = \{a\}$)

Άσκηση 4 Δείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&(i)\quad \text{Αν}\quad x < y + \varepsilon \quad \text{για κάθε}\quad \varepsilon > 0\,, \quad \text{τότε}\quad x \leq y\,. \\
&(ii)\quad \text{Αν}\quad x \leq y + \varepsilon \quad \text{για κάθε}\quad \varepsilon > 0\,, \quad \text{τότε}\quad x \leq y\,. \\
&(iii)\quad \text{Αν}\quad |x - y| \leq \varepsilon \quad \text{για κάθε}\quad \varepsilon > 0\,, \quad \text{τότε}\quad x = y\,.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5 Να βρεθούν οι τιμές του x που ικανοποιούν τις ισότητες

$$(i)\quad |5\,x + 4| = -1, \quad (ii)\quad |3\,x + 2| = 5, \quad (iii)\quad \left|\frac{x - 3}{x - 4}\right| = 5, \quad (iv)\quad |4\,x + 5| = |8\,x - 3|$$

Άσκηση 6 Να βρεθεί για ποιές τιμές του x ικανοποιούνται οι ανισότητες

$$(i)\quad \left|\frac{3 - 2\,x}{2 + x}\right| \leq 4, \quad (ii)\quad |3\,x + 5| \geq 4, \quad (iii)\quad \frac{1}{|x - 4|} - \frac{1}{|x + 7|} < 0\,.$$

2 Αντιστοιχίες - Συναρτήσεις

2.1 Αντιστοιχίες

Ορισμός 2.1. Έστω δυο μη κενά σύνολα A και B. Λέμε ότι έχουμε μια *αντιστοιχία ή διμελή σχέση* με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης το B αν και μόνο αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα τουλάχιστο στοιχείο x του A με ένα ή περισσότερα στοιχεία y του B.

Συμβολικά γράφουμε $f : A \to B$ και διαβάζουμε, η f είναι μια αντιστοιχία με σύνολο αφετηρίας το A και σύνολο άφιξης B. Για τα στοιχεία έχουμε

$$x \xrightarrow{f} y, \qquad \text{ή} \qquad A \ni x \xrightarrow{f} y \in B$$

και διαβάζουμε: το x ανήκει στο A μέσω της f αντιστοιχεί στο y ανήκει στο B.

Ορισμός 2.2. Ονομάζουμε τύπο μιας αντιστοιχίας $f : A \to B$ την συμβολική έκφραση $x \to y$ με την οποία καθορίζεται ο τρόπος που συνδέονται τα αντίστοιχα στοιχεία. Στην έκφραση $x \xrightarrow{f} y$ το x ονομάζεται αρχέτυπο και το y εικόνα του x μέσω της f.

Ορισμός 2.3. Ονομάζουμε *πεδίο ορισμού (domain of definition)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $D(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$D(f) = \{x \in A \quad : \quad \exists\, y \in B, \qquad \text{με} \qquad x \xrightarrow{f} y\}$$

Ορισμός 2.4. Ονομάζουμε *πεδίο τιμών (range)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $R(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$R(f) = \{y \in A \quad : \quad \exists\, x \in A, \qquad \text{με} \qquad x \xrightarrow{f} y\}$$

Ορισμός 2.5. Ονομάζουμε *γράφημα (graph)* της αντιστοιχίας $f : A \to B$ και συμβολίζουμε με $\Gamma(f)$ το σύνολο που ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times B \quad : \quad x \xrightarrow{f} y\}$$

Από τους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι

$$D(F) \subseteq A, \qquad R(f) \subseteq B, \qquad \Gamma(F) \subseteq D(f) \times R(f)$$

και από τον ορισμό της αντιστοιχίας

$$D(f) \neq \varnothing, \qquad R(f) \neq \varnothing, \qquad \Gamma(F) \neq \varnothing$$

Η συμβολική έκφραση $X \subseteq Y$ δηλώνει ότι το σύνολο X είναι γενικά υποσύνολο του συνόλου Y, με την έννοια ότι κάθε στοιχείο του συνόλου X περιέχεται στο σύνολο Y, όμως μπορεί και κάθε στοιχείο το Y να περιέχεται στο X ή αλλιώς τα δυο σύνολα X, Y να είναι ίσα. Όταν γνωρίζουμε ότι το σύνολο X είναι γνήσιο υποσύνολο Y, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο του συνόλου Y το οποίο δεν περιέχεται στο σύνολο X μπορούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\subset$. Για παράδειγμα

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ορισμός 2.6. Αν κάθε στοιχείο του A για την αντιστοιχία $f : A \to B$ είναι αρχέτυπο, δηλαδή $D(f) = A$, και κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα δηλαδή $R(f) = B$, τότε λέμε ότι έχουμε μια αντιστοιχία **του** A **επί του** B,

Ορισμός 2.7. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **του** A **στο** B αν και μόνο αν $D(f) = A$, και $R(f) \subset B$, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία του B που δεν είναι εικόνες μέσω της f στοιχείων του A.

Ορισμός 2.8. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **από το** A **στο** B αν και μόνο αν $D(f) \subset A$, και $R(f) \subset B$.

Ορισμός 2.9. Η αντιστοιχία $f : A \to B$ θα λέμε ότι είναι **από το** A **επί του** B αν και μόνο αν $D(f) \subset A$, και $R(f) = B$.

Ορισμός 2.10. Μια αντιστοιχία $f : A \to B$ λέγεται **μονοσήμαντη ή μονότιμη** αν και μόνο αν κάθε στοιχείο $x \in D(f)$ έχει μέσω της f ως εικόνα ένα και μόνο στοιχείο $y \in B$, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η f θα λέμε ότι είναι πλειότιμη.

Παράδειγμα 2.11. Έστω τα σύνολα

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Ορίζουμε την αντιστοιχία $f : A \to B$ ως εξής:

$$1 \xrightarrow{f} 2, \qquad 1 \xrightarrow{f} 6, \qquad 2 \xrightarrow{f} 4, \qquad 2 \xrightarrow{f} 6$$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D(f) = \{1, 2\}$, το πεδίο τιμών της f είναι το $R(f) = \{2, 4, 6\}$ και το γράφημα της f είναι το $\Gamma(f) = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (2, 6)\}$.
Επίσης $D(f) \times R(f) = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$. Παρατηρούμε ότι

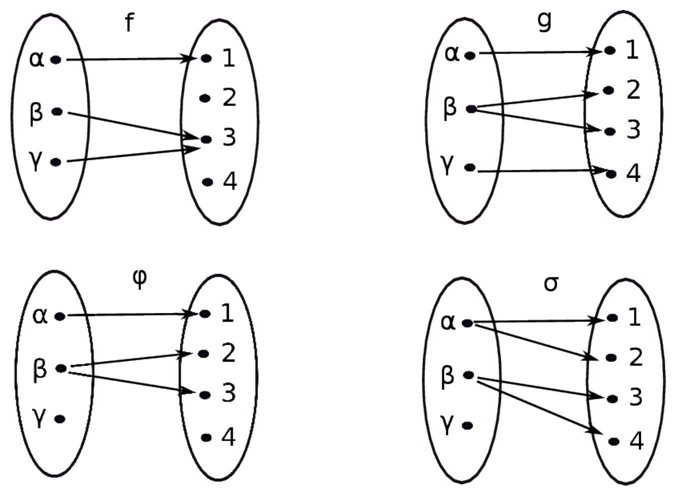
$$D(f) \subset A, \qquad R(f) \subset B, \qquad \Gamma(f) \subset D(f) \times R(f)$$

Η f είναι μια αντιστοιχία "από το A στο B" και επιπλέον η f είναι πλειότιμη (γιατί;).

Παράδειγμα 2.12. Έστω $A = \{\alpha, \beta . \gamma\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Ορίζουμε τις αντιστοιχίες

$$\begin{array}{lllll} f : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{f} 1, \quad \beta \xrightarrow{f} 3, \quad \gamma \xrightarrow{f} 3, \\ g : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{g} 1, \quad \beta \xrightarrow{g} 2, \quad \beta \xrightarrow{g} 3, \quad \gamma \xrightarrow{g} 4, \\ \varphi : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{\varphi} 1, \quad \beta \xrightarrow{\varphi} 2, \quad \beta \xrightarrow{\varphi} 3, \\ \sigma : A \to B, & \text{με} & \alpha \xrightarrow{\sigma} 1, \quad \beta \xrightarrow{\sigma} 2, \quad \beta \xrightarrow{\sigma} 3, \quad \beta \xrightarrow{\sigma} 4\,. \end{array}$$

Η f είναι αντιστοιχία "του A στο B", γιατί $D(f) = A$, $R(f) \subset B$.
Η g είναι αντιστοιχία "του A επί του B", γιατί $D(f) = A$, $R(f) = B$.
Η φ είναι αντιστοιχία "από το A στο B", γιατί $D(f) \subset A$, $R(f) \subset B$.
Η σ είναι αντιστοιχία "από το A στο B", γιατί $D(f) \subset A$, $R(f) \subset B$.
Από τις παραπάνω αντιστοιχίες μόνο η f είναι μονοσήμαντη.



Σχήμα 1: Οι αντιστοιχίες f, g, φ και σ του Παραδείγματος 2.12

Παράδειγμα 2.13. Δίνεται η αντιστοιχία $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $x \xrightarrow{f} y$ έτσι ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Να βρεθούν α) το πεδίο ορισμού και β) το πεδίο τιμών της f.

α) Στο πεδίο ορισμού της f ανήκουν εκείνα μόνο τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Δηλαδή

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad y^2 = 1 - x^2\}$$

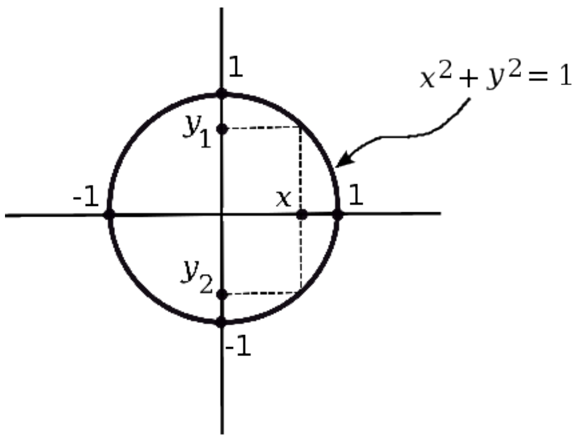
Αλλά για να υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $y^2 = 1 - x^2$ αρκεί και πρέπει $1 - x^2 \geq 0$. Συνεπώς

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

β) Με παρόμοιο τρόπο όπως προηγουμένως για το πεδίο τιμών της f έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 = 1\} = \\ &\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x^2 = 1 - y^2\} = \\ &\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad 1 - y^2 \geq 0\} = \\ &\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{με} \quad -1 \leq y \leq 1\} = \\ &[-1, 1] \end{aligned}$$

Η αντιστοιχία f συσχετίζει τα σημεία του επιπέδου $x - y$ τα οποία ανήκουν σε ένα κύκλο με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα μονάδα. Προφανώς η f δεν είναι μονοσήμαντη αφού οποιοδήποτε $x \in [-1, 1]$ μέσω της f συσχετίζεται με δυο τιμές: την $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ και την $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$.



Σχήμα 2: Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f του Παραδείγματος 2.13

2.2 Συναρτήσεις

Ορισμός 2.14. Έστω δυο μή-κενά σύνολα A και B. Κάθε **μονοσήμαντη** αντιστοιχία του A στο B (τουλάχιστο) ονομάζεται *απεικόνιση ή συνάρτηση* με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B. Πιο συγκεκριμένα, ονομάζουμε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B κάθε νόμο f μέσω του οποίου το κάθε $x \in A$ συσχετίζεται με *ένα και μόνο ένα* στοιχείο του B. Συμβολικά έχουμε

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \in B \qquad \text{ή} \qquad y = f(x)$$

Το x που εκφράζει το τυχαίο στοιχείο του συνόλου A λέγεται *ανεξάρτητη μεταβλητή* της f και το αντίστοιχο $y \in B$ λέγεται *εξαρτημένη μεταβλητή* ή *τιμή* της συνάρτησης f στο x.

Θα λέμε "δίνεται η συνάρτηση $f : A \to B$" και η λέξη συνάρτηση υπονοεί ότι η αντιστοιχία f είναι *μονοσήμαντη* του A στο $R(f) \subseteq B$. Επιπλέον, στον ορισμό της συνάρτησης έχουμε ότι $D(f) = A$, $R(f) \subseteq B$.

Μια συνάρτηση f είναι γνωστή αν γνωρίζουμε:
- το πεδίο ορισμού της $D(f)$,
- το πεδίο τιμών της $R(f)$, και
- τον τύπο της f μέσω του οποίου το κάθε $x \in D(f)$ αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα $y \in R(f)$.

Οι συναρτήσεις $f : A \to B$ που θα ασχοληθούμε είναι τέτοιες ώστε τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, γι' αυτό ονομάζονται πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

Ορισμός 2.15. Αν A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε κάθε συνάρτηση f μέσω της οποίας κάθε πραγματικός αριθμός $a \in A$ απεικονίζεται στον πραγματικό αριθμό y, ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πραγματική μεταβλητή.

Παράδειγμα 2.16. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x$ ή $y = 2x$.

Η συνάρτηση έχει ορισθεί πλήρως αφού $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}$ και γνωρίζουμε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 2.17. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + 2$.

Το πεδίο ορισμού της f είναι $D(f) = \mathbb{R}$, και το πεδίο τιμών $R(f) = [2, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.18. Είναι γνωστό ότι κάθε μή-αρνητικός πραγματικός έχει μια μόνο τετραγωνική ρίζα, ενώ οι αρνητικοί πραγματικοί δεν έχουν τετραγωνική ρίζα στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$. Αφού αναφερόμαστε σε συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής μπορούμε να καθορίσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\} = [0, +\infty]$$

Παράδειγμα 2.19. Δίνεται η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ \\ x^2 & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού είναι $D(f) = \mathbb{R}$, και το πεδίο τιμών $R(f) = \mathbb{R}^+$.

2.2.1 Η ισότητα στο σύνολο των συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = |x|$ και $g(x) = \sqrt{x^2}$. Παρατηρούμε ότι $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ και

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{έχουμε} \qquad f(x) = g(x)$$

Επειδή οι f, g έχουν αυτές τις ιδιότητες λέγονται ίσες.

Ορισμός 2.20. Δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες και θα σημειώνουμε $f = g$ αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους έχουν ίσες τιμές.

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad D(f) = D(g) \quad \text{και} \quad f(x) = f(x) \quad \forall x \in D(f) = D(g)$$

Από τον ορισμό συνάγεται ότι αναγκαστικά $R(f) = R(g)$.

Αν τουλάχιστον μια από τις δυο συνθήκες δεν ισχύει, δηλαδή $D(f) \neq D(g)$ ή αν υπάρχει $x \in D(f) = D(g)$ για το οποίο $f(x) \neq g(x)$ οι f, g λέγονται διάφορες.

Αν $A \subseteq D(f) \cap D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε μπορούμε να πούμε ότι $f = g$ είναι ίσες στο A.

Παράδειγμα 2.21. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x}$$

Προφανώς $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ και για το πεδίο ορισμού της g έχουμε

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^3 + x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x(x^2+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Επιπλέον, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ γιατί

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x} = \frac{x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} = f(x)$$

άρα $f = g$

Παράδειγμα 2.22. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$$

$D(f) = \mathbb{R}$, $\quad D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Επειδή $D(f) \neq D(g)$ οι f, g είναι διάφορες, $f \neq g$. Όμως στο $A = \mathbb{R} - \{1\}$ έχουμε

$$g(x) = \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x(x-1)}{x-1} = x = f(x).$$

Άρα $f = g$ στο A.

Παράδειγμα 2.23. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x>0 \\ \\ 2\,x+1 & \text{αν} \quad x\leq 0 \end{cases}, \qquad g(x)=\begin{cases} 3\,x & \text{αν} \quad x>0 \\ \\ 2\,x+1 & \text{αν} \quad x\leq 0 \end{cases}$$

έχουμε $D(f)=D(g)=\mathbb{R}$, αλλά υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ όπου $f(x)\neq g(x)$. Για παράδειγμα $f(2)=4$ και $g(2)=6$, $f(2)\neq g(2)$, άρα $f\neq g$.

Παρατηρούμε ότι $f=g$ στο διάστημα $(-\infty,0]$, γιατί $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$.

2.2.2 Η άλγεβρα των συναρτήσεων

Ορισμός 2.24. Ονομάζουμε άθροισμα των συναρτήσεων f, g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f+g$ και έχει τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ και $D(f+g)=D(f)\cap D(g)$.

Ορισμός 2.25. Ονομάζουμε γινόμενο των συναρτήσεων f, g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f\,g$ και έχει τύπο $(f\,g)(x)=f(x)\,g(x)$ και $D(f\,g)=D(f)\cap D(g)$.

Ορισμός 2.26. Ονομάζουμε γινόμενο πραγματικού αριθμού a επί την συνάρτηση f την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $a f$ και έχει τύπο $(a f)(x)=a f(x)$ και $D(a f)=D(f)$.
Αν $a=-1$ έχουμε την αντίθετη συνάρτηση της f δηλαδή την $-f(x)$.

Ορισμός 2.27. Ονομάζουμε διαφορά της συνάρτησης g από την συνάρτηση f την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $f-g$ και έχει τύπο $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ και $D(f-g)=D(f)\cap D(g)$.

Ορισμός 2.28. Ονομάζουμε πηλίκο της συνάρτησης f δια της συνάρτησης g την συνάρτηση που συμβολίζουμε με $\dfrac{f}{g}$ και έχει τύπο $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και $D\left(\dfrac{f}{g}\right)=D(f)\cap D(g)-\{x\in\mathbb{R}:g(x)=0\}$.

Παράδειγμα 2.29. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=2\,x$, και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$. Προφανώς $D(f)=\mathbb{R}$ και $D(g)=[-1,1]$. Το κοινό πεδίο ορισμού είναι $D(f)\cap D(g)=[-1,1]$.

$$\begin{array}{lll} a) & (f+g)(x)=2\,x+\sqrt{1-x^2} & D(f+g)=[-1,1] \\ b) & (f-g)(x)=2\,x-\sqrt{1-x^2} & D(f-g)=[-1,1] \\ c) & (f\,g)(x)=2\,x\sqrt{1-x^2} & D(f\,g)=[-1,1] \\ d) & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{2\,x}{\sqrt{1-x^2}} & D\left(\dfrac{f}{g}\right)=(-1,1) \end{array}$$

Παράδειγμα 2.30. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-1}$, και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ με πεδίο ορισμού $D(f)=[2,+\infty)$ και $D(g)=[-1,1]$ αντίστοιχα. Επειδή $D(f)\cap D(g)=\varnothing$ οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f\,g$, f/g δεν ορίζονται.

2.3 Ασκήσεις – 19/09/2012

Άσκηση 1. Αν η συνάρτηση f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

$$a)\ f(x)=\sqrt{2\,|x-2|+x-5} \qquad b)\ f(x)=\sqrt{|x+1|+|x-2|-5}$$
$$c)\ f(x)=\frac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{\sin x}$$

Λύση

a) Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που είναι κάτω από την ρίζα θα πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός. Επιπλέον παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας όρος που έχει απόλυτη τιμή και για αυτόν το όρο θα πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
D(f) &= \{x\in\mathbb{R} : 2\,|x-2|+x-5\geq 0\}\\
&= \left\{x\in\mathbb{R}\,,\quad \begin{matrix} x-2\geq 0\\ 2\,(x-2)+x-5\geq 0\end{matrix}\ \text{ή}\ \begin{matrix} x-2<0\\ -2\,(x-2)+x-5\geq 0\end{matrix}\right\}\\
&= \left\{x\in\mathbb{R}\,,\quad \begin{matrix} x\geq 2\\ 3\,x-9\geq 0\end{matrix}\ \text{ή}\ \begin{matrix} x<2\\ -x-1\geq 0\end{matrix}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}\,,\quad \begin{matrix} x\geq 2\\ x\geq 3\end{matrix}\ \text{ή}\ \begin{matrix} x<2\\ x\leq -1\end{matrix}\right\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}\,, x\geq 3\quad \text{ή}\quad x\leq -1\} = (-\infty,-1]\cup[3,+\infty).
\end{aligned}$$

b) Έχουμε παρόμοιες διαπιστώσεις όπως προηγουμένως αλλά όμως τώρα έχουμε δυο όρους με απόλυτα και έτσι θα πρέπει να διακρίνουμε 4 περιπτώσεις ανάλογα αν οι όροι μέσα στα απόλυτα είναι θετικοί ή μη θετικοί πραγματικοί:

1) $x-2\geq 0$ και $x+1\geq 0$ που συναληθεύουν $x\geq 2$.
2) $x-2<0$ και $x+1>0$ που συναληθεύουν για $-1<x<2$,
3) $x+1\leq 0$ και $x-2<0$ που συναληθεύουν όταν $x\leq -1$ και
4) $x-2>0$ και $x+1<0$ η οποία δεν ικανοποιείται για κανένα x, οπότε έχουμε μόνο τις 3 προηγούμενες περιπτώσεις.

1) Αν $x\geq 2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0 \Rightarrow x+1+x-2-5\geq 0\Rightarrow 2\,x\geq 6\Rightarrow x\geq 3$$

που συναληθεύουν για $x\geq 3$.
2) Αν $-1<x<2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0\Rightarrow x+1-(x-2)-5\geq 0\Rightarrow 0>2$$

αδύνατον άρα δεν υπάρχουν x που να είναι στο πεδίο ορισμού στο διάστημα $(-1,2)$
3) Αν $x\leq -1$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0\Rightarrow -(x+1)-(x-2)-5\geq 0\Rightarrow 2\,x\leq 4\Rightarrow x\leq -2$$

που συναληθεύουν για $x \leq -2$.

Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 3 \quad \text{ή} \quad x \leq -2\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$$

c) Η συνάρτηση

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ορίζεται σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός από αυτά που μηδενίζεται η συνάρτηση $\cos x$, δηλαδή για $x \neq k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε για το πεδίο ορισμού της f θα πρέπει επιπλέον να μην μηδενίζεται και ο παρανομαστής $1 - \tan^2 x$. Ο παρανομαστής μηδενίζεται όταν $\tan x = \pm 1$ ή ισοδύναμα όταν $\cos x = \pm \sin x$. Το τελευταίο συμβαίνει όταν η γωνία x είναι ± 45 μοίρες ή $x = \pm\pi/4$ και προσαυξημένη κατά ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή όταν $x = k\pi \pm \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Άρα συνολικά έχουμε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq k\pi + \pi/2 \quad \text{και} \quad x \neq k\pi \pm \pi/4 \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Θα πρέπει και οι δυο ποσότητες που είναι κάτω από την ρίζα να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad 1 - x^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad \sin x \geq 0\}$$

Η $\sin x$ είναι θετικός αριθμός όταν η γωνία x είναι ανάμεσα σε 0 και π καθώς και προσαυξημένη με πλήρεις περιστροφές κατά γωνία 2π, δηλαδή $2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Όμως τα διαστήματα $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ για $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο με το διάστημα $[-1, 1]$. Από την άλλη, για $k = 0$ το διάστημα $[0, \pi]$ έχει τομή (κοινά σημεία) με το $[-1, 1]$ το διάστημα $[0, 1]$.Άρα

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$$

Λύση

Έχουμε μια ρητή συνάρτηση όπου ο παρανομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών της f έχουμε:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x + 1}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad y x^2 + y x + y = x^2 + 4\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad (y - 1) x^2 + y x + (y - 4) = 0 \ (*)\} \end{aligned}$$

Αν $y = 1$ το τριώνυμο $(*)$ γίνεται $x = 3$, άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η f να έχει τιμή 1, συνεπώς $1 \in R(f)$.
Για $y \neq 1$, το τριώνυμο $(*)$ ως προς x έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$. ή ισοδύναμα

$$y^2 - 4(y-1)(y-4) \geq 0 \Rightarrow 3\,y^2 - 20\,y + 16 \leq 0 \Rightarrow \frac{10-2\sqrt{13}}{3} \leq y \leq \frac{10+2\sqrt{13}}{3}$$

Επειδή $1 \in [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$ έχουμε τελικά ότι

$$R(f) = [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$$

Άσκηση 3. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο τιμών της $f(x)$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$$

είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4}, 1]$.

Λύση

Έχουμε πρώτα απ'όλα ότι $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad y = \frac{x+\lambda}{x^2+1}\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad y\,x^2 - x + (y-\lambda) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad 1 - 4\,y\,(y-\lambda) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} \leq y \leq \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\} \\ &= \left[\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\right] \end{aligned}$$

Για να είναι $R(f) = [-1/4, 1]$, αρκεί και πρέπει να υπάρχει λ τέτοιο που

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = \sqrt{\lambda^2+1} \\ \\ 2 - \lambda = \sqrt{\lambda^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = 2 - \lambda \\ \\ (2-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \\ \\ -\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{3}{4} \\ \\ \frac{25}{16} = \frac{25}{16} \\ \\ -\frac{1}{2} \leq \lambda = \frac{3}{4} \leq 2 \end{array}\right\}$$

Άρα για $\lambda = \frac{3}{4}$ η f έχει $R(f) = [-\frac{1}{4}, 1]$
Προσοχή!!! Είναι λάθος να απαιτήσουμε $-\frac{1}{4} \leq \frac{x+\lambda}{x^2+1} \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γιατί ναι μεν οι τιμές της f θα είναι στο $[-\frac{1}{4}, 1]$ όμως από μόνο της η απαίτηση αυτή δεν είναι αρκετή να μας εξασφαλίσει ότι το πεδίο τιμών της f είναι όλο το διάστημα $[-\frac{1}{4}, 1]$.

Άσκηση 4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

Να δειχθεί ότι $f \neq g$.

Λύση

Για να ισχύει $f = g$ θα πρέπει $D(f) = D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D(f) = D(g)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad \frac{x}{x-1} \geq 0 \quad \text{και} \quad x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x(x-1) \geq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \quad (x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 1) \quad \text{και} \quad x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x > 1\} \\ &= (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε $D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 1\} = (1, +\infty)$. Αφού $D(f) \neq D(g)$, τότε $f \neq g$.

Παρατήρηση για επιπλέον ανάλυση: Παρατηρούμε ότι υπάρχει κοινό πεδίο ορισμού των f, g, το διάστημα $A = D(f) \cap D(g) = (1, +\infty)$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x > 0$ και $x > 1$, οπότε

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = g(x) \qquad \forall x \in A$$

Οπότε αν περιορίσουμε τις τιμές του x στο διάστημα A έχουμε ότι $f = g$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άσκηση 5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού για κάθε μια από τις συναρτήσεις f, g, f/g, g/f και $f + g$.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τα πεδία ορισμού των f, g καθώς και το κοινό πεδίο ορισμού τους. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 4 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2] \\ D(g) &= \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 0\} = [0, +\infty). \end{aligned}$$

$$A = D(f) \cap D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \text{και} \quad x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 2\} = [0, 2]$$

$$\begin{aligned} D(f+g) &= A = [-2, 2] \\ D(f/g) &= A - \{x \in \mathbb{R} : \quad g(x) = 0\} = A - \{x \in \mathbb{R} : \quad x = 0\} = [0, 2] - \{0\} = (0, 2]. \\ D(g/f) &= A - \{x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = 0\} = A - \{x \in \mathbb{R} : \quad x^2 = 4\} = [0, 2] - \{-2, 2\} = [0, 2). \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{2\,a^2\,x + a}{x + 1 - a}, \qquad g(x) = \frac{(3\,a - 1)\,x + a}{x + a}.$$

Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός a έτσι ώστε οι συναρτήσεις f, g να είναι ίσες.

Λύση

Αρχικά θα πρέπει $D(f) = D(g)$. Έχουμε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq a - 1\} \qquad \text{και} \qquad D(g) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq -a\}$$

Για να είναι $D(f) = D(g)$ πρέπει και αρκεί $a - 1 = -a \Leftrightarrow a = 1/2$. Για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε

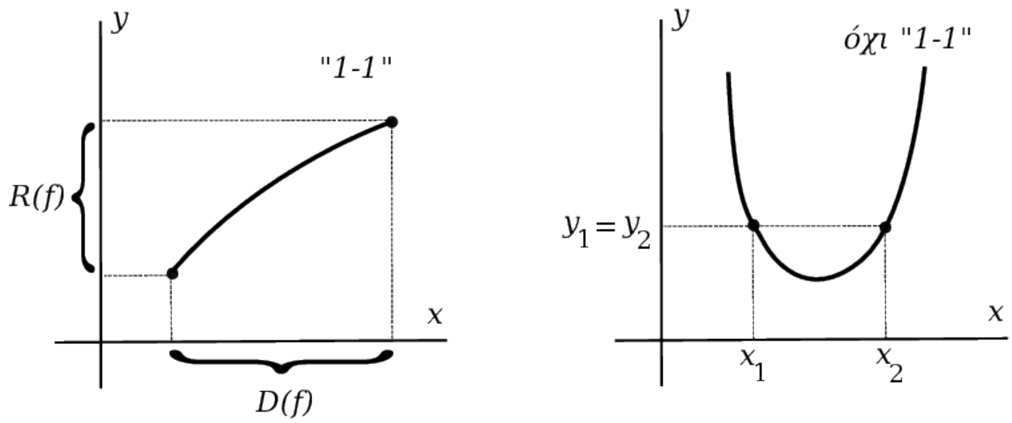
$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2\,x+1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{(\frac{3}{2} - 1)\,x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2\,x+1}$$

άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

Έτσι για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε $D(f) = D(g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, συνεπώς για $a = \frac{1}{2}$ οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

2.4 Η αντίστροφη μιας συνάρτησης

Ορισμός 2.31. Μια συνάρτηση f λέγεται αμφιμονοσήμαντη ή πιο απλά "$1-1$" αν για κάθε $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ή ισοδύναμα αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.



Σχήμα 3: Παράδειγμα δυο συναρτήσεων από τις οποίες η συνάρτηση στα αριστερά είναι "$1-1$" ενώ η συνάρτηση στα δεξιά δεν είναι "$1-1$".

Ορισμός 2.32. Ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση μιας "$1-1$" συνάρτησης f, την συνάρτηση που συμβολίζουμε με f^{-1} και η οποία αντιστοιχεί το κάθε $y \in R(f)$ στο μοναδικό $x \in D(f)$ για το οποίο ισχύει $y = f(x)$.

Από τον ορισμό έχουμε ότι $D(f^{-1}) = R(f)$, $R(f^{-1}) = D(f)$, $(f^{-1})^{-1} = f$ και ότι η f^{-1} δεν ορίζεται αν η f δεν είναι "$1-1$". Συμβολικά γράφουμε

$$x \overset{f}{\to} y \quad , \quad y \overset{f^{-1}}{\to} x$$

Προσοχή!!! Δεν πρέπει να συγχέουμε την συνάρτηση f^{-1} με την συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$.

2.4.1 Εύρεση τύπου της αντίστροφης συνάρτησης

Αν η f είναι "$1-1$" τότε για κάθε $y \in R(f)$ θα υπάρχει ένα και μόνο ένα $x \in D(f)$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Το x αυτό προσδιορίζεται λύνοντας τον τύπο της f ως προς x, απαιτώντας το $x \in D(f)$.

Για παράδειγμα, για την $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ έχουμε:

α) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty)$.

β) Η f είναι "$1-1$" γιατί αν

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \sqrt{x_1 - 2} = 1 + \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x_1 - 2})^2 = (\sqrt{x_2 - 2})^2 \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

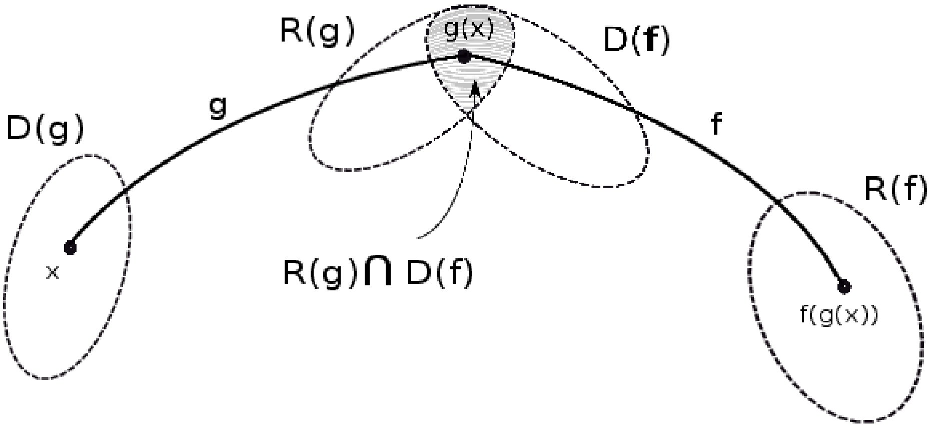
συνεπώς η f^{-1} υπάρχει.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1+\sqrt{x-2} \\ \\ x \geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = y-1 \\ \\ x-2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2 = (y-1)^2 \\ \\ y-1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y^2-2\,y+3 \\ \\ y \geq 1 \end{array}\right\}$$

Αντιστρέφοντας τον ρόλο της εξαρτημένης με την ανεξάρτητη μεταβλητή $x \leftrightarrow y$ παίρνουμε $y = x^2+2\,x+3$ με $x \geq 1$ ή αλλιώς $f^{-1}(x) = x^2-2\,x+3$, με $D(f^{-1}) = [1,+\infty)$.

2.5 Σύνθεση συναρτήσεων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο συναρτήσεις τις f, g. Αν το πεδίο τιμών της g έχει τομή με το πεδίο ορισμού της f δηλαδή $R(g) \cap D(f) \neq \varnothing$ τότε ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ που λέγεται η σύνθεση της g με την f, η οποία έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ και πεδίο ορισμού $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : \quad g(x) \in D(f)\}$ και τιμές στο $R(f)$.



Σχήμα 4: Η σύνθεση $f \circ g$ γενικά ορίζεται όταν $R(g) \cap D(f) \neq \varnothing$.

Στην ειδική περίπτωση που το πεδίο τιμών της g είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f, δηλαδή $R(g) \subset D(f)$, η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται και το πεδίο ορισμού της είναι το $D(g)$.

Όταν $R(g) \cap D(f) = \varnothing$ τότε η $f \circ g$ δεν ορίζεται γιατί δεν υπάρχει $x \in D(g)$ για το οποίο η τιμή $g(x)$ να ανήκει στο $D(f)$ κι έτσι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε την $f(g(x))$.

Οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ αν ορίζονται δεν πρέπει να συγχέονται μεταξύ τους γιατί είναι γενικά διαφορετικές (άνισες) συναρτήσεις.

Παράδειγμα 2.33. Έστω $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [0,+\infty)$, $D(g) = \mathbb{R}$, $R(g) = [-1,1]$. Επειδή $R(g) \cap D(f) = [-1,1] \neq \varnothing$ η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται και έχει τύπο $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$.

Από την άλλη, επειδή $R(f) \cap D(g) = [0,+\infty] \neq \varnothing$ ορίζεται και η συνάρτηση $g \circ f$ η οποία έχει τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$.

2.6 Μονοτονία συναρτήσεων

Ορισμός 2.34. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \rotatebox{90}{$\rightarrowtail$} \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ορισμός 2.35. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \rotatebox{-90}{$\rightarrowtail$} \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Ορισμός 2.36. Μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \uparrow \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

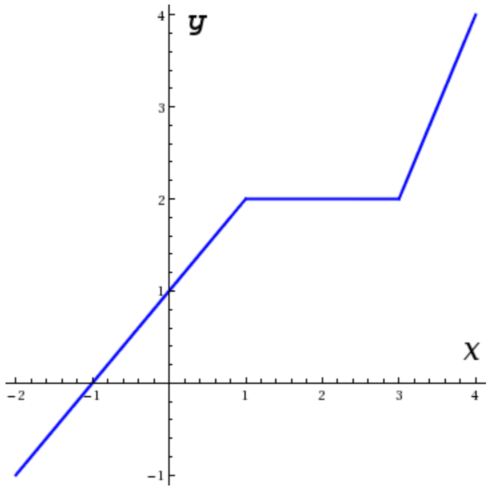
Ορισμός 2.37. Μια συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα στο $A \subseteq D(f)$ αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Συμβολικά

$$f \downarrow \quad \text{στο}\, A \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in A \quad \text{με} \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Παράδειγμα 2.38.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x > 1 \\ 2 & \text{αν} \quad \leq x \leq 3 \\ 2x-4 & \text{αν} \quad x > 3 \end{cases}$$

Από την γραφική παράσταση της $f(x)$ παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(3, +\infty)$, ενώ στο διάστημα $[1, 3]$ έχει σταθερή τιμή. Πράγματι



Σχήμα 5: Η γραφική παράσταση της $f(x)$.

α) Αν $x_1 < x_2 < 1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 1) - (x_2 + 1) = x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

β) Αν $x_1 < 1 \leq x_2 \leq 3 \Rightarrow x_1 < 2 \Rightarrow f(x_1) < 2$ και $f(x_2) = 2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
γ) Αν $1 < x_1 < 3 < x_2$ τότε $x_1 < 1 \Rightarrow x_1 + 1 < 2 \Rightarrow f(x_1) < 2$ και $x_2 > 3 \Rightarrow 2\,x_2 > 6 \Rightarrow 2\,x_2 - 4 > 2$, άρα $f(x_1) < 2 < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
δ) Αν $1 \leq x_1 \leq 3 < x_2$, τότε $f(x_1) = 2$ και $2\,x_2 > 6 \Rightarrow 2\,x - 4 > 2 \Rightarrow f(x_2) > 2$, άρα $f(x_1) < f(x_2)$.
ε) Αν $3 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) = (2\,x_1 - 4) - (2\,x_2 - 4) = 2(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
στ) Αν $1 \leq x_1 < x_2 \leq 3 \Rightarrow f(x_1) = 2 = f(x_2)$.

Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι αύξουσα ($\uparrow$) σε όλο το $\mathbb{R}$.

2.7 Ακρότατα συνάρτησης

Ορισμός 2.39. Ονομάζουμε περιοχή $\varpi(x_0)$ του πραγματικού αριθμού x_0 κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, για παράδειγμα $\varpi(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Ορισμός 2.40. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στο $x_0 \in D(f)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο αν και μόνο αν υπάρχει μια τουλάχιστον περιοχή $\varpi(x_0)$ του x_0 έτσι ώστε για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$.

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται η τοπικά μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

Ορισμός 2.41. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στο $x_0 \in D(f)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο αν και μόνο αν υπάρχει μια τουλάχιστον περιοχή $\varpi(x_0)$ του x_0 έτσι ώστε για κάθε $x \in \varpi(x_0) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$.

Η τιμή $f(x_0)$ λέγεται η τοπικά ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

Αν οι παραπάνω ορισμοί ισχύουν για κάθε $x \in D(f)$ κι όχι μόνο σε μια περιοχή του x_0 λέμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (ολικό ελάχιστο), αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.42. Για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ γνωρίζουμε ότι $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$ για κάθε $x \in D(f)\mathbb{R}$. Άρα η f παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή 1 και ολικά ελάχιστη τιμή -1. Τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ που συμβαίνει αυτό είναι

$$\sin x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2\,k\pi + \frac{\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2\,k\pi + \frac{3\,\pi}{2} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Παράδειγμα 2.43. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2\,x}{x^2 + 1}$, όπου $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών της f έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad y = \frac{2\,x}{x^2 + 1}\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad y\,x^2 - 2\,x + 4 = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad 4 - 4\,y^2 \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad -1 \leq y \leq 1\} = [-1,\ 1] \end{aligned}$$

Συνεπώς $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι τιμές αυτές επιτυγχάνονται όταν η διακρίνουσα του τριωνύμου $y\,x^2 - 2\,x + 4$ είναι μηδέν $\Delta = 0$. Τότε

$$x = \frac{-b}{4\,a} = \frac{2}{2\,y} = \frac{1}{y}$$

Άρα $y = 1$ με $x = 1$ και $y = -1$ με $x = -1$.

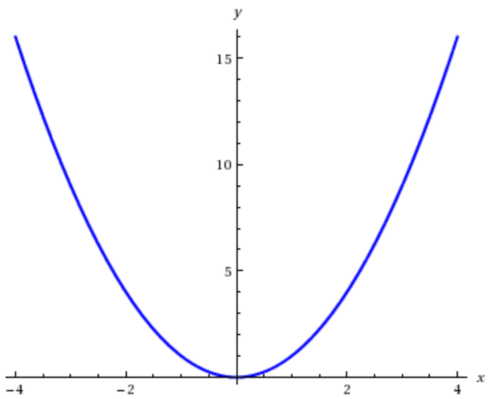
2.8 Φράγματα

Ορισμός 2.44. α) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη άνω άν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M έτσι ώστε $f(x) \leq M$, για κάθε $x \in D(F)$.
β) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη κάτω άν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός N έτσι ώστε $N \leq f(x)$, για κάθε $x \in D(F)$.
γ) Μια συνάρτηση f λέγεται φραγμένη άν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί M, N έτσι ώστε $N \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in D(F)$.
Το M λέγεται ένα άνω φράγμα της f και το N ένα κάτω φράγμα της f. Αν η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο (ελάχιστο) τότε η ολικά μέγιστη (ελάχιστη) τιμή της f είναι και ένα άνω (κάτω) φράγμα της f. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Μια συνάρτηση που είναι φραγμένη είναι και απόλυτα φραγμένη, δηλαδή $|f(x)| \leq K$, για κάθε $x \in D(f)$, και το αντίστροφο. Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί αυτό αφού αν $N \leq f(x) \leq M$, αν πάρουμε $K = \max\{|M|, |N|\}$, τότε $|f(x)| \leq K$. Το αντίστροφο είναι προφανές αφού $|f(x)| \leq K \Rightarrow -K \leq f(x) \leq K$.

2.9 Χρήσιμες κατηγορίες συναρτήσεων

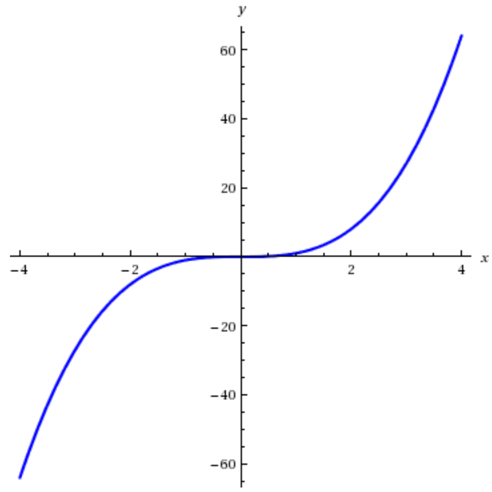
Ορισμός 2.45. Μια συνάρτηση f λέγεται άρτια αν και μόνο αν $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 6: Η γραφική παράσταση της άρτιας (γαιτί;) συνάρτησης $f(x) = x^2$.

Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y.

Ορισμός 2.46. Μια συνάρτηση f λέγεται περιττή αν και μόνο αν $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

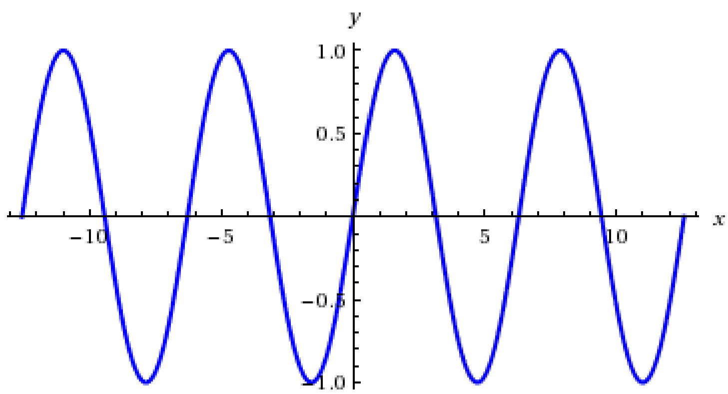


Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της περιττής (γιατί;) συνάρτησης $f(x) = x^3$.

Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή $(0, 0)$ των αξόνων.

Ορισμός 2.47. Μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική αν και μόνο υπάρχει πραγματικός αριθμός $\omega \neq 0$ και ανεξάρτητος από το x έτσι ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x + \omega \in D(f) \quad \Rightarrow f(x + \omega) = f(x).$$



Σχήμα 8: Η γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $f(x) = \sin x$ με μικρότερη περίοδο $\omega = 2\pi$.

Η γραφική παράσταση κάθε περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται κάθε περίοδο ω.

Ορισμός 2.48. Ονομάζουμε πολυωνυμική συνάρτηση την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ και τύπο

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

όπου $a_0, a_1, \cdots a_n$ πραγματικοί αριθμοί και n μη αρνητικός ακέραιος.

Ορισμός 2.49. Αν $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ πολυωνυμικές συναρτήσεις τότε η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(y)},$$

πεδίο ορισμού $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad B(x) \neq 0\}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$, λέγεται ρητή συνάρτηση.

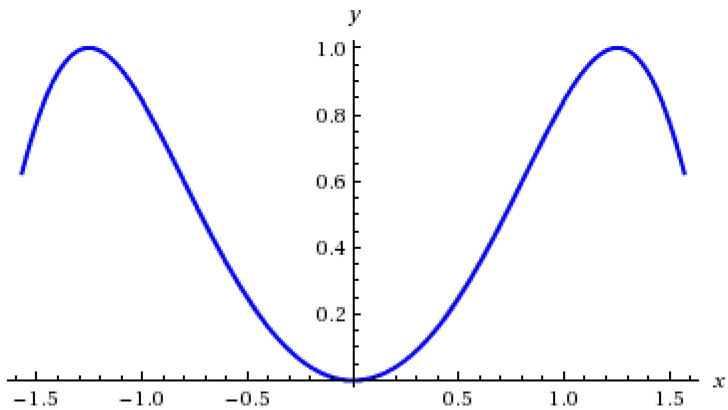
2.10 Βασικά Θεωρήματα

Πρόταση 2.50. *Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη τότε η f είναι "$1-1$" και συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} η οποία έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.*

Πρόταση 2.51. *Δίνονται οι γνήσια μονότονες συναρτήσεις f, g κι έστω ότι ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια αύξουσα, ενώ αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε η $f \circ g$ είναι γνήσια φθίνουσα.*

Παράδειγμα 2.52. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2)$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$. Έστω $h(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, οπότε $f = g \circ h$.

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		$\frac{\pi}{2}$
$h(x)$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
$R(h)$	$\frac{\pi^2}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi^2}{4}$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

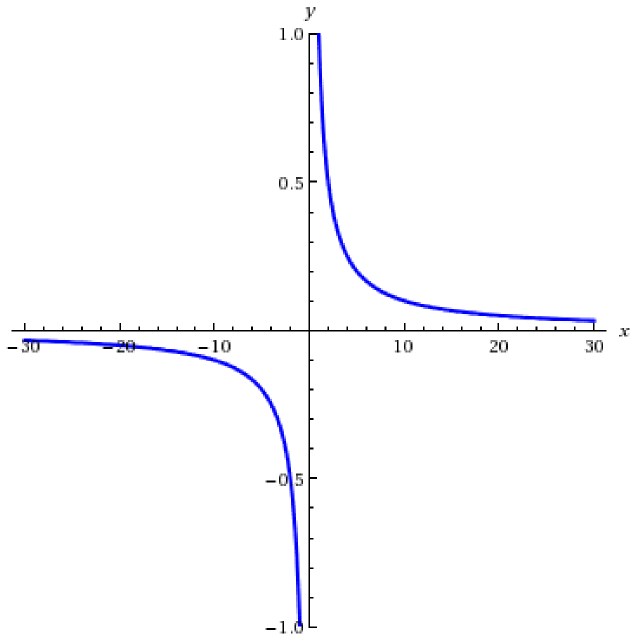


Σχήμα 9: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sin(x^2)$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$.

3 Όρια συναρτήσεων

3.1 Εισαγωγικές έννοιες.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ όπου $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$. Είναι



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1/x$.

φυσικό να αναζητήσουμε την τιμή της $f(x)$ όταν το x παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές τιμές ή αλλιώς όπως θα λέμε η ανεξάρτητη μεταβλητή x τείνει στο $+\infty$. Είναι προφανές ότι αν στο κλάσμα $1/x$ ο παρανομαστής γίνεται όσο μεγάλος θετικός αριθμός θέλουμε ($x \to +\infty$), το κλάσμα $1/x$ γίνεται αντίστοιχα όσο μικρός θετικός αριθμός θέλουμε ($y \to 0^+$), δηλαδή η τιμή της $f(x)$ τείνει να γίνει 0 από θετικές τιμές.

Επειδή η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση, το γράφημά της είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων κι έχουμε αντίστοιχες διαπιστώσεις όταν το x παίρνει πολύ μεγάλες αρνητικές τιμές ($x \to -\infty$). Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της $f(x)$ γίνεται πολύ κοντά στο 0 από αρνητικές τιμές.

Είναι τώρα φυσικό να αναζητήσουμε την τιμή της συνάρτησης όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 0 από αριστερά ($x < 0$) και δεξιά ($x > 0$), γνωρίζοντας βέβαια ότι $0 \notin D(f)$. Με παρόμοιες διαπιστώσεις όπως προηγουμένως και από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι όταν το $x \to 0+$ τότε $f(x) \to +\infty$, και αντίστοιχα όταν το $x \to 0-$, τότε $f(x) \to -\infty$.

Από την παραπάνω ανάλυση ανακύπτει το αρχικό ερώτημα για ποιά "σημεία" x μπορούμε να αναζητούμε την τιμή μιας συνάρτησης $f(x)$.

Ορισμός 3.1. Ένα σημείο x_0 ονομάζεται **οριακό σημείο του πεδίου ορισμού της** $f(x)$ αν και μόνο αν σε κάθε περιοχή του x_0 υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του $D(f)$ διαφορετικό από το x_0.

Για παράδειγμα, αφού η συνάρτηση $f(x) = 1/x$, στο διάστημα $(0, +\infty)$ ορίζεται, τότε το "σημείο" $+\infty$ είναι οριακό σημείο του $D(f)$.

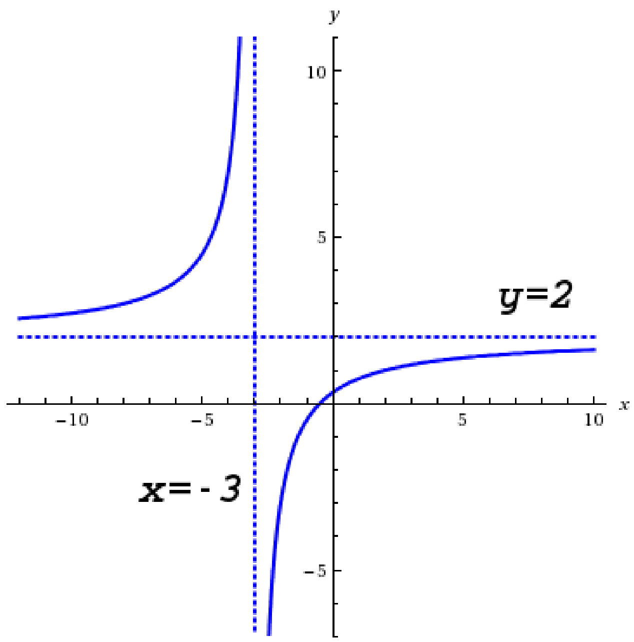
Ορισμός 3.2. Ένα σημείο x_0 λέγεται μεμονωμένο σημείο του $D(f)$ αν και μόνο αν $x_0 \in D(f)$ και υπάρχει περιοχή του x_0, έστω $\mathfrak{S}(x_0)$, τέτοια ώστε το μοναδικό κοινό σημείο της $\mathfrak{S}(x_0)$ με το πεδίο ορισμού $D(f)$ να είναι το x_0, δηλαδή $\mathfrak{S}(x_0) \cap D(f) = \varnothing$.

Το οριακό σημείο του $D(f)$ μπορεί να ανήκει στο $D(f)$, αλλά μπορεί να να μήν ανήκει στο $D(f)$. Για παράδειγμα το 0 είναι οριακό σημείο του $D(f)$ της συνάρτησης $f(x) = 1/x$, αλλά δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $D(f)$.

Όταν μιλάμε για οριακή τιμή συνάρτησης με $x \to x_0$, το x_0 πρέπει και αρκεί να είναι οριακό σημείο του $D(f)$, κι όχι απαραίτητα σημείο του $D(f)$.

3.2 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to +\infty$

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ όπου $D(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) = \mathbb{R} - \{-3\}$. Ορίζεται λοιπόν το διάστημα $(-3, +\infty)$ οπότε μπορούμε ν' αναζητήσουμε που



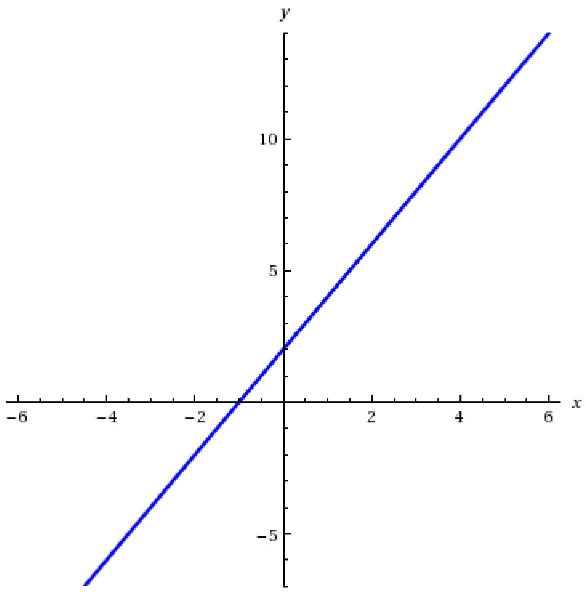
Σχήμα 11: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

τείνουν οι τιμές της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3} = \frac{x(2+1/x)}{x(1+3/x)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}} \xrightarrow{x \to +\infty} \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2$$

Ορισμός 3.3. Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός L τέτοιος που οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ να είναι αυθαίρετα κοντά στην τιμή L, καθώς το x παίρνει αυθαίρετα θετικά μεγάλες τιμές ($x \to +\infty$), θα λέμε ότι το όριο της $f(x)$ είναι ο αριθμός L, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$



Σχήμα 12: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3\,x + 2$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση $f(x) = 3\,x + 2$ όπου $D(f) = \mathbb{R}$. Άρα μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ καθώς το x απειρίζεται θετικά. Είναι προφανές ότι όταν το $x \to +\infty$, τότε η $f(x) \to +\infty$.

Ορισμός 3.4. Θα λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $+\infty$ ($-\infty$) καθώς το $x \to +\infty$ αν και μόνο αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα θετικά (αρνητικά) μεγάλες όταν το $x \to +\infty$, και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} = \pm\infty\,.$$

Παράδειγμα 3.5. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{3\,x^2 + x + 2}{x^2 - 1}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(1, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{3\,x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \frac{x^2(3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3 + 0 + 0}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Παράδειγμα 3.6. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(2, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x\,(1+\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{1}{x}\,\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,\frac{1+0}{1-0} = 0\cdot 1 = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Παράδειγμα 3.7. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \frac{2\,x^2+1}{x+1}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, άρα ορίζεται στο διάστημα $(-1, +\infty)$ και συνεπώς μπορούμε να μιλάμε για το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{2\,x^2+1}{x+1} = \frac{x^2\,(2+\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = x\,\frac{2+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,\frac{2+0}{1+0} = +\infty\cdot 2 = +\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Παράδειγμα 3.8. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ 2+x-x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ x^2-x-2 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$.

Άρα το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει γιατί υπάρχει μια περιοχή του $+\infty$ στη οποία η $f(x)$ δεν ορίζεται, π.χ. η $(2, +\infty)$.

Παράδειγμα 3.9. Θέλουμε να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{για την συνάρτηση} \qquad f(x) = \sin x$$

$D(f) = \mathbb{R}$, άρα μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Ας "πάμε" στο θετικό άπειρο με δυο διαφορετικούς τρόπους:

$$a)\quad x = 2\,n\,\pi \qquad b)\quad x' = 2\,n\,\pi + \pi/2\,, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών μπορούμε να συμπεράνουμε εύκολα ότι καθώς το n διατρέχει τους φυσικούς αριθμούς, οι πραγματικοί αριθμοί x και x' μας οδηγούν σε οποιονδήποτε μεγάλο θετικό πραγματικό θέλουμε, δηλαδή $x \to +\infty$ και $x' \to +\infty$. Όμως:

$$\sin x = \sin(2\,n\,\pi) = 0\,, \qquad \sin x' = \sin(2\,n\,\pi + \pi/2) = 1$$

Συνεπώς το $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ δεν υπάρχει, αφού αν υπήρχε θα έπρεπε $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x = \lim\limits_{x'\to+\infty} \sin x'$.

3.3 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to -\infty$

Ορισμός 3.10. Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός L στον οποίο η $f(x)$ παίρνει τιμές αυθαίρετα κοντά στον L, καθώς το $x \to -\infty$, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το L και γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Ορισμός 3.11. Αν η $f(x)$ παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές (αρνητικές) τιμές καθώς το $x \to -\infty$, λέμε ότι η $f(x)$ έχει όριο το $+\infty$ ($-\infty$ αντίστοιχα) και γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$$

Παρατήρηση 3.12. Για να μπορούμε να μιλάμε για το όριο της $f(x)$ όταν το $x \to -\infty$, αρκεί η f να ορίζεται σε διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$.

Παράδειγμα 3.13. Έστω $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, με πεδίο ορισμού $D(f) = \mathbb{R}$. Συνεπώς μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Έχουμε

$$f(x) = x^2\,(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} (+\infty)\,(1+0+0) = +\infty$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} = +\infty$.

Παράδειγμα 3.14. Έστω $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x+2}$, με πεδίο ορισμού $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Αφού η f ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, -2)$ μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Σε αυτό το διάστημα για πολύ μεγάλα αρνητικά x έχουμε ότι $x - 1 < 0$, άρα $|x-1| = -(x-1)$ και διάφορα από το -2, $x \neq -2$, οπότε

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x+2} = \frac{-(x-1)}{x+2} = \frac{x\,(-1+1/x)}{x\,(1+2/x)} = \frac{-1+1/x}{1+2/x} \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{-1+0}{1+0} = -1$$

Άρα $\lim_{x\to-\infty} = -1$.

3.4 Οριακή τιμή συνάρτησης όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ κι ας αναζητήσουμε που τείνουν οι τιμές της f καθώς το x πλησιάζει το σημείο 3, που είναι οριακό σημείο του $D(f)$. Έχουμε

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \overset{x\to3}{\longrightarrow} \frac{3}{2} \qquad \text{άρα} \qquad \lim_{x\to3} f(x) = \frac{3}{2}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 2 \end{cases}$$

κι ας αναζητήσουμε το όριο της f καθώς το $x \to 2$. Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της f στην περιοχή του $x = 2$ κι όχι τι γίνεται με την συνάρτηση ακριβώς για $x = 2$. Δηλαδή μας ενδιαφέρει τι τιμές παίρνει η f καθώς το $x \to 2$ σε ένα διάστημα της μορφής $(a, 2) \cup (2, b)$, με $a < 2 < b$. Σημειώνουμε ότι μπορεί η $f(x)$ να μην ορίζεται για $x = 2$ αλλά το $\lim_{x\to2} f(x)$ να υπάρχει! Οπότε η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι ότι $\lim_{x\to2} = 4$.

Ορισμός 3.15. Θα λέμε ότι το όριο της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο πραγματικός αριθμός L καθώς η αναξάρτητη μεταβλητή x τείνει στον πραγματικό αριθμό x_0 αν και μόνο αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα κοντινές στο L για κάθε περιοχή του x_0 αλλά με $x \neq x_0$.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο της f καθώς $x \to 2$.

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Σε κάθε περιοχή $(a, 2) \cup (2, b)$ έχουμε ότι $(x-2)^2 \to 0$, κι επειδή $(x-2)^2 > 0$ έχουμε $\dfrac{1}{(x-2)^2} \to +\infty$.

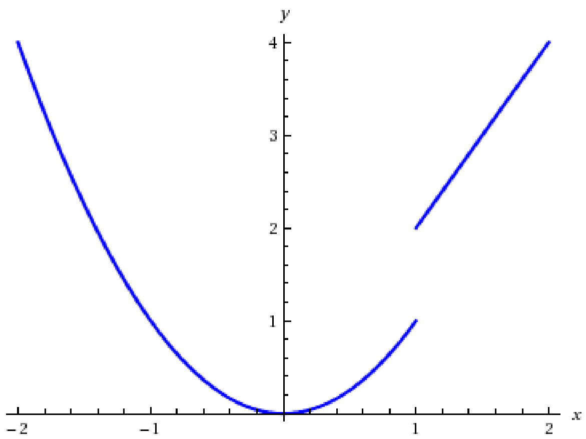
Ορισμός 3.16. Θα λέμε ότι το όριο της f είναι το $+\infty$, $(-\infty)$ καθώς το $x \to x_0$ αν οι τιμές της $f(x)$ γίνονται αυθαίρετα μεγάλες θετικά (αρνητικά) καθώς το x πλησιάζει το x_0 στο πεδίο ορισμού $D(f)$ και σε κάθε περιοχή του x_0 με $x \neq x_0$.

3.4.1 Πλευρικά όρια

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \leq 1 \\ 2x & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

με $D(f) = \mathbb{R}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο οριακό σημείο 1. Μπορούμε να πλησιάσουμε το $x = 1$ από δυο περιοχές την $(a, 1)$ και την $(1, b)$ όπου $a < 1 < b$. Αν πλησιάσουμε το 1 με $x > 1$ λέμε ότι έχουμε το της f από δεξιά του 1, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ κι αν $x < 1$ λέμε ότι έχουμε το όριο της f από αριστερά του 1, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$



Σχήμα 13: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

Ορισμός 3.17. Θα λέμε ότι η f έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ (ή $\pm\infty$) καθώς το x τείνει στο x_0 από δεξιά αν οι τιμές της f γίνονται αυθαίρετα κοντά στο L (ή θετικά-αρνητικά μεγάλες) καθώς το x

πλησιάζει αυθαίρετα κοντά το x_0 σε κάθε περιοχή με $x > x_0$. Το όριο αυτό το σημειώνουμε με

$$\lim_{x\to x_0^+} = L \ \ (\text{ή} \pm \infty)$$

Ορισμός 3.18. Θα λέμε ότι η f έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ (ή $\pm\infty$) καθώς το x τείνει στο x_0 από αριστερά αν οι τιμές της f γίνονται αυθαίρετα κοντά στο L (ή θετικά-αρνητικά μεγάλες) καθώς το x πλησιάζει αυθαίρετα κοντά το x_0 σε κάθε περιοχή με $x < x_0$. Το όριο αυτό το σημειώνουμε με

$$\lim_{x\to x_0^-} = L \ \ (\text{ή} \pm \infty)$$

Τα όρια που ορίσαμε προηγουμένως λέγονται **πλευρικά όρια** της $f(x)$.

Παρατήρηση 3.19. Αν η f ορίζεται στο διάστημα (a, x_0) αλλά όχι στο (x_0, b) τότε $x < x_0$ οπότε έχει νόημα να αναζητούμε μόνο το όριο $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Για παράδειγμα, $f(x) = \sqrt{1-x}$ με $D(f) = (-\infty, 1)$ και άρα

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Παρατήρηση 3.20. Αν η f ορίζεται σε διάστημα $(x, x_0) \cup (x_0, b)$ κι έχουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_2$ με $\ell_1 \neq \ell_2$ τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Παρατήρηση 3.21. Αν κάποιο πλευρικό όριο έχει νόημα αλλά δεν υπάρχει τότε είναι φανερό ότι δεν υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Παρατήρηση 3.22. Έστω ότι η f ορίζεται σε διάστημα $(x, x_0) \cup (x_0, b)$. Τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ είναι ισοδύναμο με το να συμβαίνει $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$.

Παράδειγμα 3.23. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$. Επειδή το $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο αριστερά και δεξιά του $x = 1$.

Στην περιοχή $(1, +\infty)$, τότε $x - 1 > 0$ και $x + 3 > 0$, άρα

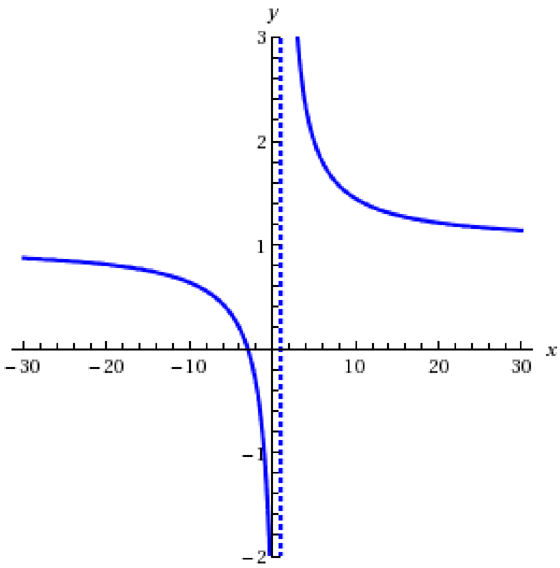
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = +\infty$$

Σε μια περιοχή $(1-\varepsilon, 1)$ με ε πολύ μικρό τότε $x - 1 < 0$ και $x + 3 > 0$ άρα

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty$$

Αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 3.24. Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$ κι ας αναζητήσουμε το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$. Επειδή το $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ έχει νόημα να αναζητήσουμε το όριο αριστερά και δεξιά του $x = 1$.

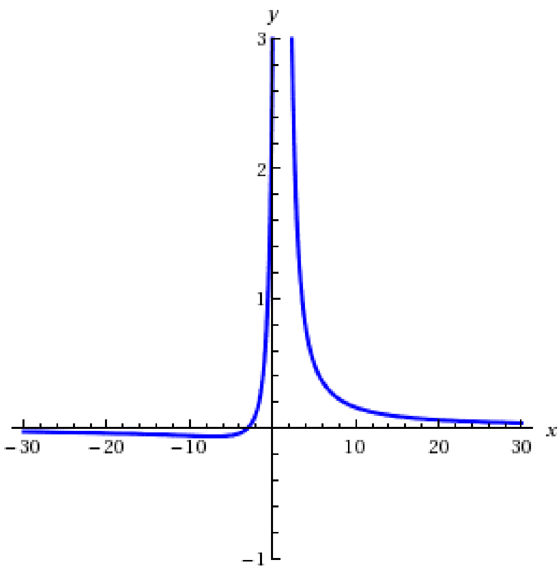


Σχήμα 14: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του παραδείγματος 3.23.

Σε αυτή την περίπτωση όμως $(x-1)^2 > 0$ και $x+3 > 0$ σε κάθε περιοχή κοντά στο 1 αλλά με $x \neq 1$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{(x-1)^2} = +\infty$$

και αφού $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.



Σχήμα 15: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ του παραδείγματος 3.24.

Παράδειγμα 3.25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$.

3.5 Ιδιότητες ορίων

Επειδή οι παρακάτω ιδιότητες ορίων ισχύουν τόσο όταν $x \to x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή σε πραγματικό αριθμό, όσο και όταν $x \to \pm\infty$, θα συμβολίζουμε με $\overline{\mathbb{R}}$ το σύνολο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Έτσι αν το x τείνει στο x_0 που μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$ ή $-\infty$ θα γράφουμε $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} (f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$, εκτός από τις περιπτώσεις: $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$.

2. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)$ υπάρχει και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} (f(x) \pm g(x))$

3. Αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} (f(x) \pm g(x))$ μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.
   Για παράδειγμα, το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x}$ δεν υπάρχει αλλά για την συνάρτηση $f(x) + g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ το όριο καθώς το x τείνει στο 0 είναι 1.

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} (f(x)\, g(x)) = \ell_1\, \ell_2$, εκτός από τις περιπτώσεις: $0\,(+\infty)$, $(+\infty)\,0$, $0\,(-\infty)$, $(-\infty)\,0$.

5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ και $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, εκτός από τις περιπτώσεις: $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $\dfrac{+\infty}{-\infty}$, $\dfrac{-\infty}{+\infty}$, $\dfrac{-\infty}{-\infty}$, $\dfrac{+\infty}{0}$, $\dfrac{-\infty}{0}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\ell_1}{0}$ όπου $\ell_1 \in \mathbb{R}$, $\ell_1 \neq 0$, (απροσδιόριστες μορφές).
   Σημειώνουμε ότι ισχύει $\dfrac{0}{+\infty} = 0$, και $\dfrac{0}{-\infty} = 0$.

6. Αν για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ και $x \neq x_0$ έχουμε $|f(x)| \leq |g(x)|$ και $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = 0$

7. Έστω ότι για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ με $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) \leq g(x)$.
   Αν $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = +\infty$, ενώ
   αν $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = -\infty$.

8. Αν για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ με $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) \leq g(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} g(x)$, ή ισοδύναμα $\ell_1 \leq \ell_2$.

9. (*Θεώρημα ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων ή θεώρημα sandwich.*) Αν για κάθε x που ανήκει στην περιοχή του $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ με $x \neq x_0$ έχουμε $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και $\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} h(x) = \lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell$.

10. Αν $\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} |f(x)| = |\ell|$.

11. Αν $\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} f(x) = 0$ και η $g(x)$ είναι φραγμένη στην περιοχή του x_0, δηλαδή $|g(x)| \leq M$, τότε $\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}} (f(x)\, g(x)) = 0$.

Οι προηγούμενες ιδιότητες ισχύουν ακόμα κι όταν έχουμε γνήσιες ανισότητες ($<$, αντί $\leq$).

3.6 Βασικά όρια συναρτήσεων

1. $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} x^k = x_0^k, \qquad k \in \mathbb{N}$.

2. $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} a\, x^k = a\, x_0^k, \qquad k \in \mathbb{N}$.

3. Αν $f(x) = a_k\, x^k + a_{k-1}\, x^{k-1} + + a_1\, x + a_0$ πολυώνυμο, τότε $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$.

4. $\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty, \qquad k \in \mathbb{N}$.

5. $\lim_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ αν k άρτιος φυσικός, $\lim_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ αν k περιττός φυσικός.

6. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ και γενικότερα $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

7. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, άρα το $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

8. $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} \cos x = \cos x_0$

9. $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} \tan x = \tan x_0$ με $x_0 \neq k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

10. $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} \mathrm{cotan}\, x = \mathrm{cotan}\, x_0$ με $x_0 \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

12. $\lim_{x \to x_0 \in \mathbb{R}} a^x = a^{x_0}$ με $a > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

13. $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ αν $a > 1$,

    $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ αν $0 < a < 1$,

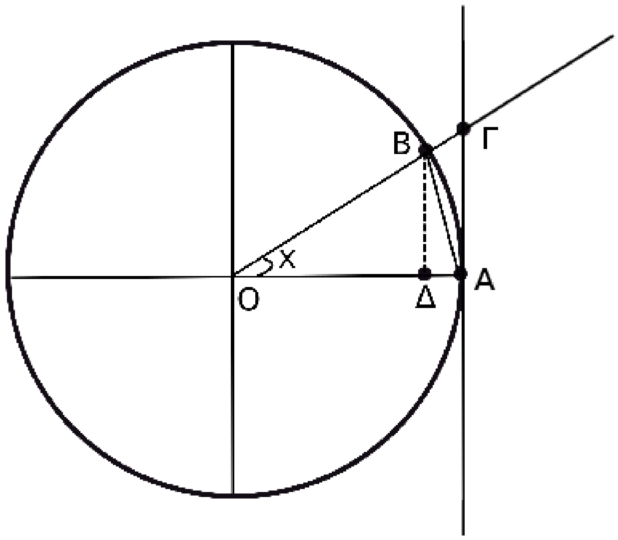
14. $\lim_{x \to x_0} \log x = \log x_0$, $x_0 > 0$.

15. $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log x = \lim_{x\to 0} \log x = -\infty.$

Παρακάτω θα αποδείξουμε το βασικό όριο 11, δηλαδή ότι $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, όπου x το μέτρο τόξου σε ακτίνια.

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος. Επειδή ο κύκλος είναι τριγωνομετρικός ισχύουν ΟΑ $=$ ΟΒ $= 1$, ΒΔ $= \sin x$, ΟΔ $= \cos x$, ΑΓ $= \tan x$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$\text{εμβαδό τριγώνου ΟΑΒ} < \text{εμβαδό κυκλικού τομέα ΟΑΒ} < \text{εμβαδό τριγώνου ΟΑΓ} \qquad (*)$$



Σχήμα 16: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, όπου x το μέτρο τόξου σε ακτίνια.

Όμως

$$\begin{aligned}
\text{εμβαδό τριγώνου ΟΑΒ} &= \frac{1}{2}\,\text{ΟΑ} \cdot \text{ΒΔ} = \frac{1}{2}\sin x\\
\text{εμβαδό κυκλικού τομέα ΟΑΒ} &= \pi\,\text{ΟΑ}^2\,\frac{x}{2\,\pi} = \frac{1}{2}x\\
\text{εμβαδό τριγώνου ΟΑΓ} &= \frac{1}{2}\,\text{ΟΑ} \cdot \text{ΑΓ} = \frac{1}{2}\tan x
\end{aligned}$$

οπότε η ανισότητα $(*)$ γίνεται

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \Rightarrow \sin x < x < \tan x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall x \in (0, \pi/2)$$

Αν $x \in (-\pi/2, 0)$ τότε $\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$, ή ισοδύναμα $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, οπότε

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2) \qquad (**)$$

Επειδή $\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, και $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, εφαρμόζοντας το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων (θεώρημα sandwich) στην ανισότητα $(**)$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3.7 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Αν υπάρχουν, να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x},\qquad b)\ \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x},\qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x},\qquad d)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x},$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} x\,\sin(\frac{1}{x}),\qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} x^2\,\sin(\frac{1}{x}),\qquad g)\ \lim_{x\to-\infty} x\,\sin(\frac{1}{x}),\qquad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.$$

Απ. $a)\ 2/\pi,\quad b)\ 0,\quad c)\ 0,\quad d)\ 0,\quad e)\ 0,\quad f)\ +\infty,\quad g)\ 1,\quad h)\ 1.$

Άσκηση 2. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα όρια:

$$a)\ \lim_{x\to-\infty}\cos x,\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x}),\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}.$$

Άσκηση 3. Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x}{x^2-1},\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3},\qquad c)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^2-1},$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{|x|(x-1)}.$$

Απ. $a)\ 1,\quad b)\ 1/2,\quad c)\ 0,\quad d)\ -\infty.$

Άσκηση 4. Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1},\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x),\qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x).$$

Απ. $a)\ 1/2,\quad b)\ 0,\quad c)\ +\infty.$

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f=\begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x\le -1,\\ x^2+1 & \text{αν} \quad -1<x<0,\\ 1-x & \text{αν} \quad x>0.\end{cases}$$

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: $a)\ \lim_{x\to-1}f(x),\quad b)\ \lim_{x\to 0}f(x),\quad c)\ \lim_{x\to 4}f(x)$

Απ. $a)$ Δεν υπάρχει, $\quad b)\ 1,\quad c)\ -3.$

Άσκηση 6. Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός a, έτσι ώστε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-a\,x),$$

να είναι πραγματικός αριθμός.

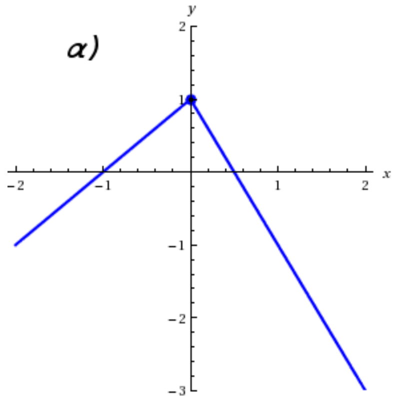
Απ. Για $a=1$ το όριο είναι $1/2$.

4 Συνέχεια συνάρτησης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την έννοια της *συνέχειας* συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα πότε θα λέγεται μια συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και γενικότερα πότε θα λέγεται συνεχής σε κάποιο διάστημα ή ακόμα και σε όλο το πεδίο ορισμού της.

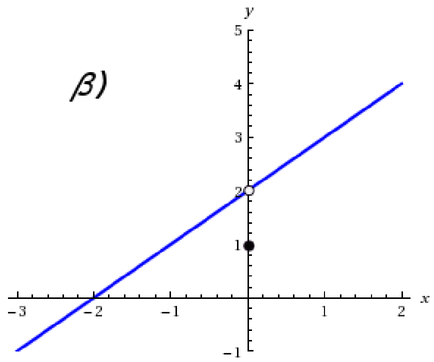
Ας θεωρήσουμε τα παρακάτω παραδείγματα συναρτήσεων και ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο σημείο $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ 1-2x & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$



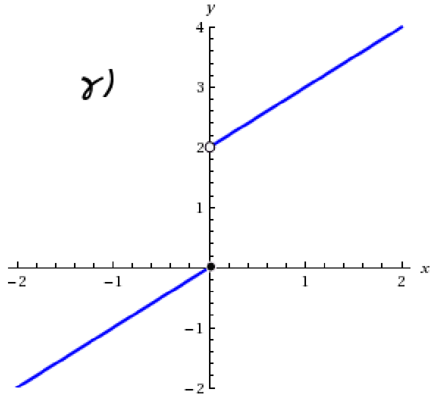
1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$



1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$.
3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ x+2 & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

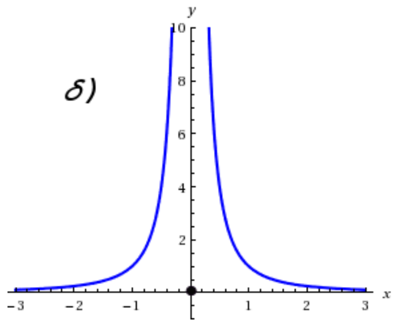


1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 1$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.
2) Έχουμε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$, και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x+2) = 2$ δηλαδή $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} x$, άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 0$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.

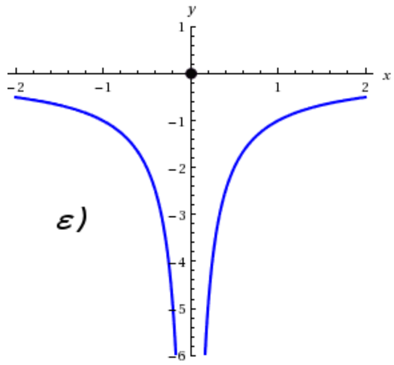
2) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, δηλαδή το όριο της συνάρτησης είναι $+\infty$, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.



$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{|x|} & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

1) Η f ορίζεται στο $x = 0$, με $f(0) = 0$ και το 0 είναι σημείο του $D(f)$.

2) Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{|x|} = -\infty$, δηλαδή το όριο της συνάρτησης είναι $-\infty$, ενώ η τιμή της συνάρτησης είναι πραγματικός αριθμός, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

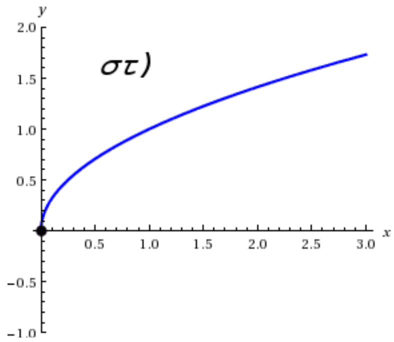


Αν $f(x) = \sqrt{x}$ τότε $D(f) = [0, +\infty)$ και

1) Το $x = 0$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ και $f(0) = 0$,

2) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

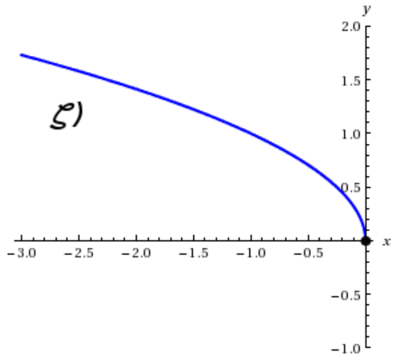


Αν $f(x) = \sqrt{-x}$ τότε $D(f) = (-\infty, 0]$ και

1) Το $x = 0$ είναι σημείο του πεδίου ορισμού $D(f)$ και $f(0) = 0$,

2) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x} = 0$,

3) Από 1), 2) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.



Στα παραδείγματα α), στ) και ζ) έχουμε συναρτήσεις που ορίζονται στο $x = 0$, υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Συναρτήσεις με αυτές τις ιδιότητες λέγονται συνεχείς στο μηδέν. Στα παραδείγματα β), γ), δ) και ε) έχουμε συναρτήσεις που ορίζονται στο $x = 0$, και το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ ή είναι διάφορο του $f(0)$ ή δεν υπάρχει ή είναι $\pm\infty$ οπότε και πάλι διάφορο του $f(0)$. Τις συναρτήσεις αυτές τις ονομάζουμε ασυνεχείς στο μηδέν.

Ορισμός 4.1. Μια συνάρτηση f θα λέγεται συνεχής στο x_0, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του $D(f)$ ή $D(f) = [x_0, a)$ ή $D(f) = (b, x_0]$ αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ορισμός 4.2. Μια συνάρτηση f θα λέγεται ασυνεχής στο x_0 του $D(f)$ αν και μόνο αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή αν ισχύει τουλάχιστον μια από τις παρακάτω συνθήκες
α) Δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
β) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.
γ) Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, αλλά $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(0)$.

Ορισμός 4.3. Μια συνάρτηση f λέγεται από αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) συνεχής στο x_0 του $D(f)$ αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (αντίστοιχα $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$).

Παρατήρηση 4.4. Αν μια συνάρτηση δεν είναι ορισμένη στο x_0 δηλαδή το x_0 δεν ανήκει στο $D(f)$ δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια της συνάρτησης στο x_0. Είναι γνωστό όμως ότι μπορούμε να αναζητήσουμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ αρκεί το x_0 να είναι οριακό σημείο του $D(f)$. Σε μια τέτοια περίπτωση αν το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός ℓ τότε η συνάρτηση μπορεί να επεκταθεί ώστε να είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να πάρουμε ως τιμή της συνάρτησης στο x_0 το ℓ. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = x\,\sin(\frac{1}{x})$$

δεν ορίζεται στο 0 άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια της f στο μηδέν. Όμως

$$\lim_{x\to 0} x\,\sin(\frac{1}{x}) = 0$$

Αν ορίσουμε την συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} x\,\sin(\frac{1}{x}) & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

θα έχουμε επεκτείνει την f ώστε να είναι συνεχής στο μηδέν.

Παρατήρηση 4.5. Αν το x_0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού της f και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αλλά $\ell \neq f(0)$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x_0. Μια τέτοια ασυνέχεια λέμε ότι "αίρεται" ή "διορθώνεται" αρκεί να πάρουμε ως τιμή της f στο x_0 το ℓ. Αν η f είναι ασυνεχής επειδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ή επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε λέμε ότι η ασυνέχεια δεν διορθώνεται. Οπότε στο παράδειγμα β) η ασυνέχεια διορθώνεται αρκεί να πάρουμε $f(0) = 2$, ενώ στα παραδείγματα γ), δ) και ε) η ασυνέχεια δεν διορθώνεται.

Παρατήρηση 4.6. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 σημείο του πεδίου ορισμού της f, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα και $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε η f είναι από αριστερά και από δεξιά συνεχής στο x_0.

Αλλά και αντίστροφα αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x) f(x_0)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ δηλαδή αν η f είναι από αριστερά και δεξιά συνεχής στο x_0 τότε θα είναι και συνεχής στο x_0.

Ορισμός 4.7. Αν I ένα διάστημα του πεδίου ορισμού $D(f)$ της f θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο I αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in I$.

Ορισμός 4.8. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in D(f)$ σημείο του πεδίου ορισμού της.

4.1 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Ιδιότητα 1. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα I και στο $x_0 \in I$ οι f, g είναι συνεχείς, τότε στο x_0 θα είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $f\,g$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g ασυνεχής στο x_0 τότε οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$ και $f\,g$ είναι ασυνεχείς στο x_0.

Ιδιότητα 2. *Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο διάστημα I και στο $x_0 \in I$ είναι συνεχής με $f(x_0) \neq 0$, τότε η η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Ιδιότητα 3. *Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα I και στο $x_0 \in I$ οι f, g είναι συνεχείς με $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Ιδιότητα 4. *Αν οι συναρτήσεις g, f ορίζονται στα διαστήματα I_1, I_2 αντίστοιχα και για κάθε $x \in I_1$ έχουμε ότι $g(x) \in I_2$ τότε όπως γνωρίζουμε ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$. Με αυτές τις προϋποθέσεις αν η g είναι συνεχής στο $x_0 \in I_1$ και η f είναι συνεχής στο $g(x_0) \in I_2$ τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ θα είναι συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

4.2 Χαρακτηριστικές συνεχείς συναρτήσεις

1. Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$ με c σταθερός πραγματικός αριθμός είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = a_k\,x^k + a_{k-1}\,x^{k-1} + \cdots + a_1\,x + a_0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Η ρητή συνάρτηση
$$f(x) = \frac{a_k\,x^k + a_{k-1}\,x^{k-1} + \cdots + a_1\,x + a_0}{b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + b_1\,x + b_0} = \frac{A(x)}{B(x)}$$
είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο $B(x_0) \neq 0$.

4. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in D(f) = [0, +\infty)$.

5. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7. Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Η συνάρτηση $f(x) = \mathrm{cotan}\, x$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

10. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 0$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

11. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $a \neq 1$ και $a > 0$ είναι συνεχής για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

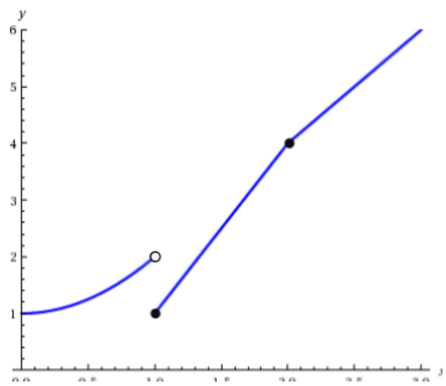
12. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$ με $D(f) = (0, +\infty)$ και a σταθερός πραγματικός αριθμός είναι συνεχής σε κάθε $x \in D(f)$.

4.3 Παραδείγματα στην συνέχεια συναρτήσεων

Παράδειγμα 4.1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ 3x - 2 & \text{αν} \quad 1 \leq x < 2\,, \\ 2x & \text{αν} \quad x \geq 2\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια στα σημεία $x = 0$, $x = 1$ και $x = 2$.
Απάντηση:
α) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1$ και η συνάρτηση ορίζεται στο $[0, 1)$ αλλά αριστερά του 0 δεν ορίζεται, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 1) = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $x = 0$.
β) Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 1$ και $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + 1) = 2$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$



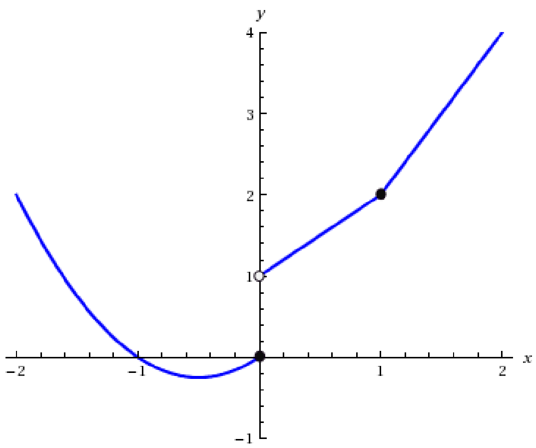
Σχήμα 17: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παρ. 4.1

$\lim_{x\to 0}(3x-2) = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$. Επομένως το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει και συνεπώς η f είναι ασυνεχής για $x=1$. Όμως μπορούμε να πούμε ότι η f είναι από δεξιά συνεχής για $x=1$ αφού $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.
γ) Για $x=2$ έχουμε $f(2)=4$ και $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x-2) = 4$, και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x) = 4$. Άρα υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4 = f(2)$ συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x=2$.

Παράδειγμα 4.2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{αν} \quad x \leq 0\,, \\ x+1 & \text{αν} \quad 0 < x < 1\,, \\ 2x & \text{αν} \quad x \geq 1\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια.
Απάντηση:
α) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = x^2 + x$
β) Για κάθε $x \in (0,1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = x+1$
γ) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική με τύπο $f(x) = 2x$
δ) Για $x=0$ έχουμε $f(0)=0$, ενώ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Επομένως η f είναι ασυνεχής στο $x=0$. Αλλά επειδή η $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ μπορούμε να πούμε ότι είναι από αριστερά συνεχής στο $x=0$.
ε) Για $x=1$ έχουμε $f(1)=2$. Επιπλέον $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x) = 2$, δηλαδή $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $x=1$.



Σχήμα 18: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Παρ. 4.2

Παράδειγμα 4.3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \geq 2\,, \\ a\,x + 2 & \text{αν} \quad x < 2\,. \end{cases}$$

Να βρεθεί η πραγματική τιμή που πρέπει να πάρει το a για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x = 2$.

Απάντηση:

Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο $x = 2$ πρέπει και αρκεί $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, δηλαδή $\lim_{x\to 2^+} x^2 = \lim_{x\to 2^-}(a\,x + 2) = 2^2 \Rightarrow 2\,a + 2 = 4 \Rightarrow a = 1$.

Παράδειγμα 4.4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

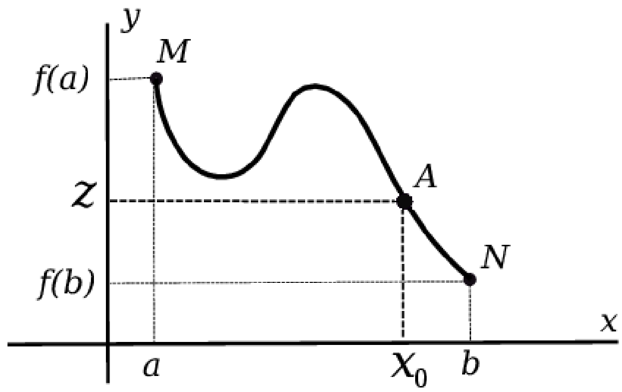
Απάντηση: Οι συναρτήσεις $g(x) = x$ και $h(x) = \sin x$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$. Άρα το πηλίκο $f(x) = g(x)/h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο έχουμε $\sin x \neq 0$ δηλαδή $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι η f είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ το οποίο άλλωστε είναι και το $D(f)$.

Παράδειγμα 4.5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x^2+2}$. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια.

Απάντηση: Οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$ και $h(x) = x^2 + 2$ είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή $D(g) = \mathbb{R}$ ορίζεται η $g \circ h$ για κάθε $x \in D(h) = \mathbb{R}$. Τότε όμως (από την ιδιότητα 4 συνεχών συναρτήσεων) η συνάρτηση $g \circ h$ είναι συνεχής για κάθε $x \in D(h) = \mathbb{R}$, δηλαδή η $g \circ h = g(h(x)) = e^{x^2+2}$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.4 Δυο βασικές προτάσεις στις συνεχείς συναρτήσεις

Πρόταση 4.6. *(Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $f(a) \neq f(b)$ και z ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ του $f(a)$ και $f(b)$ τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα $x_0 \in (a,b)$ έτσι ώστε $f(x_0) = z$.*

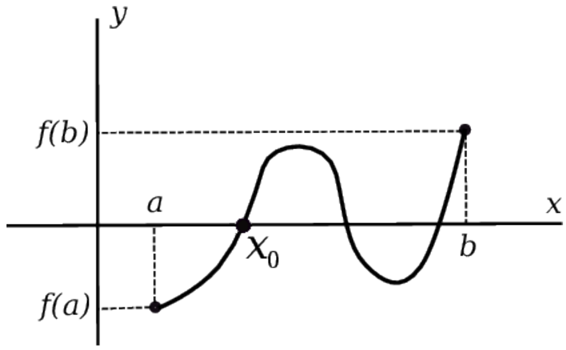


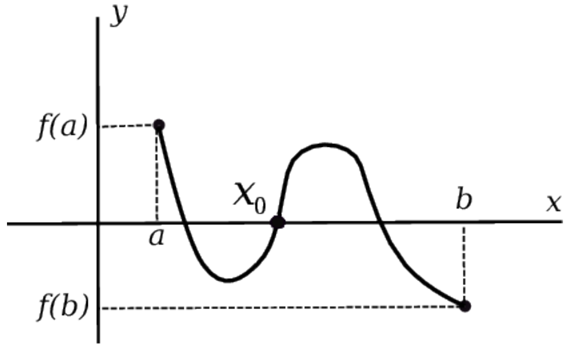
Σχήμα 19: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής

Γεωμετρικά το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής εκφράζει το γεγονός ότι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ που ενώνει τα σημεία $M(a, f(a))$, $N(b, f(b))$ του επιπέδου $x - y$ αναγκαστικά έχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής με την ευθεία $y = z$ ας το πούμε $A(x_0, z)$. Αφού το σημείο αυτό ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης θα έχουμε $f(x_0) = z$.

Πρόταση 4.7. *(Θεώρημα Bolzano) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ έτσι ώστε $f(x_0) = 0$.*

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano είναι ότι το διάγραμμα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ στο $[a,b]$ με $f(a)f(b) < 0$ αναγκαστικά τέμνει τον άξονα των x σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0 στο διάστημα (a,b).





Σχήμα 20: Το θεώρημα Bolzano είναι απλή συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, αφού από την $f(a)f(b) < 0$ έχουμε ότι $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$.

Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: *Αν η f συνεχής στο $[a,b]$ κι οι τιμές της f στα* *άκρα a, b του διαστήματος είναι ετερόσημες τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (a, b).*

Παράδειγμα 4.8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Απάντηση: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \cos x - x$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων σε όλο το $\mathbb{R}$. Οι τιμές της f στα άκρα είναι $f(0) = \cos 0 - 0 = 1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, οπότε $f(0)f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Συνεπώς, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0 \Rightarrow \cos x_0 - x_0 = 0 \Rightarrow \cos x_0 = x_0$. Άρα η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Παράδειγμα 4.9. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Απάντηση: Σε αυτό το παράδειγμα δεν χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική σε όλο το $\mathbb{R}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0) = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty$$

Συνεπώς υπάρχει κάποιος αριθμός a αρκετά μεγάλος αρνητικός (δεν είναι ανάγκη να του δώσουμε συγκεκριμένη τιμή) έτσι ώστε $f(a) = a^3 + 2a^2 + 3a + 1 < 0$. Από την άλλη έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0) = \lim_{x\to+\infty} x^3(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = +\infty$$

οπότε υπάρχει κάποιος αριθμός b αρκετά μεγάλος θετικός έτσι ώστε $f(b) = b^3 + 2b^2 + 3b + 1 > 0$. Δηλαδή $f(a)f(b) < 0$. Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει κάποιος πραγματικός $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε $f(\xi) = 0$ ή αλλιώς $\xi^3 + 2\xi^2 + 3\xi + 1 = 0$, κι έτσι ο ξ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

Παρατήρηση: Ο αναγνώστης ίσως να προσπαθήσει λίγο πολύ στην τύχη να βρει ένα διάστημα στο οποίο εντοπίζεται η ρίζα ξ (είναι η μόνη πραγματική ρίζα της εξίσωσης κι οι άλλες δυο ρίζες είναι συζυγείς μιγαδικές). Αν δοκιμάσει το διάστημα $(-1, 0)$ θα βρεί ότι ο ξ βρίσκεται στο διάστημα αυτό (γιατι;)

Παράδειγμα 4.10. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^5 + 20x + 3 = 0$ έχει *μόνο* μια πραγματική ρίζα στο $(-1, 1)$.

Απάντηση: Αν $f(x) = x^5 + 20x + 3$ έχουμε $f(-1) = -18$ και $f(1) = 24$ δηλαδή $f(-1)f(1) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, άρα υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Όμως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ γιατί για κάθε $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $f(x_1) - f(x_2) = x_1^5 + 20x_1 + 3 - (x_2^5 + 20x_2 + 3) = (x_1^5 - x_2^5) + 20(x_1 - x_2) < 0$ αφού $x_1 - x_2 < 0$ και $x_1^5 - x_2^5 < 0$. Έτσι βγαίνει το συμπέρασμα ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$, γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ στο $(-1, 1)$ τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ που είναι άτοπο αφού πρέπει $f(\rho_1) < f(\rho_2)$ επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[-1, 1]$.

4.5 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{αν} \quad x \geq 1\,, \\ 2\,x & \text{αν} \quad 0 \leq x < 1\,, \\ -x & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς της συνέχεια για $x = 0$ και για $x = 1$.

Άσκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{αν} \quad x \geq 0\,, \\ \beta + 2\sqrt{x^2+1} & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα a, β αν γνωρίζουμε ότι $f(1) = 2$ και ότι η f είναι συνεχής για $x = 0$.

Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{αν} \quad > 2\,, \\ a & \text{αν} \quad x = 2\,, \\ \beta + x^2 & \text{αν} \quad x < 2\,. \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα a, β αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής για $x = 2$.

Άσκηση 4. Να δειχθεί ότι στο διάστημα $(0,1)$ η εξίσωση $x\,2^x = 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Άσκηση 5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{αν} \quad -2 \leq x < 0\,, \\ -x^2 - 2 & \text{αν} \quad 0 \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν υπάρχει $x_0 \in (-2, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Άσκηση 6. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f(x) = x^2\,, \qquad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{αν} \quad x \geq 0\,, \\ x + 1 & \text{αν} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f \circ g$ ως προς την συνέχεια.

Άσκηση 7. Να εξετασθούν ως προς την συνέχεια στο $x = 0$ οι παρακάτω συναρτήσεις. Αν είναι η f είναι ασυνεχής και η ασυνέχεια μπορεί να διορθωθεί να τροποποιήσετε κατάλληλα την τιμή της f στο $x = 0$.

$$1)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases} \qquad 2)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases} \qquad 3)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$4)\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases} \qquad 5)\quad f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{αν} \quad x > 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases} \qquad 6)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\,x) + x^2}{x} & \text{αν} \quad x < 0 \\ x^2 - x + a & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Να προσδιορισθεί η τιμή του $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 9. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$|\sin x| \leq f(x) \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Άσκηση 10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3\,x + 5 & \text{αν} \quad x < 2 \\ x^3 + 2\,x - 9 & \text{αν} \quad x > 2 \end{cases}$$

Μπορούμε να ορίσουμε το $f(2)$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής;

Άσκηση 11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2\,x + 1}{x - 1} & \text{αν} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$$

Να εξετασθεί η συνάρτηση f ως προς την συνέχεια στο $x = 1$.

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x+1} & \text{αν} \quad x < -1 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 4}{x+2} & \text{αν} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Να εξετασθεί η συνάρτηση f ως προς την συνέχεια στο $x = -1$.

Άσκηση 13. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + \lambda x + \lambda^2 & \text{αν} \quad x < -2 \\[2ex] 8x + \lambda & \text{αν} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

Να προσδιορισθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 14. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} a x^2 - x + \beta & \text{αν} \quad x < -1 \\ 1 & \text{αν} \quad x = -1 \\ \beta x^2 + a x - 1 & \text{αν} \quad x > -1 \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + (a-1)x + \beta & \text{αν} \quad x < -1 \\[2ex] \beta x - a & \text{αν} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Αν $f(2) = 0$, να προσδιορισθούν τα $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής.

Άσκηση 16. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{αν} \quad x \leq 0 \\[2ex] \sin(a x) & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής;

Άσκηση 17. (*Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach*)
Έστω $f : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

5 Παράγωγος συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[a, b]$. Για κάθε $x_0 \in [a, b]$ ορίζουμε μια νέα συνάρτηση με τύπο

$$\Pi_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

με πεδίο ορισμού $D(\Pi_{x_0}) = D(f) - \{x_0\}$.

Την συνάρτηση Π_{x_0} την ονομάζουμε *πηλίκο διαφορών της f στο x_0*. Για την συνάρτηση αυτή μπορούμε να αναζητήσουμε το όριο της καθώς το x τείνει στο x_0. Το όριο $\lim_{x \to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ μπορεί να είναι πραγματικός αριθμός, $+\infty$, $-\infty$ ή να μην υπάρχει.

• Αν το $\lim_{x \to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ είναι πραγματικός αριθμός τότε ο αριθμός αυτός λέγεται *η πρώτη παράγωγος της f στο x_0*, και λέμε ότι η f παραγωγίζεται στο x_0.

• Αν το $\lim_{x \to x_0} \Pi_{x_0}(x)$ είναι $\pm\infty$, ή δεν υπάρχει λέμε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο x_0. Ειδικά αν το όριο είναι $\pm\infty$ μπορούμε να λέμε ότι η παράγωγος της f στο x_0 απειρίζεται θετικά, αντίστοιχα αρνητικά.

Παράδειγμα 5.1. Για την συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών της f στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Άρα η f παραγωγίζεται στο 0 ή έχει πρώτη παράγωγο στο 0 και είναι 1. Συνήθως σημειώνουμε τον αριθμό αυτό με $f'(0) = 1$.

Παράδειγμα 5.2. Για την συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών της f στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$$

Όμως από την Άσκηση 2.c σελ. 39, γνωρίζουμε ότι το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ δεν υπάρχει, οπότε λέμε ότι η $f(x) = |x|$ δεν έχει πρώτη παράγωγο στο μηδέν ή ότι δεν παραγωγίζεται στο μηδέν.

Παράδειγμα 5.3. Για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ έχουμε ότι το πηλίκο διαφορών στο μηδέν είναι

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty\,.$$

Επειδή το όριο είναι $+\infty$ λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, ή ότι η πρώτη παράγωγος της f στο μηδέν απειρίζεται θετικά.

Παράδειγμα 5.4. Για την συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{αν} \quad x > 1 \end{cases}$$

έχουμε ότι το πηλίκο των διαφορών της f είναι

Αν $x < 1$ $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1 \quad$ και $\quad \lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$

Αν $x > 1$ $\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{(x-2)^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-2-1)(x-2+1)}{x-1} = \dfrac{(x-3)(x-1)}{x-1} = x-3$

και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 1^+}(x-3) = -2$$

Αφού $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}$ δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}$, και συνεπώς η f δεν έχει πρώτη παράγωγο στο ένα. Επειδή όμως υπάρχει το $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός μπορούμε να λέμε ότι υπάρχει η από *αριστερή παράγωγος* της f στο ένα. Επίσης, επειδή υπάρχει το $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}$ και είναι πραγματικός αριθμός μπορούμε να λέμε ότι υπάρχει η από *δεξιά παράγωγος* της f στο 1.

Ορισμός 5.5. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με $D(f) = [a,b]$ παραγωγίζεται στο σημείο $x_0 \in [a,b]$ ή ότι υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το πραγματικό αυτό αριθμό τον ονομάζουμε πρώτη παράγωγο της f στο x_0 και τον συμβολίζουμε με $f'(x_0)$.

Ορισμός 5.6. Θα λέμε ότι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f με $D(f) = [a,b]$ απειρίζεται θετικά (αντίστοιχα αρνητικά) στο σημείο $x_0 \in [a,b]$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \qquad (\text{αντίστοιχα} \quad -\infty)$$

Ορισμός 5.7. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f με $D(f) = [a,b]$ παραγωγίζεται από αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) στο σημείο $x_0 \in [a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (\text{αντίστοιχα} \quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0})$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Το πραγματικό αυτό αριθμό τον ονομάζουμε αριστερή (αντ. δεξιά) παράγωγο της f στο x_0 και τον συμβολίζουμε με $f'(x_0-0)$ (αντ. $f'(x_0+0)$).

Πρόταση 5.8. *Έστω συνάρτηση f και $x_0 \in D(f)$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν υπάρχει αριστερή και δεξιά παράγωγος της f στο x_0 και ισχύει $f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$, τότε υπάρχει η παράγωγος της f στο x_0 και ισχύει $f'(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$. Αντίστροφα, αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$ της f στο x_0 τότε υπάρχουν και οι $f'(x_0+0), f'(x_0-0)$ και ισχύει $f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = f'(x_0)$.*

Είναι προφανές ότι αν δεν υπάρχει μια τουλάχιστον από τις πλευρικές παραγώγους της f στο x_0 τότε δεν υπάρχει η $f'(x_0)$, καθώς επίσης αν υπάρχουν οι $f'(x_0+0), f'(x_0-0)$ αλλά ισχύει $f'(x_0+0) \neq f'(x_0-0)$ τότε και πάλι δεν υπάρχει η $f'(x_0)$.

5.1 Η συνάρτηση παραγώγου της f.

Αν στο κάθε $x_0 \in D(f)$ για το οποίο υπάρχει η πρώτη παράγωγος της f αντιστοιχίσουμε τον πραγματικό αριθμό $f'(x_0)$ θα σχηματίσουμε μια μονοσήμαντη αντιστοιχία του συνόλου $D(f') = \{x_0 \in D(f) : \exists\, f'(x_0)\}$ στο $\mathbb{R}$, οπότε θα έχουμε μια συνάρτηση την οποία ονομάζουμε *συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f* ή πιο απλά *πρώτη παράγωγο της f*. Πιο συγκεκριμένα:

Ορισμός 5.9. Ονομάζουμε συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f ή πιο απλά πρώτη παράγωγο της f, την συνάρτηση με πεδίο ορισμού $D(f') = \{x_0 \in D(f) : \exists\, f'(x_0)\}$ και τύπο f' που ορίζεται από την αντιστοιχία

$$D(f') \ni x_0 \xrightarrow{f'} f(x_0) \in \mathbb{R}$$

Προσοχή !!! Δεν πρέπει να συγχέουμε τις έννοιες "πρώτη παράγωγος της f στο x_0" και "πρώτη παράγωγος της f" μεταξύ τους. Η πρώτη έννοια είναι ένας πραγματικός αριθμός ενώ η δεύτερη είναι μια συνάρτηση.

Ορισμός 5.10. Ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0 \in D(f)$ την πρώτη παράγωγο στο x_0 της συνάρτησης πρώτης παραγώγου f'. Την δεύτερη παράγωγο στο x_0 της f συμβολίζουμε με $f''(x_0)$ δηλαδή $f''(x_0) = (f'(x))'_{x=x_0}$. Επαγωγικά, από την σχέση $f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'_{x=x_0}$ ορίζεται η n-οστή παράγωγος της f στο x_0.

Για το υπολογισμό της συνάρτησης πρώτης παραγώγου της f στο x_0 πρέπει να βρούμε το όριο του πηλίκου των διαφορών $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Μια χρήσιμη αντικατάσταση για την εύρεση αυτού του ορίου είναι η $x - x_0 = h$, οπότε επειδή $x \to x_0$ και $x \neq x_0$, τότε $h \to 0$, και $h \neq 0$, οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\,.$$

Επιπλέον, η αντικατάσταση αυτή μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πιο εύκολα και την συνάρτηση πρώτης παραγώγου της f αφού για το τυχαίο $x \in D(f)$ για το οποίο υπάρχει η πρώτη παράγωγος, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Για παράδειγμα, η πρώτη παράγωγος της $f(x) = x^2$ είναι

$$(x^2)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)(x+h+x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2\,x+h) = 2\,x$$

και γενικά $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

5.2 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Έστω ότι η f είναι ορισμένη για κάθε $x \in [a, b]$ και έστω ότι υπάρχει η παράγωγος της f στο $x_0 \in (a, b)$.

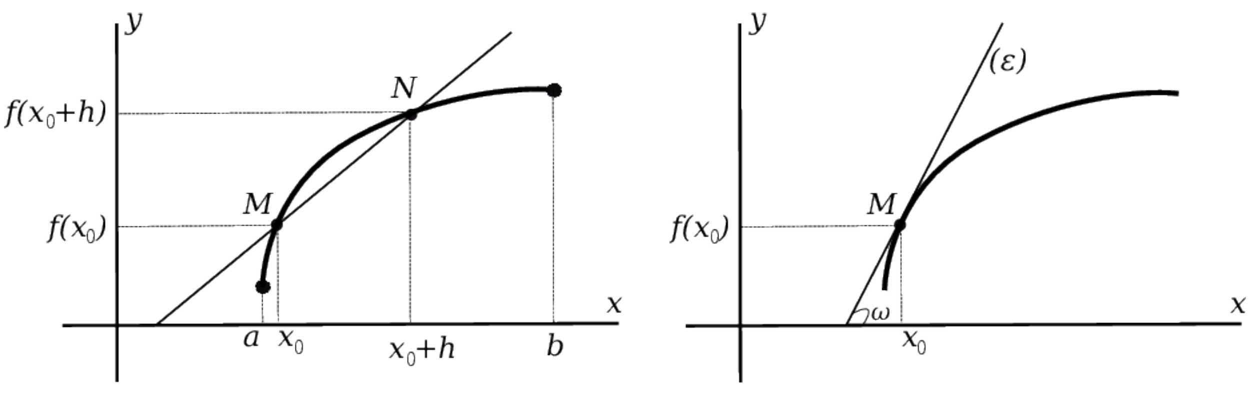
Ας θεωρήσουμε δυο σημεία $M(x_0, f(x_0)$ και $N(x_0 + h, f(x_0 + h))$ στο διάγραμμα της f. Η ευθεία που ενώνει τα σημεία αυτά ονομάζεται τέμνουσα του διαγράμματος και έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) \qquad (*)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο N πλησιάζει το σημείο M κατά μήκος του διαγράμματος της f. Τότε το h πλησιάζει το 0 και παίρνοντας το όριο της εξίσωσης $(*)$ καθώς το $h \to 0$ δίνει

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad (**)$$

Η $(**)$ είναι η εξίσωση μιας χαρακτηριστικής ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και λέγεται *εφαπτομένη της f στο σημείο* $M(x_0, f(x_0))$. Αλλά η εξίσωση ευθείας που περνάει από το $M(x_0, f(x_0))$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$. Άρα το $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (κλίση) της (ε), δηλαδή $\tan\omega = f'(x_0)$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας των x με την ευθεία (ε).



Σχήμα 21: Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου: Το $f'(x_0)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας στο διάγραμμα της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, δηλαδή $f'(x_0) = \tan\omega$

Άν $f'(x_0) = 0$ τότε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των x, ενώ αν $f'(x_0) = \pm\infty$ τότε η εφαπτομένη του διαγράμματος της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη προς τον άξονα των y.

Παράδειγμα 5.11. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Να προσδιορισθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1, 2)$ να έχει κλίση $\lambda = 4$.
Απάντηση: Αφού το $M(1, 2)$ είναι σημείο του διαγράμματος της f θα πρέπει $f(1) = 2$, δηλαδή $1 + \alpha + \beta = 2$ ή $\alpha + \beta = 1$. Από την άλλη η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1, 2)$ έχει κλίση

4 άρα θα πρέπει $f'(1) = 4$. Όμως $f'(x) = 2x + a$, επομένως $f'(1) = 2 + a = 4$ ή $a = 2$. Τότε η σχέση $a + \beta = 1$ δίνει $\beta = -1$. Έτσι το πρόβλημα έχει λύση για $a = 2$, $\beta = -1$.

5.3 Κανόνες παραγώγισης

Πριν αναφέρουμε τους κανόνες της παραγώγισης αναφέρουμε μια βασική πρόταση η οποία συνδέει την παραγωγισιμότητα συναρτήσεων με την συνέχεια.

Πρόταση 5.12. *Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D(f)$ τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Απόδειξη: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 υπάρχει το $f'(x_0)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δηλαδή

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Τότε αν πάρουμε το όριο όταν το $x \to x_0$ στην ταυτότητα

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0)$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\, \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\, 0 = 0$$

Δηλαδή $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού είναι δυνατόν μια συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 \in D(f)$ χωρίς να είναι η f παραγωγίσιμη στο x_0. Το κλασικό παράδειγμα είναι η $f(x) = |x|$ η οποία είνα συνεχής στο $x = 0$ αλλά όπως έχουμε δει δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν (σελ. 52, παράδειγμα 5.2). □

5.3.1 Κανόνας παραγώγισης αθροίσματος

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει και όταν έχουμε πεπερασμένο πλήθος προσθετέων.

5.3.2 Κανόνας παραγώγισης διαφοράς

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)}$$

5.3.3 Κανόνας παραγώγισης γινομένου (κανόνας του Leibniz)

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ ισχύει

$$\boxed{(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}$$

Αν $f(x) = c$ η σταθερή συνάρτηση τότε ο προηγούμενος κανόνας γίνεται $(c\,g(x))' = c\,g'(x)$ αφού $f'(x) = 0$.

5.3.4 Κανόνας παραγώγισης πηλίκου

Για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$ για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ και η $g'(x)$ και είναι $g(x) \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}}$$

Αν $f(x) = 1$, τότε ο προηγούμενος κανόνας γίνεται

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-\,g'(x)}{g^2(x)}}$$

5.3.5 Κανόνας παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης - κανόνας της αλυσίδας

Αν f, g συναρτήσεις για τις οποίες $R(g) \cap D(f) \neq \varnothing$, τότε ορίζεται η $f \circ g$. Για κάθε x για το οποίο υπάρχει η $g'(x)$ και υπάρχει η $f'(t)$ με $t = g(x)$, τότε υπάρχει η $(f \circ g)'(x)$ και ισχύει

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(t)|_{t=g(x)}\,g'(x) = f'(g(x))\,g'(x)}$$

Για παράδειγμα αν $f(x) = \sin(h(x))$, τότε

$$\boxed{f'(x) = cos(h(x))\,h'(x)}$$

5.3.6 Κανόνας παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης

Για κάθε x για το οποίο υπάρχει η $f'(x)$ με $f'(x) \neq 0$ υπάρχει και η $(f^{-1}(x))'$ και ισχύει

$$\boxed{(f^{-1}(x))' = \left.\frac{1}{f'(t)}\right|_{t=f^{-1}(x)}}$$

Για παράδειγμα αν $f(x) = \sin x$, τότε για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ έχουμε

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin t)'} = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

δηλαδή

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad -1 < x < 1}$$

Συνάρτηση	Παράγωγος	Αντίστοιχη σύνθετη συνάρτηση	Παράγωγος
$y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$y' = n\,x^{n-1} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = g^n(x)$ $n \in \mathbb{N}$	$y' = n\,g^{n-1}(x)\,g'(x)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \sin(g(x))$	$y' = \cos(g(x))\,g'(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \cos(g(x))$	$y' = -\sin(g(x))\,g'(x)$
$y = e^x$	$y' = e^x \quad x \in \mathbb{R}$	$y = e^{g(x)}$	$y' = e^{g(x)}\,g'(x)$
$y = \log x$	$y' = \dfrac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = \log(g(x))$	$y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = \sqrt{g(x)}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\,g'(x)$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$	$y = \tan(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\,g'(x)$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi$	$y = \cot(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2(g(x))}\,g'(x)$
$y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$	$y' = a\,x^{a-1} \quad x \in \mathbb{R}^+$	$y = g^a(x)$	$y' = a\,g^{a-1}(x)\,g'(x)$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$	$y = \arcsin(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\,g'(x)$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad -1 < x < 1$	$y = \arccos(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\,g'(x)$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \arctan(g(x))$	$y' = \dfrac{1}{1+g^2(x)}\,g'(x)$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2} \quad x \in \mathbb{R}$	$y = \operatorname{arccot}(g(x))$	$y' = -\dfrac{1}{1+g^2(x)}\,g'(x)$

Πίνακας 1: Παράγωγοι των κυριοτέρων στοιχειωδών συναρτήσεων

Επίσης μπορούμε να γνωρίζουμε ότι

- $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \log a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$
- $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \log a}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ και $a > 0$, $a \neq 1$.

Πράγματι, $y = a^x \Rightarrow \log y = \log a^x \Rightarrow \log y = x \log a \Rightarrow (\log y)' = \log a \Rightarrow y'/y = \log a \Rightarrow y' = y \log a \Rightarrow y' = a^x \log a$.
Επιπλέον $y = \log_a x \Rightarrow a^y = x \Rightarrow \log a^y = \log x \Rightarrow y \log a = \log x \Rightarrow (y \log a)' = (\log x)' \Rightarrow y' \log a = 1/x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x \log a}$.

5.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = |x-1|+2$ δεν έχει παράγωγο για $x=1$.

Άσκηση 2. Αν $f(x) = |x^2 - 4\,x + 3|$ να βρεθεί η $f'(0)$ και να εξετασθεί αν υπάρχει η $f'(3)$.

Άσκηση 3. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x\,|x|$. Να βρεθεί αν υπάρχει η $f'(0)$.

Άσκηση 4. Αν για την συνάρτηση f έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \leq 2 \\ a\,x + \beta & \text{αν} \quad x > 2 \end{cases}$$

να βρεθούν τα a, β ώστε να υπάρχει η $f'(2)$.

Άσκηση 5. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2\,x^2 + q + 1 & \text{αν} \quad x < 0 \\ a\,x + b & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

να βρεθούν τα a, β ώστε να υπάρχει η $f'(0)$ και να υπολογισθεί.

Άσκηση 6. Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τις παραγώγους καθώς και τις πλευρικές παραγώγους στο $x=0$ των παρακάτω συναρτήσεων

1) $f(x) = 2$, 2) $f(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 3$, 3) $f(x) = \tan x$, 4) $f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x} & \text{αν} \quad x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$ 6) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{αν} \quad x > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ -1 - x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$

Άσκηση 7. Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της f σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει.

Άσκηση 8. Αν $x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι υπάρχει το $f'(0)$ και να υπολογισθεί.

Άσκηση 9. Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + 3\,x + \beta$. Να βρεθεί το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι:

α) παράλληλη προς τον άξονα των x
β) παράλληλη προς την ευθεία $2\,x - y = 3$
γ) παράλληλη προς την ευθεία $y = x$.

Άσκηση 10. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της υπερβολής $y = a^2/x$ στο σημείο $M(a, b)$ με τον άξονα των x.

Άσκηση 11. Να δειχθεί ότι η ευθεία $y = -x$ εφάπτεται στο διάγραμμα της $f(x) = x^2 + 3\,x + 4$ και να βρεθεί το σημείο επαφής.

Άσκηση 12. Να δειχθεί ότι στην παραβολή $f(x) = x^2 + a\,x + b$ η χορδή που διέρχεται από το σημείο με τετμημένες $x = a$ και $x = b$ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη στο σημείο $M\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

Άσκηση 13. Αν $f(x) = \sin x$ και $g(t) = \sin(t^2 - 1)$ να υπολογισθεί η $g'(1)$.

Άσκηση 14. Να υπολογισθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

$$a)\ f(x) = x^x \quad b)\ f(x) = (x^2+1)^{x^2}\,, \quad c)\ f(x) = (\log x)^x\,, \quad d)\ f(x) = 5^{\sin x}$$

Άσκηση 15. Να βρεθεί η παράγωγος για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$a)\ f(x) = x^3\, e^x\,, \quad b)\ f(x) = \frac{x^2}{\log x}\,, \quad c)\ f(x) = e^x\,\cos x$$
$$d)\ x^3\,\log x - \frac{1}{3}\,x^3\,, \quad e)\ f(x) = (x-1)\,2^x\,, \quad f)\ f(x) = \frac{e^x}{x^2}\,.$$

Άσκηση 16. Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2\,e^x\,\cos x}{x+1}$$

Άσκηση 17. Αν $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ να δειχθεί ότι ισχύει

$$x\,y'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}\,y = 0\,.$$

Άσκηση 18. Αν $y = a\,\cos(\lambda\,x) + b\,\sin(\lambda\,x)$ να δειχθεί ότι ισχύει $y'' + \lambda^2\,y = 0\,.$

Άσκηση 19. Αν $e^y = \dfrac{1}{x+1}$ να δειχθεί ότι ισχύει $x\,y' + 1 = e^y$.

Άσκηση 20. Δίνεται η καμπύλη $x^3 + y^3 = 3\,x\,y$ στο επίπεδο. Να βρεθεί η παράγωγος της $y = f(x)$ ως μια έκφραση των x, y και η εφαπτομένη στο σημείο $M(3/2, 3/2)$.

Άσκηση 21. Να βρεθούν οι κλίσεις των εφαπτομένων της καμπύλης $y^2 - x + 1 = 0$ στα σημεία $M_1(2, -1)$ και $M_2(2, 1)$.

Άσκηση 22. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της $y = f(x)$ η οποία δίνεται στην πεπλεγμένη μορφή $4\,x^2 - 2\,y^2 = 9$ σε συνάρτηση των x, y.

6 Εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών - Κανόνες l' Hopitâl

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων συναρτήσεων στον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών ορίων. Όλες οι απροσδιόριστες μορφές μετατρέπονται στις απροσδιόριστες μορφές του τύπου $\frac{0}{0}$, ή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και ο υπολογισμός αυτών των μορφών αυτών γίνεται αντίστοιχα χρησιμοποιώντας δυο κανόνες που είναι γνωστοί ως κανόνες l' Hôpital.

Ο πρώτος κανόνας l' Hôpital αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\frac{0}{0}$.

Πρώτος Κανόνας l' Hôpital: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ και ότι $g(x) \neq 0$, και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.
Αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει, με τις ανάλογες προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Επιπλέον ο κανόνας ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Παράδειγμα 6.1. Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$. Στο $I = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\sin x \neq 0$ και $(\sin x)' = \cos x \neq 0$. Επίσης, $\lim_{x\to 0} e^x - 1 = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του πρώτου κανόνα l' Hôpital και υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0} e^x}{\lim_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = 1$.

Ο δεύτερος κανόνας l' Hôpital αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή του τύπου $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, ή ακριβέστερα, σε μια γενίκευσή της.

Δεύτερος Κανόνας l' Hôpital: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $I = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ και ότι $g(x) \neq 0$, και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$.
Αν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ο κανόνας ισχύει, με τις ανάλογες προσαρμογές, και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Επιπλέον ο κανόνας ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Στις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα l' Hôpital δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)$ ούτε ποιά ακριβώς είναι η τιμή του (αν υπάρχει). Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του Δεύτερου Κανόνα l' Hôpital, όπως διατυπώθηκε προηγουμένως.

Παράδειγμα 6.2. Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \qquad b > 0,\ a > 1$$

Θα αντιμετωπίσουμε πρώτα την περίπτωση $b = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = 0$, με $a > 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $a^x \neq 0$ και $(a^x)' = a^x \log a \neq 0$. Επιπλέον έχουμε $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Για τον λόγο των παραγώγων έχουμε ότι

$$\frac{x'}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \log a} \qquad \text{και έχουμε ότι} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \log a} = 0$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα l' Hôpital $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(a^x)} = 0$. Η γενική περίπτωση αντιμετωπίζεται με βάση την ειδική αφού

$$\frac{x^b}{a^x} = \frac{x^b}{(a^{1/b})^{x\,b}} = \left(\frac{x}{(a^{1/b})^x}\right)^b = \left(\frac{x}{\gamma^x}\right)^b$$

όπου θέσαμε $\gamma = a^{1/b} > 1$. Οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\gamma^x}\right)^b = 0^b = 0.$$

Παράδειγμα 6.3. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0 \qquad a>0,\ b>0$$

Θα αντιμετωπίσουμε πρώτα την περίπτωση $b = 1$, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^a} = 0$, με $a > 0$. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έχουμε $x^a \neq 0$ και $(x^a)' = a\,x^{a-1}\log a \neq 0$. Επιπλέον έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\log x = \lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Για τον λόγο των παραγώγων έχουμε

$$\frac{(\log x)'}{(a^x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{a\,x^{a-1}} = \frac{1}{a\,x^a} \qquad \text{και έχουμε ότι} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a\,x^a} = 0\,.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα l' Hôpital συμπεραίνουμε ότι $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{(a^x)} = 0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό έχουμε ότι για την γενική περίπτωση $b > 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log a)^b}{x^a} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log x}{x^{a/b}}\right)^b = 0^b = 0\,.$$

Παρατήρηση 6.4. *Το αντίστροφο των κανόνων l' Hôpital δεν ισχύει.* Δηλαδή είναι δυνατόν να έχουμε να υπολογίσουμε μια απροσδιόριστη μορφή ορίου και να μην υπάρχει το όριο των λόγων των παραγώγων, όμως το όριο του λόγου των συναρτήσεων που θέλουμε να υπολογίσουμε να υπάρχει!!

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$. Επειδή $x - \cos x > x - 1$ και $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(x-\cos x) = +\infty$. Επιπλέον, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{+\infty}{+\infty}$. Το όριο όμως υπολογίζεται εύκολα γιατί

$$\frac{x-\cos x}{x} = 1 - \frac{\cos x}{x} \quad \text{και} \quad \left|\frac{\cos x}{x}\right| < \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,+\infty)$$

κι επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, από γνωστή ιδιότητα των ορίων θα είναι και $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x} = 0$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x} = 1$.

Ας δοκιμάσουμε τώρα να εφαρμόσουμε τον Δεύτερο Κανόνα l' Hôpital. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{(x-cosx)'}{x'} = \frac{1+sinx}{1} = 1+\sin x$ και το όριο $\lim_{x\to+\infty}(1+\sin x)$ δεν υπάρχει γιατί δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}\sin x$.

Συνεπώς, υπάρχει περίπτωση το όριο της απροσδιόριστης μορφής που θέλουμε να υπολογίσουμε να υπάρχει και οι κανόνες l' Hôpital να μην μας βοηθούν στον υπολογισμό του ορίου.

Υπάρχουν κι άλλες απροσδιόριστες μορφές, όμως όλες τους μπορούν να αναχθούν στις απροσδιόριστες μορφές για τις οποίες μπορούν να εφαρμοσθούν οι δυο κανόνες l' Hôpital. Πιο συγκεκριμένα, Οι απροσδιόριστες μορφές ορίων είναι:

α) Για την πρόσθεση: $(+\infty)+(-\infty), \quad (-\infty)+(+\infty)$.

β) Για την αφαίρεση: $(+\infty)-(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty)$.

γ) Για τον πολλαπλασιασμό: $0\,(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\,0$.

δ) Για την διαίρεση: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{a}{0}$ με $a \neq 0$.

ε) Για δυνάμεις: $(+\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}$.

Όλες οι απροσδιόριστες μορφές, εκτός από την $\dfrac{a}{0}$ με $a \neq 0$, ανάγονται με κατάλληλους μετασχηματισμούς στις απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Πράγματι:

1. Έστω $\lim f(x) = 0$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)\,g(x) = 0\,(\pm\infty)$. Τότε
$$\lim f(x)\,g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \qquad \text{ή} \qquad \lim f(x)\,g(x) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

2. Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = -\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim(f(x)+g(x)) = (+\infty)+(-\infty)$. Τότε
$$\lim f(x)\,g(x) = \lim \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}\right) f(x)\,g(x) = 0\,(-\infty)$$
οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση (1) απροσδιόριστης μορφής.

3. Έστω $\lim f(x) = 0$, όπου $f(x) > 0$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = 0^0$. Τότε
$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = 0\,(-\infty)$$
οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

4. Έστω ότι $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = (+\infty)^0$. Τότε
$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = 0\,(+\infty)$$
οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

5. Έστω ότι $\lim f(x) = 1$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim f(x)^{g(x)} = 1^{\pm\infty}$. Τότε
$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\log f(x)^{g(x)}} = \lim e^{g(x)\,\log f(x)} \quad \text{και} \quad \lim g(x)\,\log f(x) = (\pm\infty)\,0$$
οπότε και πάλι αναγόμαστε στην περίπτωση (1).

6.1 Ασκήσεις

Άσκηση 1. Να εξακριβώσετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του πρώτου ή δεύτερου κανόνα l' Hôpital, και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} x\log x, \qquad b)\ \lim_{x\to 0^+} x^x, \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right),$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}, \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}, \qquad f)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4},$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right), \qquad h)\ \lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x, \qquad i)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{x}{x-1}},$$

Απ. $a)$ 0, $b)$ 1, $c)$ 0, $d)$ 0, $e)$ $\frac{1}{6}$, $f)$ $\frac{1}{4}$, $g)$ $\frac{1}{2}$, $h)$ 1, $i)$ e.

Άσκηση 2. Να εξακριβώσετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του πρώτου ή δεύτερου κανόνα l' Hôpital, και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x}, \qquad c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{(\log x)^2}{x},$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\tan x}, \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}, \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x}.$$

Απ. $a)$ 0, $b)$ 1, $c)$ 0, $d)$ 1, $e)$ $\frac{1}{3}$, $f)$ 2.

Άσκηση 3. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^4}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{1-\cos(4x)}, \qquad c)\ \lim_{x\to 1}\frac{5x^7-6x^6+x}{(x-1)^2}.$$

Απ. $a)$ $+\infty$, $b)$ δεν υπάρχει, $c)$ 15.

Άσκηση 4. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x+\log x}, \qquad c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\log(1+e^{2x})}{x}.$$

Απ. $a)$ $\log 2$, $b)$ $+\infty$, $c)$ 2.

Άσκηση 5. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

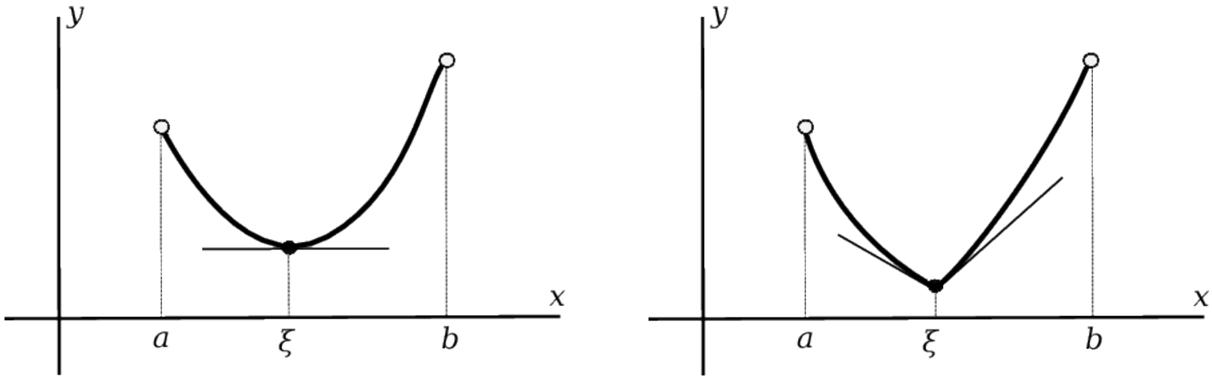
$$a)\ \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2 e^{2x}}, \qquad b)\ \lim_{x\to +\infty} x^{1/x}, \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\log\frac{1}{x}\right).$$

Απ. $a)$ $+\infty$, $b)$ 1, $c)$ $+\infty$.

7 Τέσσερα σημαντικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού

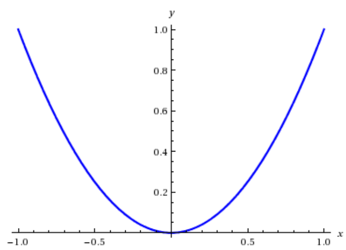
Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε τέσσερα σημαντικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού. Το πρώτο θεώρημα είναι το εξής.

Πρόταση 7.1. ***(Θεώρημα του Fermat)*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και έστω ξ σημείο στο (a, b). Αν το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$, τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ,
(ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της $y = f(x)$ στο ξ και ισχύει $f'(\xi) = 0$.

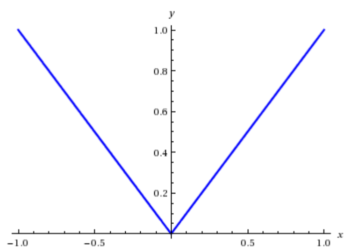


Σχήμα 22: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Fermat: Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το ξ και το ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$, τότε είτε υπάρχει εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και η κλίση της είναι ίση με 0 (παράλληλη στον άξονα των x), είτε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ (σχήμα δεξιά).

Παράδειγμα 7.2. Το $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = x^2$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, και η παράγωγος της συνάρτησης στο $x = 0$ είναι ίση με μηδέν, πράγματι, $(x^2)' = 2\,x|_{x=0} = 0$.



Παράδειγμα 7.3. Το $x = 0$ είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = |x|$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αλλά η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο $x = 0$.

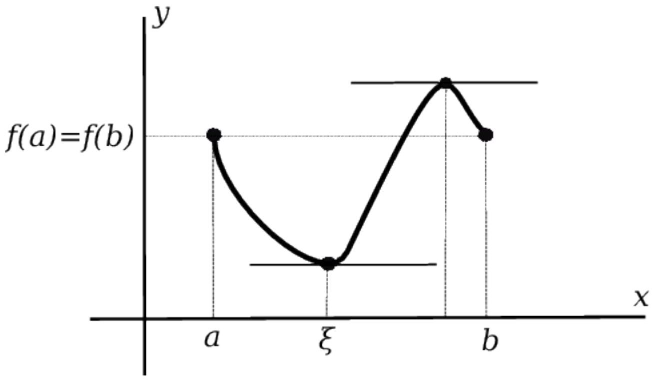


Το θεώρημα του Fermat έχει το εξής πόρισμα:

Υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου: Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα εξής σημεία:
(i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος,
(ii) τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και
(iii) τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0.
Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

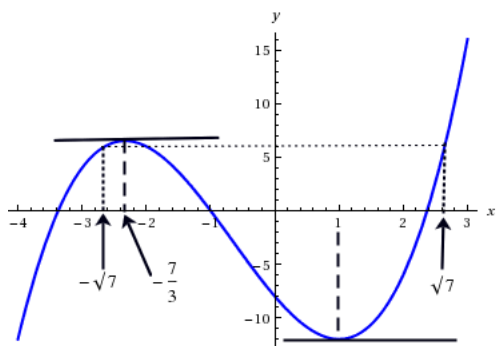
Το δεύτερο σημαντικό θεώρημα είναι το

Πρόταση 7.4. ***(Θεώρημα του Rolle)*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Αν είναι $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο $\xi \in (a, b)$ ώστε να είναι $f'(\xi) = 0$.*



Σχήμα 23: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle.

Παράδειγμα 7.5. Η $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 8$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ και έχει παράγωγο στο $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$ και οι τιμές της στα άκρα είναι $f(\sqrt{7}) = f(-\sqrt{7}) = 6$. Άρα υπάρχει κάποιο $\xi \in (-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, στο οποίο η παράγωγος $f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$ είναι ίση με μηδέν. Για να βρούμε το ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 7 = 0$. Οι λύσεις είναι οι $x = -\frac{7}{3}$, $x = 1$ που ανήκουν και οι δύο στο διάστημα $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$, αφού $-\sqrt{7} \approx -2.65 < -2.33 \approx -\frac{7}{3}$ και $1 < \sqrt{7} \approx 2.65$.



Παράδειγμα 7.6. Με την βοήθεια του θεωρήματος του Rolle θα δείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 + 6x + 1 = 0$ δεν μπορεί να έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και

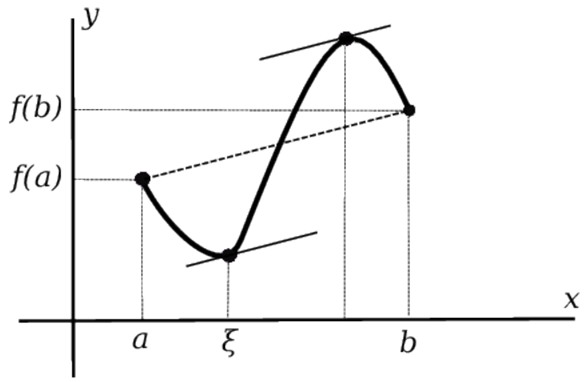
$[\rho_2, \rho_3]$ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x + 1$ είναι συνεχής και έχει παράγωγο στα διαστήματα (ρ_1, ρ_2) και (ρ_2, ρ_3) και είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και $f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$ αφού οι ρ_i είναι ρίζες της $f(x) = 0$. Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ έτσι ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

Όμως, $f'(x) = 3x^2 + 6$ και η εξίσωση $3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Άτοπο! και στο άτοπο φτάσαμε υποθέτοντας ότι η $f(x) = 0$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες, άρα δεν μπορεί να συμβαίνει αυτό.

Παράδειγμα 7.7. Με την βοήθεια του θεωρήματος του Rolle θα δείξουμε ότι η εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)$ την οποία όταν την παραγωγίσουμε μας δίνει την εξίσωση $6x^5 - 4x + 1$, δηλαδή $f(x) = x^6 - 2x^2 + x + c$. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και έχει παράγωγο στο $(0, 1)$ και $f(0) = f(1) = c$. Άρα από το θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα υπάρχει ένα $\xi \in (0, 1)$ που ικανοποιεί την εξίσωση $6x^5 - 4x + 1 = 0$.

Πρόταση 7.8. *Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange)* *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε*

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$



Σχήμα 24: Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής Lagrange: Ο αριθμός $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ είναι η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Οπότε το θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) έχει την γεωμετρική ερμηνεία ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ έχει την ίδια κλίση, δηλαδή είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange), αφού αν $f(a) = f(b)$ τότε από το θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συμπεραίνουμε ότι για κάποιον ξ στο (a, b) είναι $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Άρα το θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) συνεπάγεται το θεώρημα του Rolle. Από την άλλη το θεωρήματος Μέσης Τιμής (Lagrange) αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = (b-a)f(x) - (f(b)-f(a))x$ στο διάστημα $[a,b]$, οπότε τα δυο αυτά θεωρήματα είναι ισοδύναμα.

Παράδειγμα 7.9. Η $y = \sin x$ είναι συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. Άρα υπάρχει ξ στο $(0, \frac{\pi}{2})$ ώστε να είναι $\sin' \xi = \cos \xi = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$, ($\xi \approx 0.880689$).

Το τελευταίο σημαντικό θεώρημα είναι το

Πρόταση 7.10. ***Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy)*** *Έστω ότι οι $f(x)$ $g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο διάστημα (a,b), έτσι ώστε (i) να είναι $g(a) \neq g(b)$ και (ii) σε κανένα x του (a,b) να μην ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$. Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a,b) ώστε*

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής Cauchy αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = (g(a)-g(b))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$ στο διάστημα $[a,b]$. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange) είναι ειδική περίπτωση του Θεώρημα Μέσης Τιμής (Cauchy) παίρνοντας για $g(x) = x$. Προηγουμένως είδαμε ότι το θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange). Οπότε το συμπέρασμα είναι ότι τα τρία θεωρήματα Rolle-Lagrange-Cauchy είναι ισοδύναμα.

8 Ακρότατα και μονοτονία

Πρόταση 8.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

1. *Η $y = f(x)$ είναι σταθερή στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
2. *Η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
3. *Η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο να είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

Μια παραλλαγή της προηγούμενης πρότασης είναι η παρακάτω

Πρόταση 8.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

1. *Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο I.*
2. *Αν είναι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο I.*

Παρατήρηση 8.3. Στις προηγούμενες προτάσεις όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = +\infty$, και όμοια όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $f'(x) = -\infty$.

Παρατήρηση 8.4. Δεν ισχύουν τα αντίστροφα των 1., 2. της πρότασης (8.2). Δηλαδή αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που προκύπτει από το γεγονός ότι είναι αύξουσα δηλαδή ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του I. Ανάλογα ισχύουν, κι αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.
Για παράδειγμα η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά δεν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε σημείο στο $(-\infty, +\infty)$, αφού $(x^3)' = 3x^2$ και είναι > 0 για κάθε $x \neq 0$, αλλά είναι μηδέν για $x = 0$.

Παρατήρηση 8.5. Οι προηγούμενες προτάσεις ισχύουν σε διάστημα. Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ένωση κάποιων διαστημάτων τότε ενδέχεται τα συμπεράσματα να μην ισχύουν στις ενώσεις των διαστημάτων.
Για παράδειγμα: 1) η $f(x) = \frac{|x|}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι σταθερή στο $D(f)$. Είναι σταθερή -1 στο $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο $(0, +\infty)$.

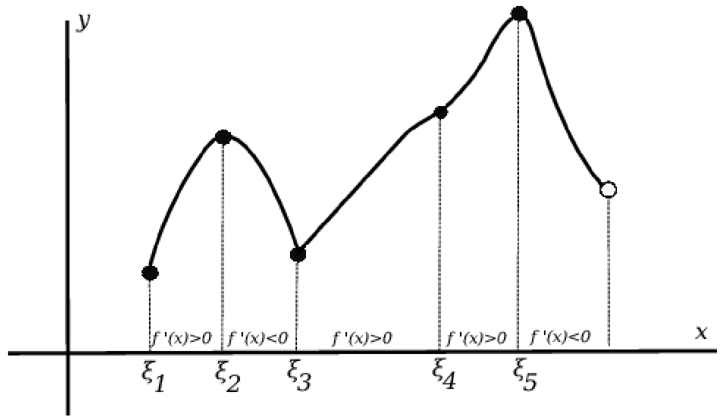
2) Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο $-\frac{1}{x^2} < 0$ στο πεδίο ορισμού της $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $D(f)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Υπάρχει ένας εύχρηστος τρόπος για να χαρακτηρίζουμε τα υποψήφια σημεία τοπικών ακροτάτων ξ_i μιας συνάρτησης $y = f(x)$ με βάση το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$ δεξιά κι αριστερά των ξ_i.

Πρόταση 8.6. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I και είναι συνεχής σε κάποιο υποδιάστημα $(a, b) \subset I$ και ο ξ ανήκει στο (a, b).*

1. *Αν είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε σημείο x στο (a, ξ) και $f'(x) \leq 0$ για κάθε σημείο x στο (ξ, b), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.*

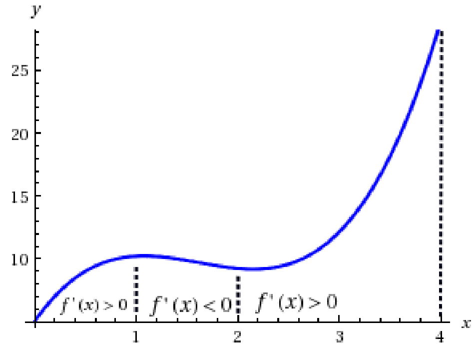
2. *Αν είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε σημείο x στο (a, ξ) και $f'(x) \geq 0$ για κάθε σημείο x στο (ξ, b), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.*



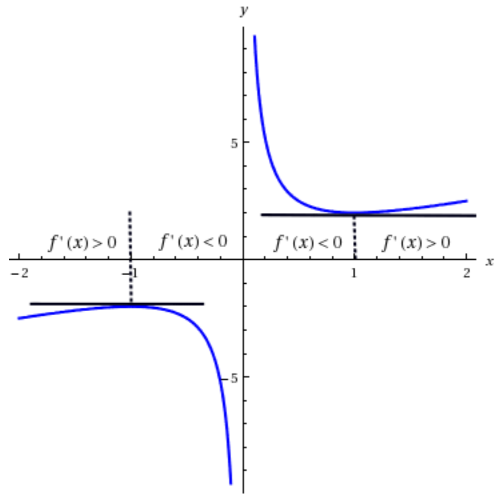
Σχήμα 25: Διαστήματα μονοτονίας και σημεία τοπικού ακροτάτου.

Χαρακτηρισμός υποψήφιων σημείων τοπικών ακροτάτων: Έστω ότι μας δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ σε κάποιο διάστημα (οποιουδήποτε τύπου) κι ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί όλα τα υποψήφια σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ τοπικού ακροτάτου (συμπεριλαμβανομένων και των πιθανών άκρων του διαστήματος) και η παράγωγος $f'(x)$ έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα ανοιχτά υποδιαστήματα που χωρίζονται από τα σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Τότε:
(i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου,
(ii) κάθε ξ_i που χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος είναι ετερόσημη είναι σημείο τοπικού ακροτάτου,
(iii) κάθε ξ_i που χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος είναι ομόσημη δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα 8.7. Η $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,4]$ και έχει παράγωγο $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ στο $(0,4)$. Η παράγωγος είναι θετική στο διάστημα $(0,1)$ και στο $(2,4)$, και είναι αρνητική στο διάστημα $(1,2)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και στο $[2,4]$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Συνεπώς τα $x = 0$ και $x = 2$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της $f(x)$ και τα σημεία $x = 1$ και $x = 4$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου.



Παράδειγμα 8.8. Η $f(x) = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Η παράγωγος είναι $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$ και είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$ και αρνητική στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1)$ και στο $(1,+\infty)$, και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0)$ και στο $(0,1]$. Συνεπώς το $x = -1$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $f(x)$ και το σημείο $x = 1$ και είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.



8.1 Ασκήσεις στις ενότητες 7 και 8

Άσκηση 1. Μπορεί η εξίσωση $x^3 - 12\,x = c$ να έχει δυο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2, 2]$; στο $(\infty, -2]$; στο $[2, +\infty)$;

Άσκηση 2. Θεωρούμε την συνάρτηση $y = 2 - \sqrt[5]{x^2}$ και παρατηρούμε ότι έχει την ίδια τιμή 1 για $x = 1$ και $x = -1$. Υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(-1, 1)$ στον οποίο να μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης;

Άσκηση 3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x\,sinx + \cos x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις. Να προσδιορίσετε την θέση των λύσεων σε σχέση με το $x = 0$.

Άσκηση 4. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x = 1$; Η εξίσωση $e^x = 1 + x$;

Άσκηση 5. Να αποδειχτεί ότι: (i) $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (ii) $\log x \leq x - 1$ για κάθε x θετικό πραγματικό. (iii) $(1 + x)^a > 1 + a\,x$, αν $x > 0$ και $a > 1$.

Άσκηση 6. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα μέσης τιμής (Lagrange) να δειχθεί ότι

$$n\,b^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < n\,a^{n-1}$$

όπου a, b θετικοί πραγματικοί με $b < a$ και n φυσικός $n > 1$.

Άσκηση 7. Να αποδειχθεί ότι $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.

Άσκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + x + 1 & \text{με} \quad x \geq 1 \\ 2\,a\,x + 1 & \text{με} \quad x < 1 \end{cases}$$

Για ποιές τιμές του πραγματικού a η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$;

Άσκηση 9. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικών ακροτάτων στο πεδίο ορισμού καθεμιάς απο τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$i) \quad y = (x - 1)\,\sqrt[3]{x^2}\,, \qquad (ii) \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x + 4}\,, \qquad (iii) \quad y = x^2\,e^{-x}\,.$$

Άσκηση 10. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα

$$(i) \quad y = (x - 1)\,|x| \text{ στο } [-1, 3] \quad (ii) \quad y = x + \frac{1}{x} \text{ στο } \left[\frac{1}{3}, 3\right] \quad (iii) \quad y = e^x\,\sin x \text{ στο } [0, 2\,\pi]\,.$$

Άσκηση 11. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $y = \frac{x^2-75}{x-10}$ στο διάστημα $[0, 10)$. Ποιά είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό;

Άσκηση 12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$. Να δειχθεί ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $(-\infty, +\infty)$ αν και μόνο αν $a^2 \leq 3\,b$.

Άσκηση 13. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $2\,a$, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Άσκηση 14. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό k^2, το τετράγωγο έχει την ελάχιστη περίμετρο.

Άσκηση 15. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου παραλληλογράμμου μέγιστου εμβαδού, που δυο πλευρές του να βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες ορθογωνίου συστήματος και μια από τις κορυφές του πάνω στην ευθεία $x + y = 2$.

Άσκηση 16. Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ισοσκελή τρίγωνα σταθερής περιμέτρου a, το ισόπλευρο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

9 Δεύτερη παράγωγος κι εφαρμογές

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει τον x_0 και ότι η $f'(x)$ η οποία ορίζεται στο διάστημα αυτό έχει με την σειρά της παράγωγο στο x_0, δηλαδή υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$. Τότε το όριο αυτό ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της $y = f(x)$ και συμβολίζεται ως εξής

$$f''(x) \quad \text{ή} \quad \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x_0} \qquad \text{ή} \qquad \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

9.1 Τοπικά ακρότατα

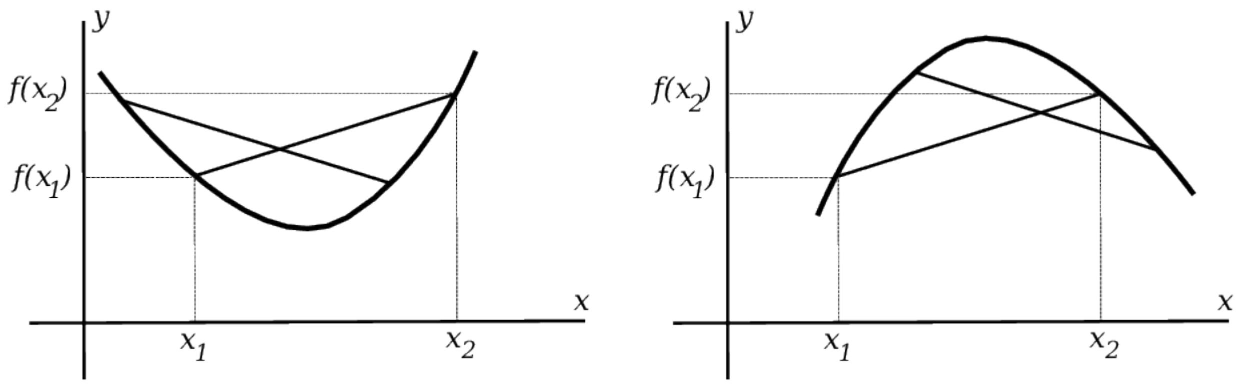
Κριτήριο δεύτερης παραγώγου: Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει πρώτη παράγωγο στο διάστημα (a, b), ο x_0 ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον x_0. Τότε:

(1) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) > 0$, τότε ο x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.

(2) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x) < 0$, τότε ο x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

9.2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται ως **κυρτή στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Ομοίως, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται ως **κοίλη στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$.



Σχήμα 26: Κυρτή συνάρτηση (αριστερά) και κοίλη συνάρτηση (δεξιά).

Αυστηρά οι έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας διατυπώνονται ως εξής:
α) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

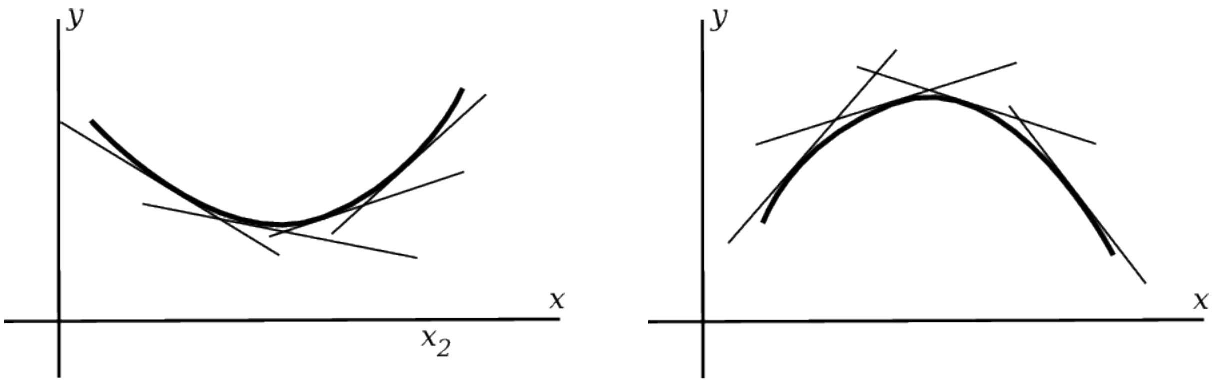
β) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f((1-t)\,x_1 + t\,x_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Με τις παρακάτω προτάσεις μπορούμε να χαρακτηρίζουμε πότε μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα I.

Πρόταση 9.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι αύξουσα στο εσωτερικό του I
2) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του I.

Η προηγούμενη πρόταση έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο σε κάθε σημείο σε ένα διάστημα I και ας συμβολίσουμε με $\hbar_x$ την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x, f(x))$. Η κλίση της $\hbar_x$ είναι ίση με $f'(x)$.Η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν καθώς το x αυξάνεται η κάθε εφαπτόμενη ευθεία περιστρέφεται με φορά αντίθετη από την φορά των δεικτών του ρολογιού. Ανάλογα, η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν καθώς το x αυξάνεται η κάθε εφαπτόμενη ευθεία περιστρέφεται με ίδια με την φορά των δεικτών του ρολογιού.



Σχήμα 27: Αύξουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κυρτή συνάρτηση (αριστερά). Φθίνουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κοίλη συνάρτηση (δεξιά).

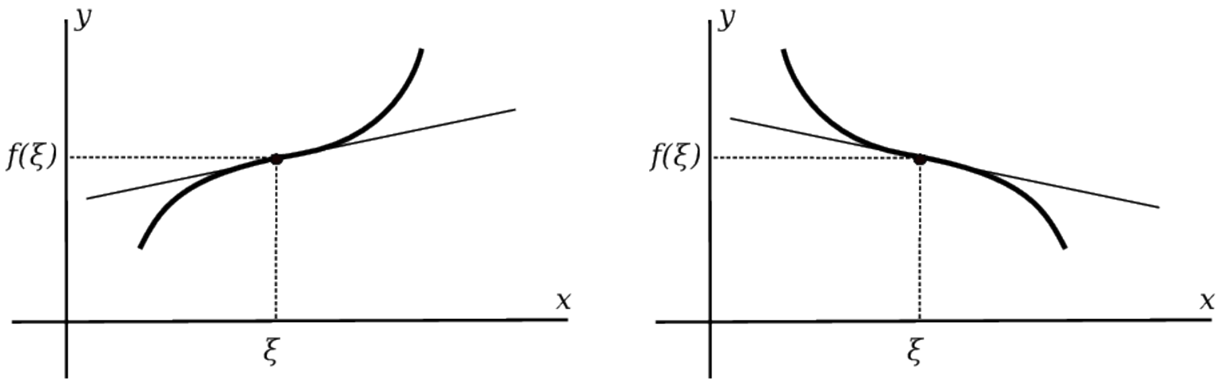
Μια παραλλαγή της προηγούμενης πρότασης είναι η ακόλουθη

Πρόταση 9.2. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*

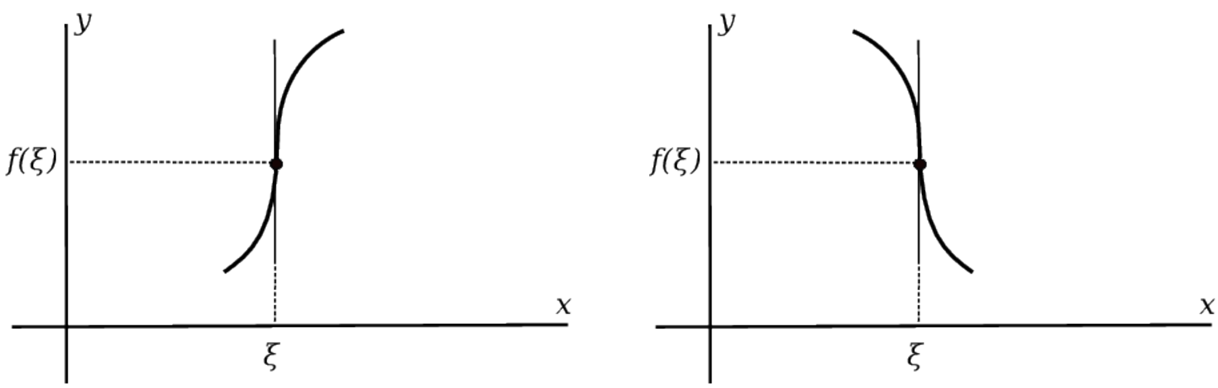
1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I.
2) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του I.

9.3 Σημεία καμπής

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ότι ο ξ ανήκει στο (a, b). Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Ο ξ είναι **σημείο καμπής** της $y = f(x)$ αν το μέρος του γραφήματος που είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ και δεξιά του και το μέρος γραφήματος που είναι κοντά στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ κι αριστερά του είναι στα ίδια ημιεπίπεδα που ορίζει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα στο $(\xi, f(\xi))$. Επίσης, και συμβαίνει το ίδιο και η παράγωγο $f'(\xi)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$ θα λέμε και πάλι ότι το ξ είναι **σημείο καμπής** της $y = f(x)$. Με



Σχήμα 28: Σημείο καμπής όταν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός.



Σχήμα 29: Σημείο καμπής όταν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

τις παρακάτω προτάσεις έχουμε διάφορα κριτήρια για να αποφασίζουμε αν ο ξ είναι σημείο καμπής της $y = f(x)$.

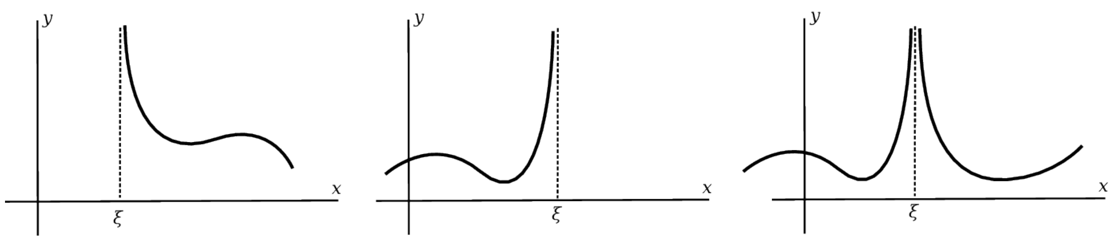
Πρόταση 9.3. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα $(c, \xi]$ και κοίλη σε κάποιο διάστημα (ξ, d) ή αντίθετα, αν είναι κοίλη σε κάποιο διάστημα $(c, \xi]$ και κυρτή σε κάποιο διάστημα (ξ, d), τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $y = f(x)$.*

Πρόταση 9.4. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (c, ξ) και $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (ξ, d) ή αντίθετα, αν είναι $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (c, ξ) και $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (ξ, d), τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης $y = f(x)$.*

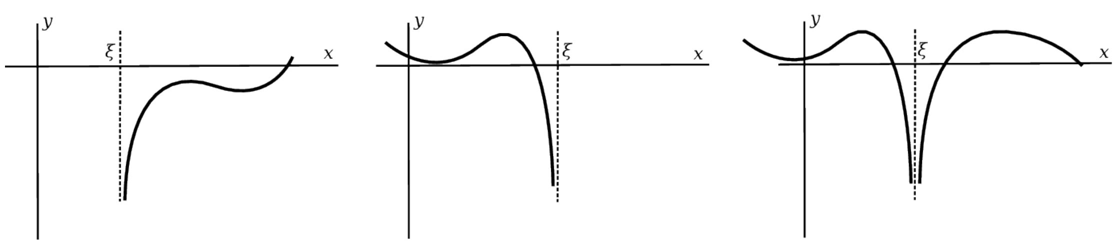
Παράδειγμα 9.5. Η $f(x) = x^3$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6x$. Επειδή είναι $f''(x) \leq 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f''(x) \geq 0$ στο $(0, +\infty)$, ο $x = 0$ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

9.4 Ασύμπτωτες

Ορισμός 9.6. Η ευθεία $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της $y = f(x)$ σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις περιπτώσεις $\lim_{x \to \xi^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.



Σχήμα 30: $\lim_{x \to \xi^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \xi^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \xi} f(x) = +\infty$ κατακόρυφη ασύμπτωτος στο $+\infty$.



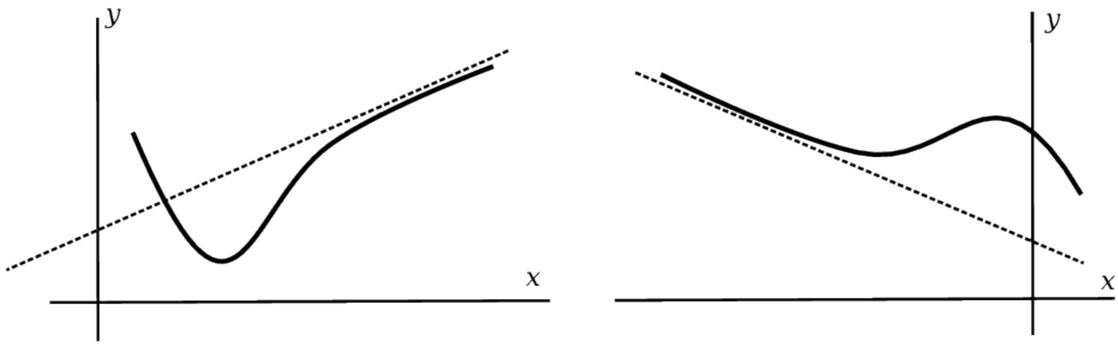
Σχήμα 31: $\lim_{x \to \xi^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \xi^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty$ κατακόρυφη ασύμπτωτος στο $-\infty$.

Ορισμός 9.7. Μια ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται ως **(πλάγια) ασύμπτωτη στο** $+\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - \mu x - \nu\Big) = 0$$

Ορισμός 9.8. Μια ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ χαρακτηρίζεται ως **(πλάγια) ασύμπτωτη στο** $-\infty$ του γραφήματος της $y = f(x)$ αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(-\infty, b)$ και

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - \mu x - \nu\Big) = 0$$



Σχήμα 32: Πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο $+\infty$ (αριστερά) και στο $-\infty$ (δεξιά). Το γράφημα της $y = f(x)$ προσεγγίζει την ευθεία ℓ κοντά στο $+\infty$ $(-\infty)$.

Τρόπος εύρεσης πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας: Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ (αντίστοιχα $(-\infty, b)$). Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \mu \in \mathbb{R} \qquad \Big(\text{αντίστοιχα} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \mu \in \mathbb{R}\Big)$$

και στην συνέχεια για τον συγκεκριμένο αριθμό $\mu \in \mathbb{R}$, το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - \mu x\Big) = \nu \in \mathbb{R} \qquad \Big(\text{αντίστοιχα} \qquad \lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - \mu x\Big) = \nu \in \mathbb{R}\Big)$$

τότε η ευθεία ℓ με εξίσωση $y = \mu x + \nu$ είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ (αντίστοιχα στο $-\infty$) στο γράφημα της $y = f(x)$.

Η **οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία** στο γράφημα της $y = f(x)$ είναι μια ειδική περίπτωση πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας. Πράγματι, μια οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία είναι μια πλάγια ασύμπτωτη ευθεία με κλίση ίση με 0, ή ισοδύναμα $\mu = 0$, και $\nu \neq 0$, $\nu \in \mathbb{R}$.