

Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι

Διδάσκων: Α. Τόγκας

Θέματα

(Δικαιολογείστε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας)

Θέμα 1 (1.6 μον.) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου κατανομής να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$(i) \quad (x H(x))' = H(x), \quad (ii) \quad x^2 \sin x \delta''(x) = 0,$$

όπου $H(x)$ η κατανομή Heaviside και $\delta(x)$ η κατανομή Dirac με πόλο στο 0.

Θέμα 2 (2 μον.) Δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)

$$u''(x) - u'(x) = e^x, \quad u'(0) - u(1) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

(α) Να κατασκευασθεί η συνάρτηση Green του παραπάνω ΠΣΤ.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Green που βρήκατε να λυθεί το παραπάνω ΠΣΤ.

Θέμα 3 (1.6 μον.) Δίνεται το συναρτησιακό

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx.$$

(α) Να βρεθούν τα ακρότατα του J τα οποία ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$.

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση Hamilton που αντιστοιχεί στην συνάρτηση Lagrange $L(x, y, y') = y'^2 - y^2$ και να διατυπωθούν οι εξισώσεις Hamilton.

Θέμα 4 (1.6 μον.) Δίνονται τα συναρτησιακά

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx, \quad I(y) = \int_0^1 x y dx.$$

Να βρεθούν τα ακρότατα του J με τον ισοπεριμετρικό περιορισμό $I = 1/2$ και τις συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(1) = 0$.

Θέμα 5 (1.6 μον.) Κάνοντας χρήση της θεωρίας των κανονικών διαταραχών να βρεθεί μια προσεγγιστική λύση διαταραχών με τρεις όρους για το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)

$$y''(x) - 2\varepsilon y'(x) + 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Θέμα 6 (1.6 μον.) Δίνεται το ακόλουθο ΠΣΤ

$$\varepsilon y''(x) + 2y'(x) + y(x)^3 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Υποθέτοντας ότι υπάρχει οριακό στρώμα μόνο κοντά στο $x = 0$, και κάνοντας χρήση της θεωρίας των ιδιόμορφων διαταραχών να βρεθούν οι κύριοι όροι τάξης μεγέθους στην εξωτερική και εσωτερική προσεγγιστική λύση καθώς και να επιτευχθεί συναρμογή των δυο αυτών προσεγγιστικών λύσεων.