

1. Η έννοια του χώρου

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας είναι μια φυσική θεωρία, με την ακόλουθη διπλή έννοια. Αποτελεί, πρώτ' απ' όλα μιαν εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο κινούνται και αλληλεπιδρούν τα φυσικά αντικείμενα, δηλαδή τα στοιχεία του υλικού κόσμου ή της φύσης. Από την άλλη, είναι μια εικόνα για τον υλικό κόσμο από εκείνες που κατασκευάζει η επιστήμη της Φυσικής, σε αντιδιαστολή προς την εικόνα για τον ίδιο κόσμο που δίνει γ.π. οποιαδήποτε από τις γνωστές θρησκείες.

Αυτό σημαίνει ότι η Θεωρία της Σχετικότητας συγκροτείται από φυσικές έννοιες, όπως εκείνες της ταχύτητας, της ενέργειας, της δύναμης και άλλων παρόμοιων, αλλά πρώτα και κύρια από τις έννοιες του χώρου και του χρόνου. Όλες αυτές οι έννοιες είναι δισυπόστατες. Από τη μια μεριά, είναι έννοιες που διαμορφώνονται στη βάση της άμεσης εμπειρίας του ανθρώπου από τη ζωή και τη δράση του στο φυσικό περιβάλλον που του έλαχε να αναπτυχθεί ως βιολογικό είδος. Από την άλλη, οι έννοιες της φυσικής έχουν μια μαθηματική έκφραση ή διατύπωση και άρα είναι μαθηματικά αντικείμενα συγκεκριμένου είδους.

Αυτός ο διπλός χαρακτήρας των φυσικών εννοιών έχει τις ακόλουθες, ανάμεσα σε άλλες, συνέπειες. Για να παρουσιαστούν και να γίνουν κατανοητές απαιτούν τη συνοδεία των Μαθηματικών. Δεύτερο, η μαθηματική τους έκφραση αλλάζει με την πάροδο του (ιστορικού) χρόνου. Συνακόλουθα, αυτό που ονομάζουμε χρόνο ή ενέργεια κ.λ.π. μπορεί να έχει διαφορετική σημασία σε μια νεότερη φυσική θεωρία απ' ότι σε μια παλιότερη.

Οι τελευταίες παρατηρήσεις ισχύουν αναγκαστικά και για την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας. Γι' αυτό, η συζήτησή μας θα ξεκινήσει με την υπενθύμιση κάποιων μαθηματικών εννοιών που συνδέονται άμεσα με τις θεμελιακές φυσικές έννοιες του χώρου, του χρόνου και της κίνησης των σωμάτων. Με αυτό τον τρόπο θα εξοικειωθούμε και με το συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί συστηματικά στα επόμενα κεφάλαια.

1.1 Σύνολα

Η καθιερωμένη αντίληψη είναι ότι ο (φυσικός) κόσμος απαρτίζεται από ξεχωριστά κομμάτια που ονομάζουμε (φυσικά) *αντικείμενα*. Μία πέτρα, ένα δέντρο, ένας άνθρωπος, η γη, ο ήλιος και τ' άλλα αστέρια είναι παραδείγματα της έννοιας του (φυσικού) αντικείμενου.

Συχνά, διάφορα αντικείμενα τα βάζουμε με το νου μας να αποτελούν μια παρέα ή ομάδα. Μια τέτοια ομάδα την ονομάζουμε *σύνολο* και τα αντικείμενα που την απαρτίζουν *στοιχεία του συνόλου*.

Παραδείγματα: Οι καρέκλες του δωματίου όπου βρίσκεστε αυτή τη στιγμή. Τα βιλία της βιβλιοθήκης σας. Οι επιβάτες ενός αυτοκίνητου, πλοίου ή αεροπλάνου. Οι κάτοικοι μιας χώρας.

Ωστόσο, ακριβώς επειδή πρόκειται για το αποτέλεσμα μιας νοητικής ενέργειας, ένα σύνολο δεν απαρτίζεται αναγκαστικά από ομοειδή αντικείμενα. Έτσι, μπορούμε να μιλήσουμε για το σύνολο των τροφίμων που περιέχει αυτή τη στιγμή το ψυγείο μας. Μπορούμε επίσης να μιλήσουμε για το σύνολο των αντικειμένων που περιέχει το διαμέρισμα ή το σπίτι μας, από τις καρέκλες μέχρι την οδοντόβουρτσά μας. Τέλος, αν διαθέτουμε τη φαντασία ενός Σαίξπηρ (Shakespeare), μπορούμε να φτιάξουμε ένα σύνολο με στοιχεία ... έναν βασιλιά, έναν ψαρά κι ένα σκουλίκι.

Επιπλέον, τα ίδια τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι παράγωγα της σκέψης μας, δηλαδή έννοιες που να έχουν ή και να μην έχουν σχέση με τον φυσικό κόσμο. Αντίστοιχα παραδείγματα: Το σύνολο που αποτελείται από τους αριθμούς ένα μέχρι δώδεκα και το σύνολο που αποτελείται από τους δώδεκα θεούς του Ολύμπου.

Ορισμένα σύνολα είναι εύκολο να τα περιγράψουμε σε γραπτή μορφή. Ας πούμε γ.π. ότι θέλουμε να θεωρήσουμε τα ψηφία 3, 6 και 9 ως σύνολο. Αυτό έχει καθιερωθεί να το δηλώνουμε γράφοντας $\{3,6,9\}$. Ανάλογα, η έκφραση $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ σημαίνει ότι αποφασίσαμε να θεωρήσουμε τα γράμματα α, β και γ ως ένα σύνολο. Η σειρά με την οποία γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου μέσα στα άγκιστρα δεν έχει καμία σημασία. Με άλλα λόγια, οι εκφράσεις $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $\{\beta, \gamma, \alpha\}$ δηλώνουν το ίδιο ακριβώς σύνολο.

Αφού προσδιορίσουμε το σύνολο που μας ενδιαφέρει, μπορούμε να ανεφόμαστε σ' αυτό με μια λέξη, ένα γράμμα, ή όποιο άλλο σύμβολο βρίσκουμε βολικό. Για παράδειγμα, στο σύνολο των ανθρώπων αναφερόμαστε με τη λέξη *ανθρωπότητα*. Το σύνολο που περιέχει όλα ανεξαιρέτως τα φυσικά αντικείμενα το λέμε *σύμπαν*. Το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ μπορούμε να το ονομάσουμε A . Τότε γράφουμε $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και το γεγονός ότι το γράμμα β είναι ένα από τα στοιχεία του το δηλώνουμε με την έκφραση $\beta \in A$.

Μια έκφραση που θα χρησιμοποιήσουμε πολύ συχνά στα επόμενα είναι η $x \in A$, όπου το A συμβολίζει κάποιο γνωστό σύνολο. Με αυτή την έκφραση θα δηλώνουμε ότι το x παριστάνει κάποιο από τα στοιχεία του A , χωρίς να μας ενδιαφέρει για το ποιο ακριβώς στοιχείο πρόκειται. Ισοδύναμα, η έκφραση $x \in A$ σημαίνει ότι το x συμβολίζει το τυχαίο στοιχείο του συνόλου A . Σ' αυτή την περίπτωση το x ονομάζεται *μεταβλητή*. Αν γ.π. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, τότε η έκφραση $x \in A$ σημαίνει είτε ότι $x = \alpha$, είτε ότι $x = \beta$, είτε ότι $x = \gamma$ - όποια από τις τρεις εκδοχές μας αρέσει!

Το σύνολο $B = \{\alpha, \gamma\}$ περιέχει μόνο στοιχεία που βρίσκουμε και στο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το B είναι *υποσύνολο* του A και γράφουμε $B \subset A$. Σε κάθε περίπτωση, $A \subset A$. Επειδή το $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ περιέχει όλα ανεξαιρέτως τα στοιχεία του $B = \{\alpha, \gamma\}$ αλλά και κάποιο διαφορετικό απ' αυτά, λέμε ότι το B είναι *γνήσιο υποσύνολο* του A .

Τα κοινά στοιχεία δύο συνόλων A, B απαρτίζουν το σύνολο που ονομάζουμε *τομή* των A και B και το συμβολίζουμε με $A \cap B$. Αν γ.π. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, και $B = \{\beta, \gamma, \delta\}$, τότε $A \cap B = \{\beta, \gamma\}$. Στην περίπτωση όπου $A = \{\rho, \sigma\}$ και $B = \{\tau, \upsilon\}$, η τομή $A \cap B$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Ισοδύναμα, λέμε ότι το σύνολο $A \cap B$ είναι κενό. Το *κενό σύνολο* συμβολίζεται με $\{ \}$ ή με \emptyset .

Άρα στην περίπτωση που τα A, B δεν έχουν κοινό στοιχείο γράφουμε $A \cap B = \emptyset$. Τότε λέμε ότι τα A, B είναι *ξένα μεταξύ τους*.

Με τον όρο *ένωση* των συνόλων A, B εννοούμε το σύνολο που περιέχει τόσο τα στοιχεία του A όσο κι εκείνα του B . Η ένωση των A, B συμβολίζεται με $A \cup B$. Έτσι, αν $A = \{\rho, \sigma\}$ και $B = \{\tau, \upsilon\}$, τότε $A \cup B = \{\rho, \sigma, \tau, \upsilon\}$. Αν πάλι $A = \{\rho, 2\}$ και $B = \{\#, \Phi\}$, τότε $A \cup B = \{\rho, 2, \#, \Phi\}$.

1.2 Αριθμοί

Αφού ξεχωρίσουμε τον κόσμο σε φυσικά αντικείμενα, προχωράμε στο να βρούμε σχέσεις ανάμεσα τους. Η πρώτη σχέση αφορά συγκεκριμένα υποσύνολα του φυσικού κόσμου και διατυπώνεται με την έννοια των αριθμών. Έτσι, καταλήγουμε να πιστεύουμε ότι υπάρχει κάτι κοινό ανάμεσα στα μάτια όλων των ανθρώπων και αυτό το κοινό το αποδίδουμε λέγοντας πως τα μάτια κάθε ανθρώπου είναι δύο. Το ίδιο ισχύει και με τα χέρια και τα πόδια μας. Αυτή η διαπίστωση περιγράφεται και με το ότι μπορούμε να σκεφτούμε μian αντιστοιχία ανάμεσα στα χέρια και τα μάτια μας. Δηλαδή, συνδέουμε με το νου μας ένα μάτι με ένα χέρι. Στο πλαίσιο αυτής της νοητικής πράξης καθένα, από τα στοιχεία του ενός συνόλου αντιστοιχείται σε ένα μόνο στοιχείο του άλλου και κανένα στοιχείο δεν μένει χωρίς το ταίρι του.

Επειδή, όπως τονίσαμε, τα στοιχεία ενός συνόλου δεν είναι αναγκαστικά ομοειδή, η έννοια του αριθμού είναι τόσο γενική που δηλώνει ότι υπάρχει κάτι κοινό ακόμα και ανάμεσα στο σύνολο των χεριών μας από τη μια μεριά και στο σύνολο που αποτελείται από μία πέτρα και ένα μήλο από την άλλη. Είναι και πάλι ο αριθμός δύο. Υπάρχει, επίσης, κάτι κοινό ανάμεσα στα σύνολα $\{3, 6, 9\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $\{\#, \Phi, \eta\}$ που εκφράζεται από τον αριθμό τρία. Μια ένα-προς-ένα (1-1) αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία αυτών των συνόλων - αντιστοιχία που πιστοποιεί την ισοδυναμία τους - είναι εύκολο να κατασκευαστεί:

$$3 \longleftrightarrow \alpha \longleftrightarrow \#, \quad 6 \longleftrightarrow \beta \longleftrightarrow \Phi, \quad 9 \longleftrightarrow \gamma \longleftrightarrow \eta.$$

Υπάρχουν και πολλοί άλλοι τρόποι για την κατασκευή μιας 1-1 αντιστοιχίας ανάμεσα στα στοιχεία των πιο πάνω συνόλων, όπως ο

$$9 \longleftrightarrow \beta \longleftrightarrow \#, \quad 6 \longleftrightarrow \alpha \longleftrightarrow \eta, \quad 3 \longleftrightarrow \gamma \longleftrightarrow \Phi.$$

Αντίθετα, είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε μian 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα σύνολα $\{\kappa, \lambda\}$ και $\{\#, \Phi, \eta\}$. Όποιο συνδυασμό κι αν σκεφτούμε, ένα από τα στοιχεία του δεύτερου συνόλου θα μένει χωρίς ταίρι - θα περισσεύει. Λέμε, λοιπόν, ότι το σύνολο $\{\#, \Phi, \eta\}$ έχει περισσότερα στοιχεία από το $\{\kappa, \lambda\}$. Ανάλογα, το σύνολο $\{\#, \Phi, \eta, *\}$, που ανήκει στην κατηγορία των συνόλων που χαρακτηρίζονται από τον αριθμό τέσσερα, έχει ένα στοιχείο παραπάνω από το $\{\#, \Phi, \eta\}$.

Γενικά, μπορούμε να σκεφτούμε σύνολα φυσικών αντικειμένων που έχουν όλο και περισσότερα στοιχεία. Από το σύνολο των καθισμάτων του σπιτιού μας ως το σύνολο των καθισμάτων ενός μεγάλου στάδιου. Από το σύνολο των φυτών της βεράντας μας ως το σύνολο των δέντρων του Μαύρου Δάσους. Από το σύνολο των κατοίκων της Ελλάδας ως το σύνολο του πληθυσμού της γης και των σύνολο των αστεριών ενός γαλαξία. Για όλα αυτά τα σύνολα υπάρχει ο αντίστοιχος αριθμός που εκφράζεται από μια από τις λέξεις {ένα, δύο, τρία, τέσσερα, ..., δεκατέσσερα, ..., εκατό τέσσερα, ..., ένα εκατομμύριο, ..., ένα δισεκατομμύριο, ...}.

Όλα τα παραπάνω σύνολα φυσικών αντικειμένων, αλλά και παρόμοια σύνολα που απαρτίζονται από σύμβολα, ανήκουν στην **κατηγορία των πεπερασμένων συνόλων**. Το βασικό χαρακτηριστικό ενός πεπερασμένου συνόλου A είναι τούτο: Είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα στοιχεία του και τα στοιχεία ενός γνήσιου υποσύνολου του.

Όπως τονίσαμε επανειλημμένα, η κατασκευή συνόλων είναι μια καθαρά νοητική ενέργεια. Και οι νοητικές ενέργειες δε γνωρίζουν φραγμούς. Μπορεί να είναι ατέρμονες. Έτσι, όποιο σύνολο και αν σκεφτούμε αρχικά, μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε με το μυαλό μας ένα δεύτερο σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του πρώτου κι ακόμα ένα - μια τελεία, ας πούμε. Αν λοιπόν το αρχικό σύνολο χαρακτηριζόταν από τον αριθμό με το όνομα μ , στο καινούργιο σύνολο θα πρέπει να αποδοθεί ένας άλλος αριθμός με το όνομα, ας πούμε ν . Γίνεται έτσι φανερό ότι το σύνολο των αριθμών που χρησιμοποιούμε για να χαρακτηρίσουμε τα πεπερασμένα σύνολα αποκτάει όλο και περισσότερα μέλη, για να γίνει τελικά άπειρο. Μιλάμε, προφανώς, για **το σύνολο των φυσικών αριθμών**, \mathbb{N} .

Το σύνολο, λοιπόν, \mathbb{N} αποτελείται από καθαρά νοητικά αντικείμενα. Τέτοιου είδους σύνολα θα κάνουν συχνά την εμφάνισή τους στη συνέχεια. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το Ευκλείδειο επίπεδο και άλλες γεωμετρικές κατασκευές, οι συναρτήσεις κ.λ.π. Γι' αυτό, σπεύδουμε να επισημάνουμε το ακόλουθο πρόβλημα. Πολλές φορές τα στοιχεία των πιο πάνω συνόλων συγχέονται με τα σύμβολα που έχει καθιερωθεί να χρησιμοποιούνται για την παράστασή τους. Για παράδειγμα, τα ψηφία 1, 2, 3, κ.λπ. χρησιμοποιούνται ως σύμβολα των στοιχείων ένα, δύο, τρία κ.λπ. του συνόλου \mathbb{N} . Θα πρέπει να διακρίνουμε συστηματικά τα (υλικά ή νοητικά) αντικείμενα στα οποία αναφερόμαστε κάθε φορά από τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε ως αντιπροσώπους τους. Διαφορετικά, κινδυνεύουμε να βγάζουμε λάθος συμπεράσματα.

Θα μπορούσε γ.π. κάποιος μας ρωτήσει αν το V είναι ένας από τους φυσικούς αριθμούς κι εμείς να απαντήσουμε όχι. Αντίθετα, να βεβαιώσουμε αμέσως τον συνομιλητή μας ότι το 5 είναι φυσικός αριθμός. Στην πραγματικότητα, τόσο το 5 όσο και το V και είναι και δεν είναι αριθμοί. Γιατί είναι απλώς σύμβολα, κι ενώ σε ένα κάποιο σύστημα συμβολισμού των αριθμών το 5 δηλώνει τον αριθμό πέντε, σ' ένα άλλο σύστημα ο ίδιος αριθμός δηλώνεται με το V .

Με φυσικό τρόπο οδηγούμαστε στις έννοιες της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**. Αν η παρέα μας που πήγε για φαγητό είναι μεγάλη, τότε μετακινούμε μερικές καρέκλες από ένα διπλανό τραπέζι του εστιατορίου, ώστε να υπάρχει 1-1 αντιστοιχία των μελών της παρέας με τις καρέκλες που θα βρίσκονται γύρω από το τραπέζι μας. Όσες καρέκλες προσθέτουμε στο δικό μας τραπέζι τόσες αφαιρούμε από το διπλανό.

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των φυσικών αριθμών x, y λέγεται **άθροισμα** και συμβολίζεται με $x + y$. Ο αριθμός x λέγεται μεγαλύτερος του y αν υπάρχει ένας τρίτος αριθμός $\alpha \in \mathbb{N}$, τέτοιος που $x = y + \alpha$. Τότε ο α γράφεται σαν $x - y$ και λέγεται **διαφορά** του y από τον x .

Η πρόσθεση του x στον εαυτό του α φορές λέγεται **πολλαπλασιασμός**. Το αποτέλεσμα αυτής της πράξης είναι το **γινόμενο** των α, x που συμβολίζεται με αx . Όταν $x, y, z \in \mathbb{N}$ και $z = xy$, τότε λέμε ότι ο αριθμός z **διαιρείται** με τον x , με αποτέλεσμα το **πηλίκιο** x , που γράφεται σαν $x = z/y$. Λέμε επίσης ότι ο αριθμός z διαιρείται με τον y , με αποτέλεσμα το πηλίκιο $y = z/x$.

Εύκολα διευρύνουμε τους φυσικούς αριθμούς με τρόπο ώστε να έχει νόημα και η αφαίρεση ενός φυσικού αριθμού, x , από κάποιον άλλον, y , που είναι μικρότερος ή ίσος με αυτόν. Αν $x = y + \alpha$, τότε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης $y - x$ είναι ένας **αρνητικός αριθμός** που συμβολίζεται με $-\alpha$. Στην περίπτωση που $x = y$, η διαφορά τους είναι ο αριθμός **μηδέν** που συμβολίζεται με το ψηφίο 0. Το διευρυμένο σύνολο που προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία λέγεται **σύνολο των ακεραίων αριθμών** και συμβολίζεται με \mathbb{Z} .

Η παραπέρα διεύρυνση οδηγεί στο **σύνολο των ρητών αριθμών**, \mathbb{Q} . Αυτή η διεύρυνση δίνει νόημα στη διαίρεση οποιωνδήποτε δύο ακεραίων, με την προϋπόθεση ότι ο δεύτερος είναι διάφορος του μηδενός. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι ο αριθμός 2 διαιρείται με τον 3. Ο αριθμός που προκύπτει από αυτή τη διαίρεση συμβολίζεται με $2/3$. Γενικότερα, κάθε ρητός αριθμός x γράφεται με τη μορφή $x = z/n$, όπου $z \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Οι ρητοί αριθμοί παρουσιάζουν κενά. Αυτό φαίνεται από την ακόλουθη διαπίστωση. Το τετράγωνο ενός αριθμού x έχει πάντα νόημα και είναι ο αριθμός $x \cdot x$ που συμβολίζεται με x^2 . Με τετραγωνική ρίζα του x , \sqrt{x} , εννοούμε το θετικό αριθμό y με την ιδιότητα ότι $y^2 = x$. Για πολλούς ρητούς είναι εύκολο να βρούμε την τετραγωνική τους ρίζα στη μορφή ενός άλλου ρητού: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{1/4} = 1/2$, $\sqrt{4/9} = 2/3$. Όμως, δεν υπάρχει ρητός αριθμός y τέτοιος που $y = \sqrt{2}$. Γεμίζουμε τα κενά με την υπόθεση ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς, όσο μικρή κι αν είναι η διαφορά τους, υπάρχει κάποιος αριθμός που μπορεί να είναι άρρητος. Το διευρυμένο σύνολο συμβολίζεται με \mathbb{R} και τα στοιχεία του ονομάζονται **πραγματικοί αριθμοί**.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε συχνά τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών, \mathbb{R} , που ονομάζονται διαστήματα. Ο ορισμός τους, καθώς και το αντίστοιχο σύμβολο, έχουν ως εξής:

- (i) $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.
- (ii) $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.
- (iii) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \equiv$ Το **ανοιχτό διάστημα** ανάμεσα στους αριθμούς a και b .
- (iv) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
- (v) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.
- (vi) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \equiv$ Το **κλειστό διάστημα** ανάμεσα στους αριθμούς a και $b > a$.
- (vii) $(b, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$.
- (viii) $[b, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να κατασκευάσουμε νέα σύνολα από άλλα γνωστά. Ο σημαντικότερος είναι αυτός που, με βάση δύο γνωστά σύνολα, A και B , οδηγεί στο σύνολο που συμβολίζεται με $A \times B$ και ονομάζεται **Καρτεσιανό γινόμενο του A επί το B** , με αυτή ακριβώς τη σειρά. Πρόκειται για το σύνολο που έχει για στοιχεία ζευγάρια της μορφής (α, β) , όπου το $\alpha \in A$ και το $\beta \in B$.

Σημειώστε ότι τα σύνολα A , B δεν είναι απαραίτητο να είναι διαφορετικά. Όταν $A=B$, το Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ γράφεται και σαν A^2 .

Παραδείγματα

- (i) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(m, n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$
- (ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(m, x) : m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$
- (iii) $[a, b] \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
- (iv) $[a, b] \times (c, d) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b, c < y < d\}$
- (v) $\mathbb{N}^2 \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- (vi) $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται το Καρτεσιανό γινόμενο τριών ή περισσότερων συνόλων.

Παραδείγματα

- (i) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} = \{(m, n, x) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}\}$
- (ii) $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(m, n, x) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\}$
- (iii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(m, x, y) : m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
- (iv) $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Απεικονίσεις ή συναρτήσεις

Ας ονομάσουμε f την αντιστοιχία που έχουμε κατασκευάσει ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου X προς στοιχεία του συνόλου Y . Αν η f είναι τέτοια που η γνώση του στοιχείου $x \in X$ προσδιορίζει μονοσήμαντα το αντίστοιχο στοιχείο $f(x)$ του Y , τότε η αντιστοιχία ονομάζεται **απεικόνιση του X στο Y** . Αυτό δηλώνεται με την έκφραση $f : X \rightarrow Y$.

Το στοιχείο $f(x) \in Y$ ονομάζεται **εικόνα του $x \in X$** . Το υποσύνολο του Y που αποτελείται από τις εικόνες όλων των στοιχείων του X συμβολίζεται με $f(X)$. Με άλλα λόγια $f(X) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\}$.

Μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ ονομάζεται και **συνάρτηση**. Σ' αυτό το πλαίσιο, το σύνολο X ονομάζεται **πεδίο ορισμού της συνάρτησης**, η εικόνα $f(x)$ του στοιχείου x λέγεται **τιμή της συνάρτησης στο σημείο x** και το υποσύνολο $f(X)$ του Y **πεδίο τιμών της συνάρτησης**.

Συνήθως, τα σύνολα X, Y που συνδέονται σε μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ είναι υποσύνολα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , ή των Καρτεσιανών γινομένων \mathbb{R}^n , όπου n κάποιος συγκεκριμένος φυσικός αριθμός. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η αντιστοιχία $f : X \rightarrow Y$ προσδιορίζεται αναλυτικά μέσω ενός "τύπου".

Ας υποθέσουμε γ.π. ότι με το σύμβολο x δηλώνουμε κάποιον πραγματικό αριθμό. Τότε η έκφραση x^2 έχει σαφές νόημα και για κάθε συγκεκριμένο x μας δίνει κάποιον άλλο πραγματικό αριθμό. Αν γ.π. $x = 3$, τότε $x^2 = 9$, αν $x = 4$, τότε $x^2 = 16$ κ.λ.π. Αν λοιπόν πούμε ότι "θεωρούμε

την απεικόνιση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$, τότε είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε αμέσως την εικόνα $f(x)$ οποιουδήποτε $x \in \mathbb{R}$.

Σαν δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5\sqrt{1-x^2}$ και $I = [-1, 1]$. Είναι φανερό ότι, με βάση τις πράξεις που έχουμε ορίσει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, η έκφραση $5\sqrt{1-x^2}$ έχει σαφές νόημα για κάθε x στο διάστημα I .

Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο τύπος της συνάρτησης δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ίδιος σε όλο το πεδίο ορισμού της. Σαν παράδειγμα θεωρείστε τη συνάρτηση $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, με το ίδιο I η προηγούμενη $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, αλλά με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} -x\sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ x\sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Με ανάλογο τρόπο προσδιορίζονται οι συναρτήσεις δύο ή και περισσότερων μεταβλητών. Σαν παραδείγματα θεωρείστε

- (i) Τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(n, x) = (n+1)x^2$,
- (ii) Τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x, y) = x^2 y^3$,
- (iii) Τη συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

- (iv) Τη συνάρτηση $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$, όπου

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}.$$

Θεμελιακής σημασίας στην ανάλυση και στις εφαρμογές των συναρτήσεων είναι η έννοια του ορίου. Για να την ορίσουμε, υπενθυμίζουμε αρχικά ότι **απόλυτη τιμή** του αριθμού $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός $|x|$, όπου $|x| := -x$, αν $x \leq 0$ και $|x| := x$, $x \geq 0$. Αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε ο αριθμός $|x-y|$ λέγεται **απόσταση** των x, y .

Οι απεικονίσεις της μορφής $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζονται **ακολουθίες** (πραγματικών αριθμών) και η εικόνα $f(n)$ του τυχαίου φυσικού αριθμού n συνήθως συμβολίζεται με f_n . Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την ακολουθία $f_n = (2-n)/n^2$. Θα λέμε ότι "η (τιμή της) f_n τείνει στον αριθμό L , καθώς το n τείνει στο άπειρο" και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = L$, αν ισχύει η ακόλουθη πρόταση: Για δοσμένο $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος που, αν $n > N$, τότε $|f(n) - L| < \varepsilon$. Ο αριθμός L ονομάζεται **όριο της ακολουθίας** f_n .

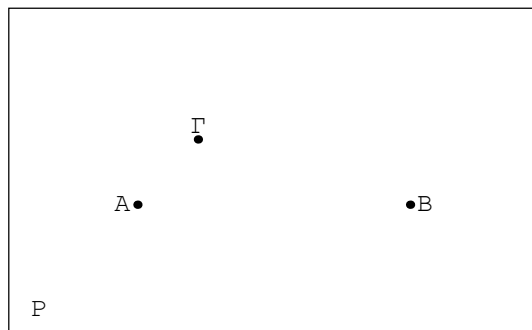
Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια, την απεικόνιση $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ κι ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός $x_0 \in [a, b]$. Λέμε ότι η (τιμή της) f τείνει στον αριθμό L καθώς το x πλησιάζει τον x_0 και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, αν μπορούμε να αποδείξουμε το εξής: Για δοσμένο $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε, αν $x \in (a, b)$ και $|x-x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ο αριθμός L ονομάζεται **όριο της συνάρτησης** f **καθώς το x τείνει στο x_0** .

1.4 Το Ευκλείδειο επίπεδο

Όλοι οι άνθρωποι έχουμε μια αίσθηση της έννοιας του χώρου και τη χρησιμοποιούμε σε καθημερινές μας εκφράσεις: Δε με χωράει ο τόπος, είμαι στενοχωρημένος, το διαμέρισμά τους είναι ευρύχωρο, το αυτοκίνητό μου έχει μεγάλους χώρους ... Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, η λέξη χώρος χρησιμοποιείται για να δηλώσει σχέσεις διαφόρων αντικειμένων του περιβάλλοντός μας, αλλά και τη δική μας σχέση προς αυτά. Ένα δωμάτιο είναι μεγαλύτερο από ένα άλλο όταν μπορούμε να τοποθετήσουμε μέσα σ' αυτό περισσότερα αντικείμενα ενός είδους, γ.π. καρέκλες, από όσες στο δεύτερο. Συνεπώς, η έννοια του χώρου είναι αλληλένδετη μ' εκείνη του μεγέθους των υλικών αντικειμένων.

Ο χώρος είναι τρισδιάστατος. Για να καταλάβουμε το τι εννοούμε μ' αυτή την πρόταση, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας από το μαθηματικό χώρο των δύο διαστάσεων που όλοι γνωρίζουμε από τα μαθητικά μας χρόνια, δηλαδή από το Ευκλείδειο επίπεδο. Η επιφάνεια ενός τραπέζιου ένας πίνακας, η επιφάνεια του γραφείου μας, το δάπεδο, το ταβάνι και οι τοίχοι ενός δωματίου αποτελούν φυσικές επιφάνειες που οδηγούν στη μαθηματική έννοια του (Ευκλείδειου) επίπεδου.

Στο σχήμα που ακολουθεί δείχνουμε ένα τμήμα της επιφάνειας αυτής της σελίδας μέσα σ' ένα πλαίσιο. Θα το ονομάσουμε *επίπεδο τμήμα* και θα το αναφέρουμε σαν το σύνολο P . Τα στοιχεία του επίπεδου τμήματος θα τα λέμε *σημεία* και θα τα παριστάνουμε με μαύρες κουκίδες. Για να τα διακρίνουμε, θα χρησιμοποιούμε κάποιο γράμμα, όπως στο σχήμα.

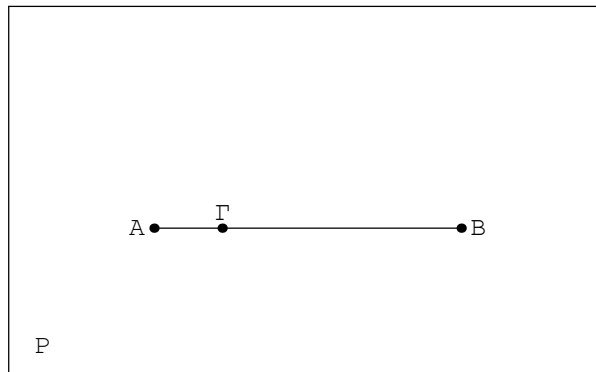


Θεωρείστε δύο τυχαία σημεία A , B του επίπεδου τμήματος P κι ένα τεντωμένο νήμα που τα ενώνει, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Τα σημεία του P που καλύπτει το νήμα αποτελούν αυτό που ονομάζουμε ευθύγραμμο τμήμα. Με άλλα λόγια, κάθε ζευγάρι (A, B) διαφορετικών σημείων ενός επίπεδου τμήματος P ορίζει ένα γνήσιο υποσύνολο του P που το λέμε *ευθύγραμμο τμήμα* AB ή BA . Με βάση το επόμενο σχήμα, δεχόμαστε αξιωματικά την ακόλουθη ιδιότητα των ευθυγράμμων τμημάτων:

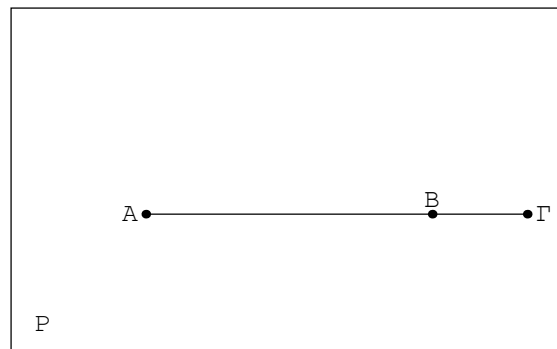
Ένα τρίτο σημείο Γ , διαφορετικό από τα A και B , ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα AB , εάν και μόνο όταν τα ευθύγραμμο τμήματα $A\Gamma$ και ΓB περιέχονται στο AB , το οποίο και συναποτελούν, ενώ το μόνο κοινό τους σημείο είναι το ίδιο το Γ . Με συνολοθεωρητικές εκφράσεις αυτό σημαίνει ότι

$$\Gamma \in AB \Leftrightarrow A\Gamma \subset AB, \Gamma B \subset AB, A\Gamma \cup \Gamma B = AB, A\Gamma \cap \Gamma B = \{\Gamma\}.$$

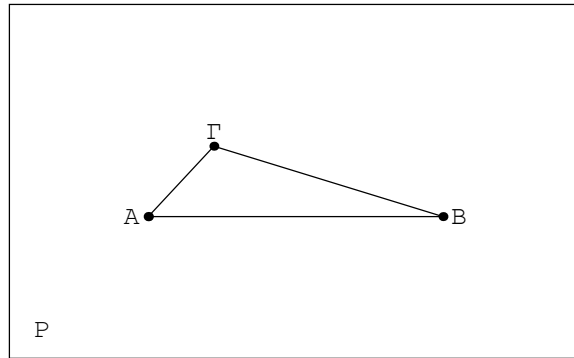


Αν το Γ δεν ανήκει στο AB , τότε υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα.

- (α) Το AB περιέχεται στο τμήμα ΓB . Τότε το τμήμα ΓA λέγεται *επέκταση του AB προς την πλευρά του A* .
- (β) Το AB περιέχεται στο τμήμα $A\Gamma$. Τότε το τμήμα $B\Gamma$ ονομάζεται *επέκταση του AB προς την πλευρά του B* .



(γ) Καμία από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις δεν ισχύει. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα τμήματα AB , $B\Gamma$ και ΓA σχηματίζουν ένα τρίγωνο.

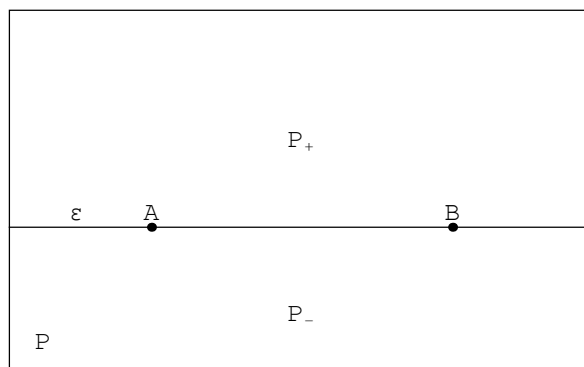


Μπορούμε, τώρα, με το νου μας να κατασκευάσουμε 8 αντίγραφα του επίπεδου τμήματος P και να τα τοποθετήσουμε δίπλα στο P με τον τρόπο που δείχνουμε στο επόμενο σχήμα.

Μ' αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σ' ένα καινούργιο επίπεδο τμήμα P' που περιέχει το P και έχει όλες τις ιδιότητες του τελευταίου. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί όσες φορές θέλουμε και μάλιστα "επ' άπειρον", αφού είναι καθαρά νοητική. Έτσι καταλήγουμε στην εικόνα αυτού που ονομάζεται **Ευκλείδειο επίπεδο**. Κάθε επίπεδο τμήμα, σαν τα παραπάνω P και P' , θα θεωρείται από εδώ και στο εξής σαν αντιπροσωπευτικό υποσύνολο του Ευκλείδειου επίπεδου, με την έννοια ότι έχει όλες τις ιδιότητες του υπερσύνολου στο οποίο ανήκει.

Όλες οι δυνατές επεκτάσεις ενός ευθύγραμμου τμήματος AB προς την πλευρά του B αποτελούν ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου επίπεδου το οποίο ονομάζουμε **ημιευθεία (γραμμή) με αρχή το σημείο A** . Ανάλογα, όλες οι δυνατές επεκτάσεις του AB προς την πλευρά του A αποτελούν μια ημιευθεία με αρχή το σημείο B . Η ένωση αυτών των δύο ημιευθειών, δηλαδή όλες οι δυνατές επεκτάσεις του AB , ονομάζεται **ευθεία γραμμή** που ορίζεται από τα σημεία A και B .

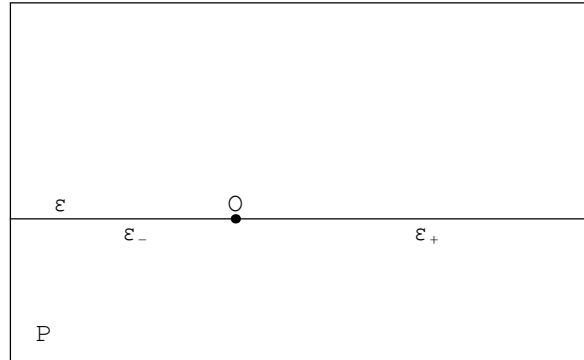
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, μια ευθεία ε χωρίζει το επίπεδο τμήμα P (άρα και το Ευκλείδειο επίπεδο) σε τρία ξένα μεταξύ τους υποσύνολα: Την ίδια την ευθεία ε και τα τμήματα P_+ , P_- του P που βρίσκονται από τη μια μεριά και την άλλη της ευθείας.



Προφανώς, $P_- \cap P_+ = \emptyset$ και $P = P_- \cup \varepsilon \cup P_+$.

Ανάλογα, ένα σημείο O που ανήκει σε μια ευθεία ε χωρίζει την ε σε τρία ξένα μεταξύ τους υποσύνολα: Τα τμήματα ε_+ και ε_- της ε που βρίσκονται από τη μια μεριά της και που, μαζί με το O , αποτελούν τη δοσμένη ευθεία (βλ. σχήμα). Με άλλα λόγια, $\varepsilon_+ \cap \varepsilon_- = \emptyset$ και

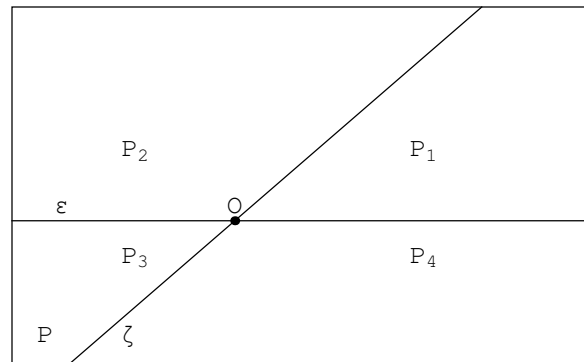
$\varepsilon = \varepsilon_- \cup \{O\} \cup \varepsilon_+$. Προφανώς, τα υποσύνολα $\varepsilon_- \cup \{O\}$ και $\{O\} \cup \varepsilon_+$ της ε αποτελούν ημιευθείες με κοινή αρχή το σημείο O .



Ας θεωρήσουμε, τώρα, δύο τυχαίες ευθείες ε , ζ κι ας σημειώσουμε ότι υπάρχουν τρία μόνο ενδεχόμενα.

(i) Οι ε , ζ έχουν δύο σημεία κοινά, ας πούμε τα A και B . Τότε προφανώς οι ε και ζ ταυτίζονται, αφού αποτελούν την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία A και B .

(ii) Οι ε , ζ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, ας το πούμε O , οπότε λέμε ότι οι ε , ζ **τέμνονται στο σημείο O** . Σ' αυτή την περίπτωση οι ευθείες ε και ζ χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα ξένα μεταξύ τους τμήματα, όπως στο επόμενο σχήμα. Καθένα από αυτά τα τμήματα, μαζί με τις δυο ημιευθείες που το περιβάλλουν, λέγεται **γωνία**.



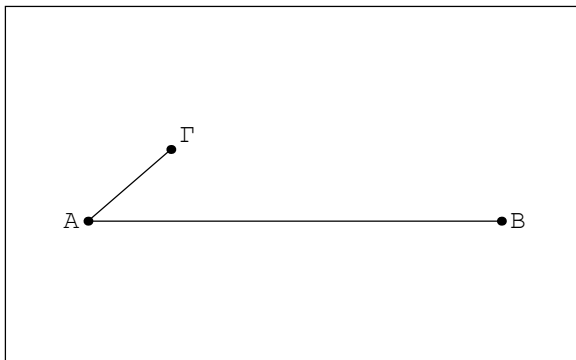
(iii) Οι ε , ζ δεν έχουν κοινό σημείο. Τότε οι ευθείες ε και ζ χωρίζουν το επίπεδο σε τρία ξένα μεταξύ τους τμήματα, όπως στο επόμενο σχήμα, και λέγονται **παράλληλες**.

Βασικό αξίωμα της Ευκλείδειας γεωμετρίας του επίπεδου είναι ότι,

Από ένα σημείο A που δεν ανήκει σε δοσμένη ευθεία ε διέρχεται μία μόνο ευθεία που είναι παράλληλη προς την ε .

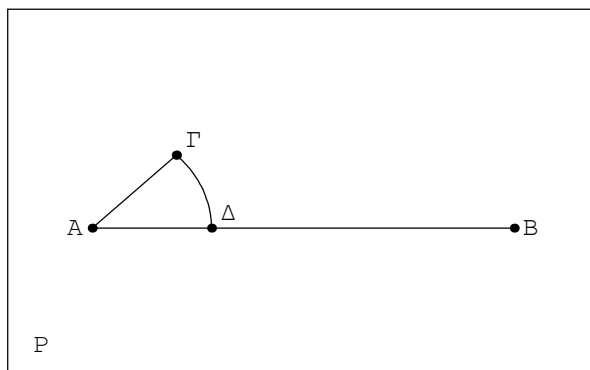
Η έννοια της απόστασης δύο σημείων

Ας θεωρήσουμε δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα, σαν τα AB και $A\Gamma$ του επόμενου σχήματος.

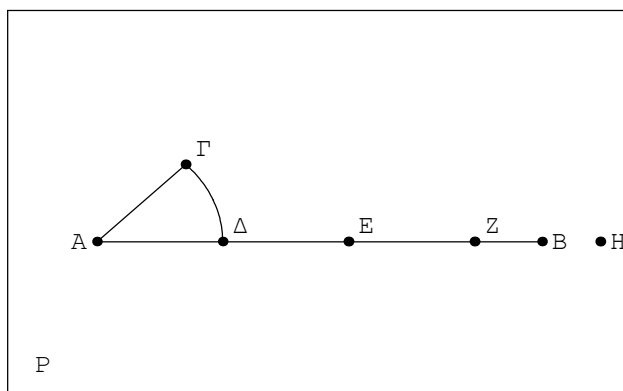


Αμέσως έχουμε την αίσθηση ότι το AB είναι μεγαλύτερο από το AG . Η σύγκριση αυτών των δύο τμημάτων γίνεται πιο αναλυτική με τον ακόλουθο τρόπο.

Ανοίγουμε ένα διαβήτη και στηρίζουμε το ένα σκέλος του στο A και το άλλο στο Γ . Στη συνέχεια, σηκώνουμε το σκέλος που στηριζόταν στο Γ και, διατηρώντας το άνοιγμα του διαβήτη σταθερό, το φέρνουμε πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB . Ας ονομάσουμε το σημείο στο οποίο ακουμπάει η ακίδα του διαβήτη Δ (βλ. επόμενο σχήμα)



Διατηρώντας πάντα το άνοιγμα του διαβήτη σταθερό, κρατάμε τη μια ακίδα του στο Δ και φέρνουμε την άλλη πάνω στο τμήμα AB προς τη μεριά του σημείου B . Έτσι ορίζεται το σημείο E . Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία, καταλήγουμε στο επόμενο σχήμα, όπου το σημείο H ανήκει στην ευθεία που ορίζεται από το AB .



Σε μια τέτοια περίπτωση λέμε ότι το AB είναι μεγαλύτερο από τρεις φορές και μικρότερο από τέσσερες φορές το AG .

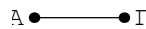
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο "μετράμε" και κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα, ας πούμε το MN . Εξετάζουμε, δηλαδή, πόσες φορές χωράει το AG στο MN . Το συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα AG που χρησιμοποιούμε στη μέτρηση όλων ανεξαιρέτως των ευθύγραμμων τμημάτων του επίπεδου ονομάζεται **μονάδα μήκους**.

Όπως συνέβη στο παράδειγμά μας, τις περισσότερες φορές η μονάδα μήκους δεν περιέχεται ακριβώς n φορές σε ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα. Έτσι, για να δώσουμε ένα ακριβέστερο μέτρο σύγκρισης ενός ευθύγραμμου τμήματος με τη μονάδα μήκους, οδηγούμαστε στην υποδιαίρεση της μονάδας σε μικρότερα τμήματα.

Αν γ.π. θέλουμε να υποδιαιρέσουμε τη μονάδα μήκους σε τρία ίσα τμήματα, ακολουθούμε τη διαδικασία που επεξηγείται στο επόμενο σχήμα και στηρίζεται στο θεώρημα ότι οι ευθείες που είναι παράλληλες προς τη βάση ενός τριγώνου τέμνουν τις άλλες δύο πλευρές του σε ανάλογα μεταξύ τους τμήματα.

Πιο συγκεκριμένα, ενώνουμε το σημείο Z που απέχει τρεις μονάδες μήκους από το A με το άκρο Γ της μονάδας μήκους AG . Στη συνέχεια, από τα σημεία Δ και E , που απέχουν αντίστοιχα μία και δύο μονάδες μήκους από το A , φέρνουμε παράλληλες προς το $Z\Gamma$. Αυτές τέμνουν το AG στα σημεία Δ' και E' , αντίστοιχα. Τα ευθύγραμμο τμήματα $A\Delta'$, $\Delta'E'$ και $E'\Gamma$ είναι ίσα μεταξύ τους και άρα το καθένα τους είναι ίσο προς το $1/3$ της μονάδας μήκους.

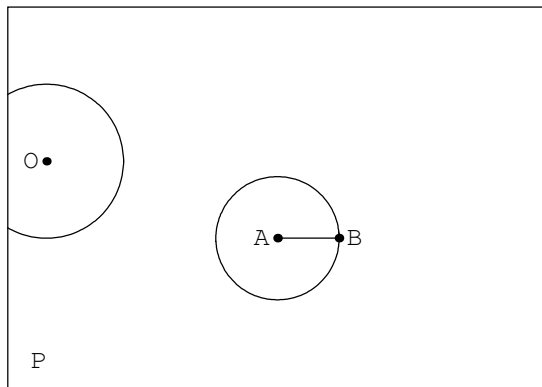
Μια μονάδα μήκους που χρησιμοποιείται συχνά σε πρακτικές εφαρμογές είναι είναι το λεγόμενο **μέτρο** που συμβολίζεται με m . Το **εκατοστόμετρο**, cm , είναι ίσο προς το ένα εκατοστό του μέτρου. Πρόκειται για ένα τμήμα σαν το



Ο θετικός αριθμός r που προκύπτει από τη διαδικασία της μέτρησης ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ονομάζεται **μήκος** του AB . Λέγεται και **απόσταση των σημείων** A, B . Προσωρινά, θα υποθέτουμε ότι ο $r \in \mathbb{Q}$.

Ο κύκλος

Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους r . Το υποσύνολο των σημείων του Ευκλείδειου επίπεδου που έχουν την ίδια απόσταση r από κάποιο σημείο A ονομάζεται **κύκλος με κέντρο το A και ακτίνα r** . Τα σημεία που απέχουν από το A λιγότερο από r αποτελούν το **εσωτερικό του κύκλου**. Εκείνα που έχουν απόσταση μεγαλύτερη από r αποτελούν το **εξωτερικό του κύκλου**. Το εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο ένα σημείο A ονομάζεται (ανοιχτή) **γειτονιά του A** .

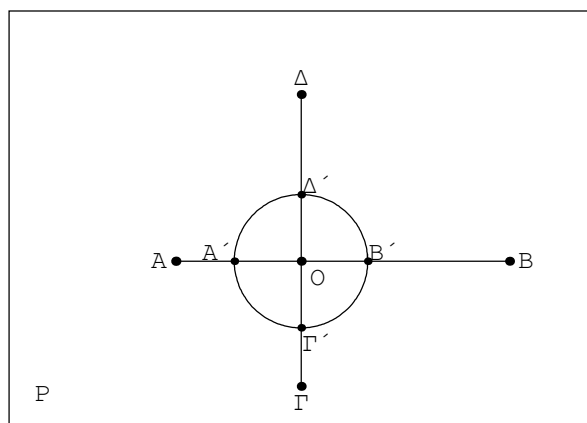


Οποιοδήποτε σημείο O του Ευκλείδειου επίπεδου P έχει μια γειτονιά που περιέχεται στο P .

Θεωρούμε τα ευθύγραμμο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ που τέμνονται στο σημείο O , όπως στο ακόλουθο σχήμα.

Ένας κύκλος με κέντρο το O και αρκετά μικρή ακτίνα r θα περιέχει ένα τμήμα $A'B'$ μήκους $2r$ του AB και ένα τμήμα $\Gamma'\Delta'$ μήκους $2r$ του $\Gamma\Delta$. Είναι φανερό ότι, αν κόψουμε το επίπεδο τμήμα P του χαρτιού και το διπλώσουμε κατά μήκος της ευθείας που ορίζει το AB , τότε το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma'O$ δε θα συμπίπτει με το $O\Delta'$. Αν πάλι διπλώσουμε το χαρτί κατά μήκος της ευθείας που ορίζει το $\Gamma\Delta$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $A'O$ δε θα συμπίπτει με το OB' .

Η σύμπτωση των $\Gamma'O$ και $O\Delta'$ θα εμφανιστεί μόνο στην περίπτωση που τα ευθύγραμμο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο O , όπως στο επόμενο σχήμα.

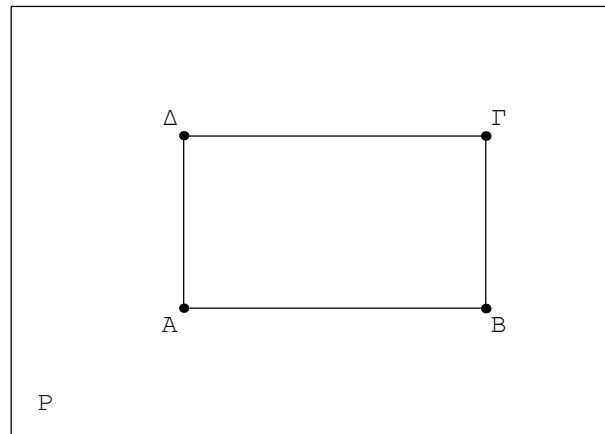


Σε μια τέτοια περίπτωση, λέμε ότι τα AB και $\Gamma\Delta$ είναι **μεταξύ τους κάθετα**. Κάθετες μεταξύ τους λέγονται τότε και οι δύο ευθείες που ορίζουν τα ευθύγραμμο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$.

Δύο ευθείες που είναι κάθετες σε μια τρίτη είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Υποθέτουμε ότι τα σημεία A, B, Γ και Δ έχουν τη διάταξη που δείχνουμε στο επόμενο σχήμα: Καθένα από τα ευθύγραμμο τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA είναι κάθετο στο επόμενο, ενώ εκείνα που είναι παράλληλα έχουν το ίδιο μήκος. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα ευθύγραμμο τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA σχηματίζουν ένα *ορθογώνιο παραλληλόγραμμο*. Τα ίδια τα τμήματα

AB, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ονομάζονται *πλευρές του παραλληλογράμμου*. Στην ειδικότερη περίπτωση που όλες οι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος το σχήμα λέγεται *τετράγωνο*.



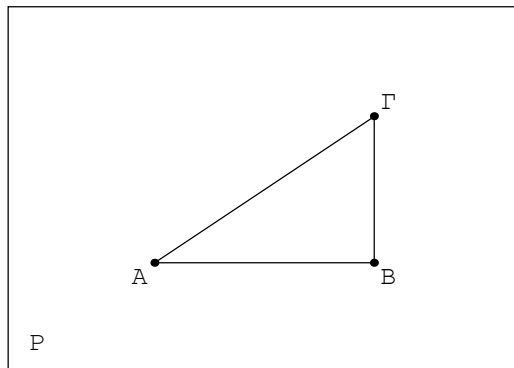
Το τμήμα του επίπεδου που περικλείεται από ένα τετράγωνο λέγεται *τετραγωνική περιοχή*. Ωστόσο, συχνά χρησιμοποιούμε τη λέξη τετράγωνο τόσο για το ομώνυμο τετράπλευρο σχήμα, όσο και για το μέρος του επίπεδου που περιέχεται σ' αυτό το σχήμα.

Όλοι μας έχουμε την αίσθηση ότι το τμήμα του επίπεδου που περιέχεται σ' ένα τετράγωνο πλευράς b είναι μεγαλύτερο από εκείνο που περιέχεται σ' ένα άλλο τετράγωνο με πλευρά μήκους $a < b$. Η ποσοτική έκφραση αυτής της σύγκρισης υλοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο. Κατασκευάζουμε αρχικά ένα τετράγωνο που η κάθε πλευρά του είναι ίση προς το ευθύγραμμο τμήμα που έχουμε υιοθετήσει ως μονάδα μήκους ($\mu\mu$). Η αντίστοιχη τετραγωνική περιοχή ορίζεται τότε ως μονάδα μέτρησης όλων των τετραγώνων. Προφανώς, σ' ένα τετράγωνο Γ με πλευρά μήκους $a = \nu \mu\mu$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, χωράνε ν^2 τετράγωνα με πλευρά $1 \mu\mu$. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι το *εμβαδόν*, $E(\Gamma)$, του τετράγωνου Γ είναι ν^2 τετραγωνικές $\mu\mu$ και γράφουμε $E(\Gamma) = \nu^2 (\mu\mu)^2$. Ανάλογα, σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Π με πλευρές μήκους $a = \kappa \mu\mu$ και $b = \lambda \mu\mu$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, χωράνε $\kappa\lambda$ τετράγωνα με πλευρά $1 \mu\mu$. Άρα το εμβαδόν του Π είναι ίσο με $E(\Pi) = \kappa\lambda (\mu\mu)^2$.

Για να μετρήσουμε παραλληλόγραμμο που οι πλευρές τους δεν έχουν μήκος ίσο με ακέραιο πολλαπλάσιο της $\mu\mu$, κατασκευάζουμε μικρότερα τετράγωνα των οποίων η πλευρά έχει μήκος κάποια υποδιαίρεση της $\mu\mu$.

Το μέγεθος άλλου είδους περιοχών του επίπεδου, δηλαδή περιοχών οι οποίες δεν περικλείονται σε ορθογώνια παραλληλόγραμμο, προσδιορίζεται μόνο στο βαθμό που μπορούμε να τις "σπάσουμε" (διαμερίσουμε) σε τετραγωνικές περιοχές ή να τις αναγάγουμε σε κλάσματα περιοχών που περικλείονται σε ορθογώνια παραλληλόγραμμο.

Θεωρείστε γ.π. ένα ορθογώνιο τρίγωνο, δηλαδή ένα τρίγωνο με δυο πλευρές κάθετες μεταξύ τους, σαν αυτό του επόμενου σχήματος. (Η τρίτη πλευρά ενός ορθογώνιου τριγώνου λέγεται *υποτείνουσα*).



Οι ευθείες που διέρχονται από τα σημεία A και Γ και είναι παράλληλες προς τα τμήματα BΓ και AB, αντίστοιχα, τέμνονται σε κάποιο σημείο, ας το πούμε Δ. Είναι φανερό ότι το ABΓΔ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Είναι το ίδιο φανερό ότι το τρίγωνο ABΓ περικλείει τη μισή περιοχή απ' αυτή που περιέχεται στο ABΓΔ. Αν λοιπόν η πλευρά AB έχει μήκος a και η BΓ έχει μήκος b , τότε το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου είναι ab κι εκείνο του τριγώνου ABΓ είναι $(1/2)ab$.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Αν η υποτείνουσα ενός ορθογώνιου τριγώνου έχει μήκος c και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκος a και b , αντίστοιχα, τότε το τετράγωνο πλευράς c έχει εμβαδό ίσο με το άθροισμα των εμβαδών δύο τετραγώνων πλευράς a και b , αντίστοιχα: $c^2 = a^2 + b^2$.

Αυτό το θεμελιακό θεώρημα έχει ως άμεση συνέπεια την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στη γεωμετρία. Κι αυτό γιατί μπορεί να αναδιατυπωθεί έτσι που να αναφέρεται σε μήκη ευθύγραμμων τμημάτων, αντί σε εμβαδά τετραγώνων:

Αν τα μήκη των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι a και b , αντίστοιχα, τότε το μήκος της υποτείνουσας είναι $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Αν γ.π. $a = 3 \mu\mu$ και $b = 4 \mu\mu$, τότε $c = 5 \mu\mu$. Αν, πάλι, $a = (3/5) \mu\mu$ και $b = (4/5) \mu\mu$, τότε $c = 1 \mu\mu$. Τέλος, αν $a = b = 1 \mu\mu$, τότε $c = \sqrt{2} \mu\mu$.

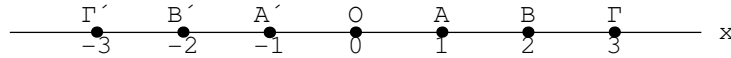
Αν θυμηθούμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, θα καταλάβουμε και την ταραχή που ένοιωσαν ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του όταν συνειδητοποίησαν ότι το θεμελιακό θεώρημα που οι ίδιοι απέδειξαν οδηγούσε αναπότερηπτα στην εισαγωγή των άρρητων αριθμών, τη στιγμή που το αξίωμα της σχολής τους ήταν πως όλοι οι αριθμοί είναι ρητοί.

Βέβαια, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στο πρακτικό επίπεδο οι Πυθαγόρειοι έχουν απόλυτο δίκιο. Κάθε πραγματική διαδικασία μέτρησης δίνει σαν αποτέλεσμα έναν ρητό αριθμό. (Γιατί;)

Η πραγματική ευθεία

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τη μονάδα μήκους κι ας θεωρήσουμε μιαν ευθεία x και το σημείο O που τη χωρίζει σε δυο ημιευθείες. Πάνω στη μια ημιευθεία ξεχωρίζουμε τα σημεία A, Δ, Γ κ.λ.π που απέχουν $1 \mu\mu$, $2 \mu\mu$, $3 \mu\mu$ κ.λ.π., αντίστοιχα, από το σημείο O . Κάνουμε το ίδιο και

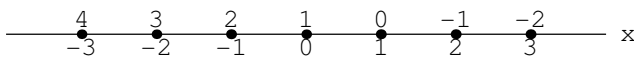
στην άλλη ημιευθεία, ορίζοντας τα σημεία A' , B' , Γ' κ.λ.π., όπως στο επόμενο σχήμα. Στη συνέχεια, αντιστοιχούμε το σημείο O στον αριθμό μηδέν, τα A , Δ , Γ κ.λ.π στους θετικούς ακέραιους $1, 2, 3$ κ.λ.π. και τα A' , B' , Γ' κ.λ.π. στους αρνητικούς $-1, -2, -3$ κ.λ.π.



Αυτή η διαδικασία ορίζει μια 1-1 αντιστοιχία του συνόλου των ακεραίων, \mathbb{Z} , προς το υποσύνολο $\{O, A, A', B, B', \Gamma, \Gamma', \dots\}$ της ευθείας x . Θεωρώντας τα σημεία του τμήματος OA που απέχουν $(1/n)$ μμ, όπου n τυχαίος φυσικός αριθμός, από το O , ορίζουμε αμέσως και την αντιστοιχία των ρητών αριθμών που περιέχονται στο διάστημα $(0, 1]$ προς ένα υποσύνολο του ευθύγραμμου τμήματος OA . Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε και την αντιστοιχία των ρητών αριθμών που περιέχονται στο διάστημα $[-1, 0)$ προς ένα υποσύνολο του ευθύγραμμου τμήματος OA' . Η επανάληψη αυτής της διαδικασίας στα υπόλοιπα μοναδιαία τμήματα $AB, B\Gamma$ κ.λ.π. οδηγεί με προφανή τρόπο σε μια 1-1 αντιστοιχία ενός γνήσιου υποσύνολου της ευθείας x προς τους ρητούς αριθμούς, \mathbb{Q} . Τελικά, καταλήγουμε σε μια 1-1 αντιστοιχία της ευθείας x προς το σύνολο των πραγματικών αριθμών, \mathbb{R} , υιοθετώντας το ακόλοθο αξίωμα: Για κάθε πραγματικό αριθμό p υπάρχει ένα σημείο P της ευθείας x και αντίστροφα. Το P απέχει $|p|$ μμ από το O και βρίσκεται στην ημιευθεία που περιέχει το σημείο A αν ο p είναι θετικός, ενώ βρίσκεται στην ημιευθεία που περιέχει το σημείο A' αν ο αριθμός p είναι αρνητικός.

Όταν, με τον παραπάνω τρόπο, έχουμε ορίσει τα σημεία μιας ευθείας x που αντιστοιχούν στα στοιχεία του συνόλου \mathbb{R} , θα λέμε ότι η δοσμένη ευθεία είναι **βαθμονομημένη**.

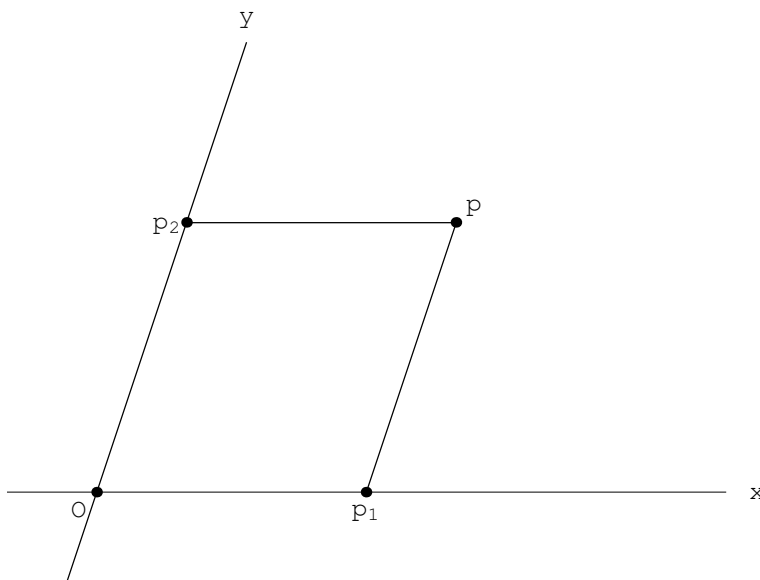
Στο σημείο αυτό σπεύδουμε να τονίσουμε ότι για κάθε συγκεκριμένη ευθεία υπάρχουν άπειροι τρόποι βαθμονόμησης, ακόμα και όταν η μμ είναι ίδια. Αυτό γίνεται φανερό αν σκεφτούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε σημείο θέλουμε ως αντίστοιχο του αριθμού μηδέν. Κι αφού επιλέξουμε αυτό το σημείο, ας το πούμε O' , μπορούμε να θεωρήσουμε ως αντίστοιχα των θετικών αριθμών τα σημεία της ευθείας που βρίσκονται σ' οποιαδήποτε πλευρά του O' . Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε δυο διαφορετικούς τρόπους βαθμονόμησης της ίδιας ευθείας.



Με βάση αυτή την παρατήρηση, θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όταν ακούμε ή χρησιμοποιούμε τη φράση "θεωρείστε την πραγματική ευθεία \mathbb{R} ". Αυτή η φράση έχει καθιερωθεί στη βάση της δυνατότητας ορισμού αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας ανάμεσα στα σημεία μιας ευθείας γραμμής από τη μια και τα στοιχεία του \mathbb{R} από την άλλη, όπως δείξαμε παραπάνω. Όμως, όπως μόλις επισημίναμε, δεν υπάρχει ένας και μοναδικός τρόπος για την κατασκευή αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας ανάμεσα στους πραγματικούς αριθμούς \mathbb{R} και σε δοσμένη ευθεία, ούτε ξεχωρίζει κάποιος από τους άπειρους δυνατούς τρόπους ως φυσικότερος ή πιο ταιριαστός από τους άλλους.

1.5 Συστήματα συντεταγμένων του Ευκλείδειου επίπεδου

Θεωρούμε δύο ευθείες x , y που τέμνονται στο σημείο O . Από ένα τυχαίο σημείο p φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς την y . Αυτή τέμνει την ευθεία x σ' ένα σημείο, ας το πούμε p_1 . Από το ίδιο σημείο p φέρνουμε και μια ευθεία παράλληλη προς την x . Αυτή τέμνει την ευθεία y σ' ένα σημείο, ας το πούμε p_2 . (Βλ. σχήμα).



Με τον παραπάνω τρόπο κατασκευάζεται μια αντιστοιχία κάθε σημείου p του επίπεδου προς ένα ζευγάρι σημείων (p_1, p_2) του ίδιου επίπεδου, τα οποία περιέχονται στις ευθείες x και y , αντίστοιχα.

Η αντιστοιχία $p \rightarrow (p_1, p_2)$ είναι μονοσήμαντη. Το ίδιο ισχύει και για την αντίστροφη της, $(p_1, p_2) \rightarrow p$, που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο. Από δοσμένο σημείο p_1 της ευθείας x φέρνουμε παράλληλη προς την y . Όμοια, από δοσμένο σημείο p_2 της ευθείας y φέρνουμε παράλληλη προς την x . Αυτή θα τέμνει αναγκαστικά την προηγούμενη σε κάποιο σημείο p .

Σε μια τέτοια κατασκευή οι ευθείες x, y ονομάζονται *άξονες* και το σημείο τομής τους, O , *αρχή των αξόνων*.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι οι άξονες έχουν βαθμονομηθεί, ότι έχουμε δηλαδή ορίσει την αντιστοιχία τους προς τους πραγματικούς αριθμούς. Τότε το σημείο p_1 αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό $x(p_1)$, ενώ το σημείο p_2 αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό $y(p_2)$. Άρα το ζευγάρι (p_1, p_2) αντιστοιχεί στο ζευγάρι των πραγματικών αριθμών $(x(p_1), y(p_2))$. Αλλά, όπως είδαμε λίγο παραπάνω, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο ζευγάρι (p_1, p_2) και το σημείο p . Συνακόλουθα, μπορούμε να πούμε ότι το σημείο p αντιστοιχεί στο ζευγάρι των πραγματικών αριθμών $(x(p_1), y(p_2))$ και αντίστροφα. Γι αυτό, το ζευγάρι $(x(p_1), y(p_2))$ μπορεί να γράφεται και σαν $(x(p), y(p))$.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι αποδείξαμε την ακόλουθη

Πρόταση

Κάθε σύστημα βαθμονομημένων αξόνων ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, $C : P \rightarrow \mathbb{R}^2$, του Ευκλείδειου επίπεδου P προς το σύνολο των διαταγμένων ζευγαριών πραγματικών αριθμών, \mathbb{R}^2 .

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο λέμε ότι το Ευκλείδειο επίπεδο είναι *δισδιάστατο*.

Αν το $p \in P$ και $C : p \rightarrow (x(p), y(p))$, τότε οι αριθμοί $x(p), y(p)$ ονομάζονται *συντεταγμένες του σημείου p ως προς το σύστημα (των αξόνων) x - y* .

Σε ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι οι άξονες έχουν βαθμονομηθεί με τρόπο ώστε οι συντεταγμένες της αρχής τους να είναι το ζευγάρι $(0, 0)$.

Ένα *σύστημα ορθογώνιων αξόνων*, σαν αυτό του επόμενου σχήματος, ονομάζεται *Καρτεσιανό* (από τον Γάλλο φιλόσοφο και θεμελιωτή της αναλυτικής γεωμετρίας Descartes (Ντεκάρ), που στα ελληνικά έχει καθιερωθεί να λέγεται Καρτέσιος).

Το βασικό πλεονέκτημα ενός Καρτεσιανού συστήματος αξόνων είναι ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου p καθορίζουν με απλό τρόπο και την απόστασή του από την *αρχή των αξόνων*. Με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα, αυτή η απόσταση δίνεται από την έκφραση $\sqrt{x(p)^2 + y(p)^2}$. Το ίδιο εύκολα προσδιορίζεται και η απόσταση δύο τυχαίων σημείων, p_1 και p_2 , του επίπεδου με συντεταγμένες $(x_1, y_1) \equiv (x(p_1), y(p_1))$ και $(x_2, y_2) \equiv (x(p_2), y(p_2))$, αντίστοιχα. Αν ονομάσουμε αυτή την *απόσταση* $d(p_1, p_2)$, τότε

$$(5.1) \quad d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν εισαγάγουμε τις διαφορές των συντεταγμένων

$$(5.2) \quad \Delta x := x_2 - x_1, \quad \Delta y := y_2 - y_1,$$

των σημείων p_1 και p_2 , τότε η έκφραση για την απόστασή τους γίνεται

$$(5.3) \quad d(p_1, p_2) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} .$$

Θα πρέπει τώρα να σημειώσουμε ότι στο ίδιο επίπεδο P μπορούμε να εισαγάγουμε δύο ή και περισσότερα συστήματα αξόνων. Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζουμε δύο διαφορετικά συστήματα, τα $x - y$ και $x' - y'$, που έχουν την ίδια αρχή. Στο μεθεπόμενο, τα συστήματα $x - y$ και $x' - y'$ έχουν διαφορετική αρχή.

Με βάση το σύστημα $x - y$ ορίζεται η αντιστοιχία $C : p \rightarrow C(p) = (p_1, p_2)$. Ανάλογα, ένα διαφορετικό σύστημα αξόνων, το $x' - y'$, οδηγεί στην αντιστοιχία $C' : p \rightarrow C'(p) = (p_1', p_2')$. Όταν οι άξονες βαθμονομηθούν, οι παραπάνω αντιστοιχίες μετατρέπονται αμέσως σε αντιστοιχίες του σημείου p προς δύο, πλέον, ζευγάρια πραγματικών αριθμών, τα $(x(p), y(p)) \equiv (x(p_1), y(p_2))$ και $(x'(p), y'(p)) \equiv (x'(p_1'), y'(p_2'))$.

Είναι φανερό ότι, αφού καθένα από τα ζευγάρια $(x, y) \equiv (x(p), y(p))$ και $(x', y') \equiv (x'(p), y'(p))$ ξεχωριστά αντιστοιχεί μονοσήμαντα στο ίδιο σημείο p , δεν μπορεί παρά το ένα καθορίζεται πλήρως από το άλλο. Δεν είναι δύσκολο ν' αποδειχτεί ότι η σχέση ανάμεσα στα ζευγάρια (x, y) και (x', y') εκφράζεται από εξισώσεις της μορφής

$$(5.4\alpha) \quad x' = a x + b y + m,$$

$$(5.4\beta) \quad y' = c x + d y + n,$$

όπου η εξάδα των πραγματικών αριθμών (a, b, c, d, m, n) καθορίζεται από τον τρόπο που επιλέγονται οι άξονες (x, y) και (x', y') .

Οι εξισώσεις αυτής της μορφής λέγονται γραμμικές και χαρακτηρίζονται από την εξής θεμελιακή ιδιότητα. Για ένα συγκεκριμένο ζευγάρι τιμών των μεταβλητών x, y , ας πούμε για το $(x, y) = (x_1, y_1)$ έχουμε

$$(5.5\alpha) \quad x_1' = a x_1 + b y_1 + m,$$

$$(5.5\beta) \quad y_1' = c x_1 + d y_1 + n$$

Για ένα δεύτερο ζευγάρι τιμών, ας πούμε για το $(x, y) = (x_2, y_2)$, οι δοσμένες εξισώσεις γίνονται

$$(5.6\alpha) \quad x_2' = a x_2 + b y_2 + m,$$

$$(5.6\beta) \quad y_2' = c x_2 + d y_2 + n.$$

Συνεπώς,

$$(5.7\alpha) \quad \Delta x' := x_2' - x_1' = a \Delta x + b \Delta y,$$

$$(5.7\beta) \quad \Delta y' := y_2' - y_1' = c \Delta x + d \Delta y.$$

Αυτές οι σχέσεις μας επιτρέπουν να βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές a, b, c και d , όταν και τα δυο συστήματα αξόνων, (x, y) και (x', y') , είναι Καρτεσιανά. Γιατί σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει να συμφωνούν οι εκφράσεις

$$(5. 8\alpha) \quad d(p_1, p_2) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

και

$$(5. 9\beta) \quad d(p_1, p_2) = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}$$

για την απόσταση των σημείων p_1 και p_2 που έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , αντίστοιχα, στο σύστημα (x, y) και (x_1', y_1') , (x_2', y_2') στο σύστημα $x' - y'$.

Όμως,

$$(5. 10) \quad (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (a^2 + c^2)(\Delta x)^2 + (b^2 + d^2)(\Delta y)^2 + 2(ab + cd)(\Delta x)(\Delta y).$$

Κατά συνέπεια, θα έχουμε

$$(5. 11) \quad (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

εάν και μόνο όταν

$$(5. 12\alpha) \quad a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$$

$$(5. 12\beta) \quad ab + cd = 0.$$

Η θεμελιώδης ταυτότητα

$$(5. 13) \quad \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

που είναι ισοδύναμη με το Πυθαγόρειο θεώρημα, μας επιτρέπει αμέσως να πούμε ότι οι δυο πρώτες από τις παραπάνω συνθήκες θα ικανοποιούνται αυτόματα αν θέσουμε

$$(5. 14) \quad a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta,$$

και

$$(5. 15) \quad c = \sin \psi, \quad d = \cos \psi.$$

Η αντικατάσταση αυτών των εκφράσεων στη συνθήκη $ab + cd = 0$ δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

$$(5. 16) \quad \cos \theta \sin \psi + \sin \theta \cos \psi = 0.$$

Είναι προφανές ότι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται αυτόματα όταν $\psi = -\theta$. Τότε οι παράμετροι a, b, c και d δίνονται από τις

$$(5. 17) \quad a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta, \quad c = -\sin \theta, \quad d = \cos \theta.$$

Ωστόσο, η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται και για $\psi = \pi - \theta$. Σ' αυτή την περίπτωση,

$$(5. 18) \quad a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta, \quad c = \sin \theta, \quad d = -\cos \theta.$$

Συνοψίζοντας, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι, αν (x, y) και (x', y') είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου p του Ευκλείδειου επιπέδου ως προς δύο τυχαία συστήματα Καρτεσιανών συντεταγμένων, τότε είτε

$$(5.19\alpha) \quad x' = \cos \theta x + \sin \theta y + m,$$

$$(5.19\beta) \quad y' = -\sin \theta x + \cos \theta y + n,$$

όπου $0 \leq \theta \leq 2\pi$, είτε

$$(5.20\alpha) \quad x' = \cos \theta x + \sin \theta y + m,$$

$$(5.20\beta) \quad y' = \sin \theta x - \cos \theta y + n.$$

Σημειώστε ότι, για $\theta=0$, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$(5.21\alpha) \quad x' = x + m,$$

$$(5.21\beta) \quad y' = y + n,$$

και

$$(5.22\alpha) \quad x' = x + m,$$

$$(5.22\beta) \quad y' = -y + n$$

αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι στην πρώτη περίπτωση και για $\theta = 0$, οι άξονες του συστήματος $x' - y'$ είναι παράλληλοι κι έχουν την ίδια φορά προς εκείνους του συστήματος $x - y$, αλλά η αρχή τους βρίσκεται στο σημείο O' που έχει συντεταγμένες $(x, y) = (-m, -n)$. Το ίδιο ισχύει και στη δεύτερη περίπτωση, με τη διαφορά ότι ο άξονας y' έχει αντίθετη φορά από τον x .

Ανάλογα, όταν οι παράμετροι m και n μηδενίζονται, οι σχέσεις των συντεταγμένων (x, y) και (x', y') γίνονται

$$(5.23\alpha) \quad x' = \cos \theta x + \sin \theta y,$$

$$(5.23\beta) \quad y' = -\sin \theta x + \cos \theta y,$$

και

$$(5.24\alpha) \quad x' = \cos \theta x + \sin \theta y,$$

$$(5.24\beta) \quad y' = \sin \theta x - \cos \theta y,$$

αντίστοιχα. Στην πρώτη περίπτωση, η σχέση των αξόνων $x' - y'$ προς τους άξονες $x - y$ αντιστοιχεί στο επόμενο σχήμα. Πιο συγκεκριμένα, το σύστημα $x' - y'$ προκύπτει από το $x - y$ αν στρίψουμε το τελευταίο κατά γωνία θ αντίθετα από τη φορά των δεικτών ενός ρολογιού γύρω από το σημείο γύρω από το σημείο O .

Στην δεύτερη περίπτωση, η σχέση των αξόνων $x' - y'$ προς τους άξονες $x - y$ αντιστοιχεί στο σχήμα που προκύπτει από το προηγούμενο όταν αντιστρέψουμε τη φορά του άξονα y' .

Στο σύνολο \mathbb{R}^2 μπορούμε να ορίσουμε την πράξη της πρόσθεσης, στη βάση της συνηθισμένης πρόσθεσης δύο πραγματικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, αν $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$(5.25) \quad (x, y) + (z, w) := (x + z, y + w).$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου του \mathbb{R}^2 με έναν πραγματικό αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, αν $a \in \mathbb{R}$ και $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε ως γινόμενό τους ορίζεται το στοιχείο

$$(5.26) \quad a(x, y) := (a x, a y)$$

του \mathbb{R}^2 . Όταν νοείται ως εφοδιασμένο με αυτές τις δυο πράξεις, το σύνολο \mathbb{R}^2 λέγεται **διανυσματικός χώρος** και τα στοιχεία του **διανύσματα**.

Από αυτούς τους ορισμούς έπεται αμέσως ότι $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ και $(x, 0) = x(1, 0)$, $(0, y) = y(0, 1)$. Κατά συνέπεια,

$$(5.27) \quad (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Συχνά, τα διανύσματα συμβολίζονται με ένα μόνο γράμμα, πάνω στο οποίο τοποθετείται κι ένα βέλος. Αν, λοιπόν, θέσουμε

$$(5.28) \quad \vec{v} = (x, y), \quad \vec{e}_1 = (1, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1),$$

Τότε η (5.27) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$(5.29) \quad \vec{v} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2.$$

Όταν, με βάση ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων x-y, το σύνολο \mathbb{R}^2 έχει αντιστοιχηθεί προς το Ευκλείδειο επίπεδο P , τότε μπορούμε να παριστάνουμε το στοιχείο $\vec{v} = (x, y)$ του \mathbb{R}^2 είτε με το σημείο p που έχει συντεταγμένες (x, y) , είτε με ένα βέλος που έχει ως βάση την αρχή των αξόνων και κορυφή το σημείο p . Αυτό το βέλος δεν είναι παρά ένα **προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα**.

Η αντιστοιχία των διανυσμάτων με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα του Ευκλείδειου επιπέδου μας οδηγεί στο να εισαγάγουμε την έννοια του εσωτερικού τους γινομένου. Πιο συγκεκριμένα, ως **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{v} = (x, y)$ και $\vec{w} = (z, w)$ ορίζεται ο πραγματικός αριθμός

$$(5.30) \quad \vec{v} \cdot \vec{w} := x z + y w.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μηδενίζεται εάν και μόνο όταν τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα είναι μεταξύ τους κάθετα. Γι αυτό, όταν $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, τα διανύσματα \vec{v} , \vec{w} λέγονται **ορθογώνια**. Παράδειγμα ορθογώνιων διανυσμάτων αποτελούν τα \vec{e}_1 και \vec{e}_2 που ορίσαμε παραπάνω.

Η ίδια αντιστοιχία που αναφέραμε πιο πάνω, μας οδηγεί στο να ορίσουμε ως **μήκος του διανύσματος** $\vec{v} = (x, y)$ τον μη αρνητικό αριθμό

$$(5.31) \quad |\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ας υποθέσουμε ότι, στο Καρτεσιανό σύστημα $x - y$, τα σημεία p_1 και p_2 έχουν συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , αντίστοιχα. Τότε τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ και $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ διαφέρουν κατά

$$(5.32) \quad \vec{v} := \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \equiv \Delta x + \Delta y.$$

Κατά συνέπεια,

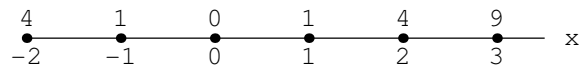
$$(5.33) \quad |\vec{v}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \equiv d(p_1, p_2).$$

Από αυτές τις παρατηρήσεις συνάγεται το συμπέρασμα ότι, εφοδιασμένος με την έννοια του εσωτερικού γινόμενου δύο στοιχείων του και του μήκους ενός διανύσματος, ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^2 είναι καθ' όλα ισοδύναμος με το Ευκλείδειο επίπεδο. Γι' αυτό, ο \mathbb{R}^2 συχνά αναφέρεται σαν **Ευκλείδειος χώρος** (δύο διαστάσεων).

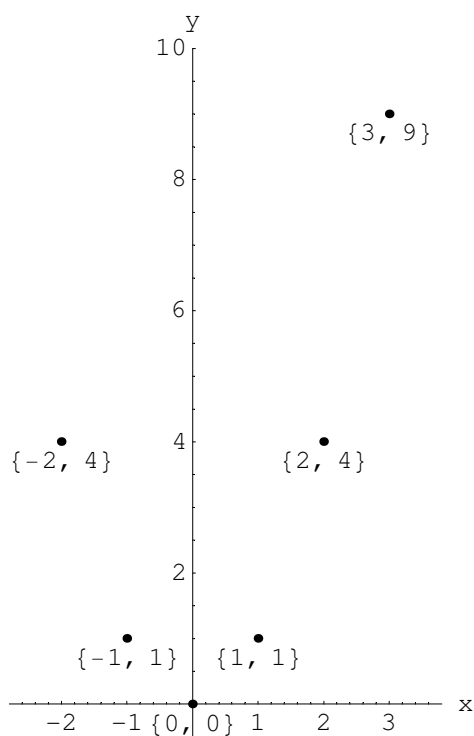
1.6 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων μιας μεταβλητής

Η γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων αποτελούν βασικά εργαλεία τόσο για την απόκτηση εποπτείας των ποιοτικών χαρακτηριστικών κάθε συνάρτησης ξεχωριστά, όσο και για τη μαθηματική ανάλυση αυτών των χαρακτηριστικών. Στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, δηλαδή για απεικονίσεις της μορφής $f: I \rightarrow J$, όπου I, J υποσύνολα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , δύο από τις συνηθέστερες μεθόδους αναπαράστασης είναι οι εξής.

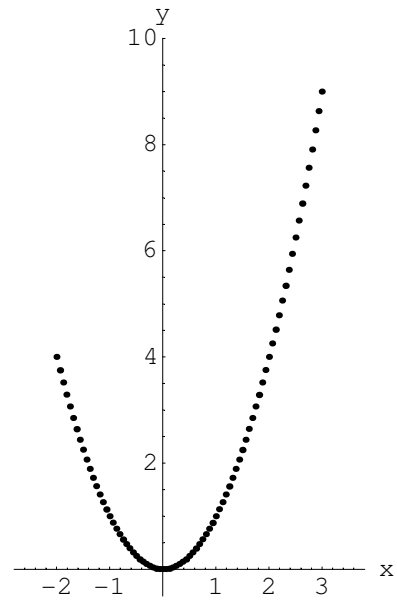
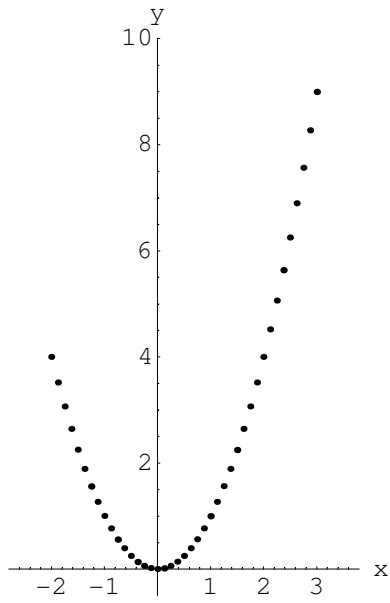
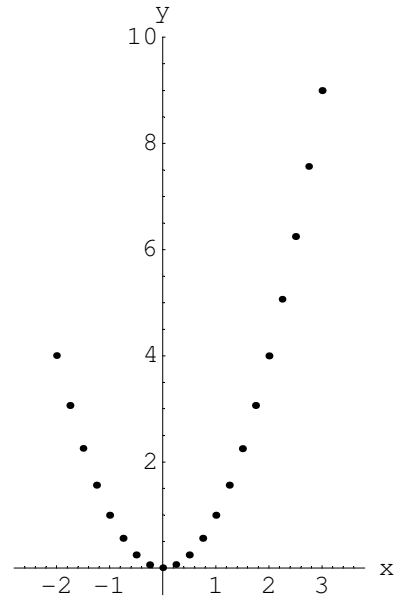
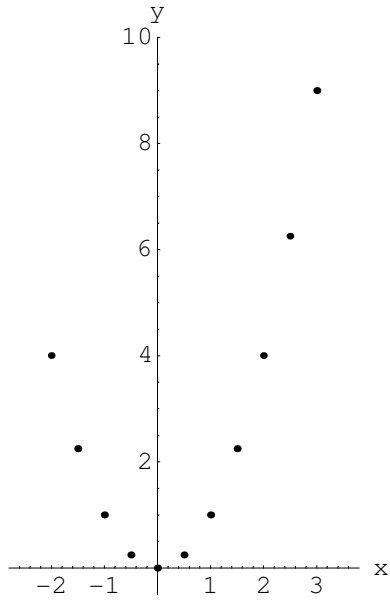
Ας υποθέσουμε γ.π. ότι έχουμε να κάνουμε με τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$. Για να δώσουμε μια εικόνα της συμπεριφοράς αυτής της συνάρτησης στο διάστημα $I = [-2, 3]$, επιλέγουμε πρώτα μερικά σημεία του διαστήματος I μιας βαθμονομημένης ευθείας x , ας πούμε τα $-2, -1, 0, 1, 2$ και 3 . Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα παραπάνω σημεία και, τέλος, αναγράφουμε αυτές τις τιμές δίπλα στα αντίστοιχα σημεία της ευθείας x .



Ένας άλλος, ο καθιερωμένος θα 'λέγαμε, τρόπος με τον οποίο γίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής είναι ο εξής: Αν έχουμε ονομάσει την ανεξάρτητη μεταβλητή x και θέλουμε να δείξουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα I , αρχικά επιλέγουμε ένα υποσύνολο σημείων του I , ας πούμε τα $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $x - y$ και να ξεχωρίζουμε τα σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου που έχουν ως συντεταγμένες τα ζευγάρια $(x_j, y_j) = (x_j, f(x_j))$, $j = 1, 2, \dots, m$. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα αυτής της κατασκευής όταν $f(x) = x^2$, $I = [-2, 3]$ και $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$ και $x_6 = 3$.



Με την βοήθεια των σύγχρονων προσωπικών υπολογιστών μπορούμε να αυξάνουμε συνεχώς το πλήθος των σημείων στα οποία υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης και καταγράφουμε τα αντίστοιχα σημεία της περιοχής του γραφήματος. Οι επόμενες εικόνες δείχνουν το αποτέλεσμα μιας τέτοιας επεξεργασίας της συνάρτησης που μελετάμε.

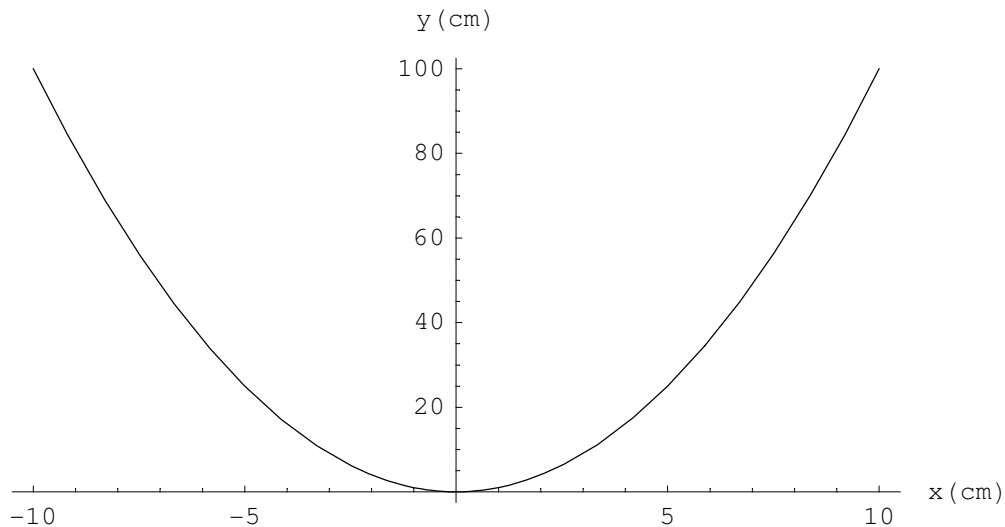


Το ζήτημα της κλίμακας

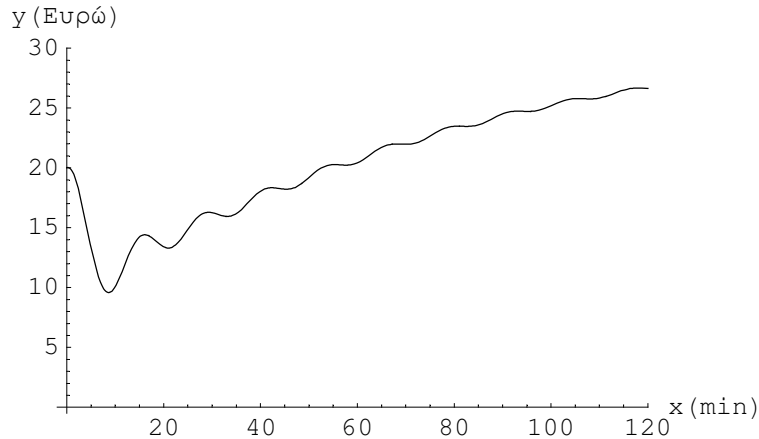
Οι άξονες x και y βαθμονομούνται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, ακόμα και όταν τόσο η μεταβλητή x όσο και οι τιμές της συνάρτησης $f(x)$ ανήκουν στην ίδια κατηγορία ποσοτήτων, γ.π. είναι και οι δύο μήκη μετρημένα σε cm. Αυτό επιβάλλεται από το γεγονός ότι, στο διάστημα που εξετάζουμε, η συνάρτηση μπορεί να παίρνει πολύ μεγάλες (απόλυτες) τιμές. Στην περίπτωση της $f(x) = x^2$, αυτό ισχύει σε διαστήματα που περιλαμβάνουν αριθμούς μεγαλύτερους σε απόλυτη τιμή από το 5. Αν θέλαμε να δώσουμε μια πιστή αναπαράσταση της παραπάνω συνάρτησης στο διάστημα $I = [-10 \text{ cm}, 10 \text{ cm}]$, η σελίδα αυτού του βιβλίου δε θα τη χωρούσε με τίποτα.

Το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίζουμε και με το γράφημα μιας συνάρτησης που δεν παίρνει μεγάλες τιμές αλλά θέλουμε να καλύψουμε ένα μεγάλο διάστημα του πεδίου ορισμού της. Αυτό θα συνέβαινε γ.π. με τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 1/(1+x)^2$.

Το πρόβλημα που μόλις περιγράψαμε αντιμετωπίζεται με το να διαλέξουμε κατάλληλα την "κλίμακα" των αξόνων x και y . Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι, σ' ένα τμήμα πραγματικού μήκους ενός cm του άξονα x αντιστοιχούμε ένα διάστημα τιμών της μεταβλητής x ίσο προς κ . Ανάλογα, σ' ένα τμήμα πραγματικού μήκους ενός cm του άξονα y αντιστοιχούμε ένα διάστημα τιμών της συνάρτησης $f(x)$ ίσο προς λ . Οι αριθμοί κ, λ λέγονται συντελεστές κλίμακας του διαγράμματος. Στο επόμενο διάγραμμα $(\kappa, \lambda) = (1, 10)$.



Τέλος, οι αντιστοιχίες του τύπου $|\Delta x| = \kappa \mu\mu \longleftrightarrow 1 \text{ cm}$, $|\Delta y| = \lambda \mu\mu \longleftrightarrow 1 \text{ cm}$ μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε διαγράμματα σαν το ακόλουθο, όπου η μεταβλητή x παριστάνει μια φυσική ποσότητα που μετριέται σε μονάδες sec και οι τιμές της $f(x)$ παριστάνουν μια οικονομική ποσότητα που μετριέται σε Ευρώ.



Με τη βοήθεια γραφημάτων μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα και τον τρόπο υπολογισμού του μήκους μιας καμπύλης του Ευκλείδειου επίπεδου και του εμβαδού περιοχών που δεν περικλείονται από ευθύγραμμα σχήματα. Για παράδειγμα, ένας κύκλος ακτίνας r μπορεί να οριστεί σαν το σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$. Άρα για τα σημεία του κύκλου όπου $y \geq 0$, $y = f(x) \equiv \sqrt{r^2 - x^2}$. Το εμβαδόν του αντίστοιχου ημικύκλιου δίνεται από την έκφραση

$$E = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = 2 r^2 (\pi/4) = \pi r^2 / 2.$$

1.7 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων δύο μεταβλητών

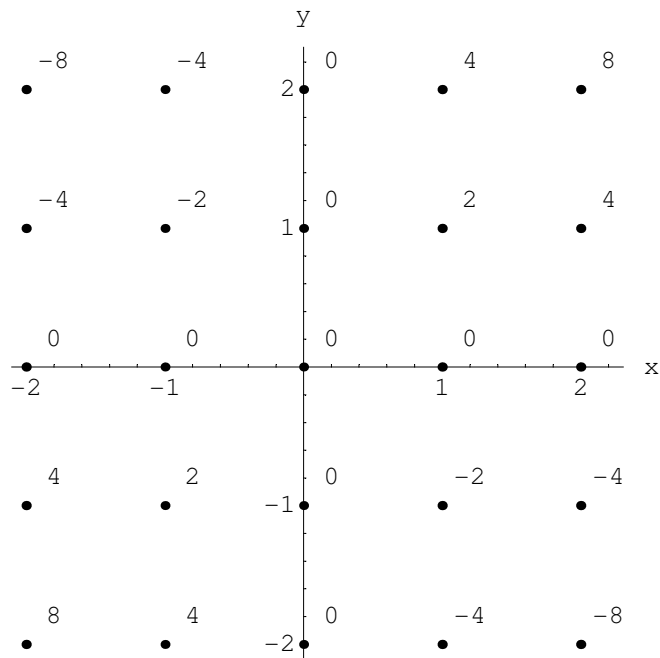
Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το επίπεδο \mathbb{R}^2 και τύπο $f(x, y) = 2xy$. Επειδή τα στοιχεία του \mathbb{R} ονομάζονται και *βαθμωτά*, η παραπάνω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται *βαθμωτό πεδίο του \mathbb{R}^2* .

Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε βαθμωτά πεδία που ορίζονται μόνο σε μια περιοχή του επίπεδου, αντί σε ολόκληρο τον \mathbb{R}^2 . Ένα παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x, y) = 1 + x + y$ και πεδίο ορισμού την ορθογώνια περιοχή $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$. Συχνά, βαθμωτά πεδία αυτού του είδους χρησιμεύουν για την αναπαράσταση μιας φυσικής ποσότητας, γ.π. της θερμοκρασίας, σε μια γεωγραφική περιοχή που αντιστοιχεί στη γεωμετρική περιοχή Ω .

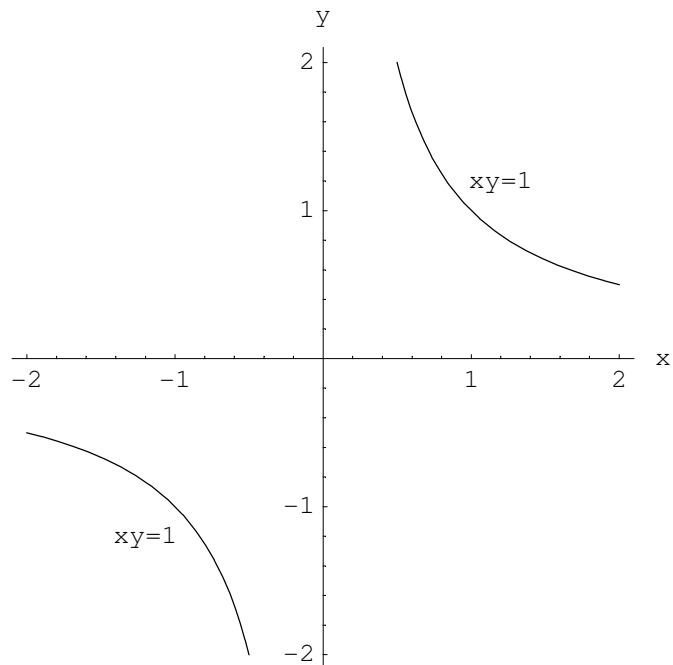
Άλλοτε, πάλι, ο περιορισμός σε κάποιο γνήσιο υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^2 επιβάλλεται από το γεγονός ότι ο τύπος της συνάρτησης που υπεισέρχεται στον ορισμό του πεδίου δεν έχει νόημα σε όλα τα σημεία του επίπεδου. Για παράδειγμα, ο τύπος $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ δεν έχει νόημα στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Συνεπώς, ο τύπος $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του βαθμωτού πεδίου $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ στην περιοχή $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ή σε κάποιο τμήμα αυτής της περιοχής, όχι όμως και σ' ολόκληρο τον \mathbb{R}^2 . Ανάλογα, ο τύπος $\varphi(x, y) = 1/(x - y)$ δεν έχει νόημα κατά μήκος της ευθείας $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Άρα με βάση τον τύπο $\varphi(x, y) = 1/(x - y)$ μπορούμε να ορίσουμε ένα βαθμωτό πεδίο στο υποσύνολο $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ή σε κάποια μικρότερη περιοχή του \mathbb{R}^2 .

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να δώσουμε μια γραφική αναπαράσταση ενός βαθμωτού πεδίου μιας περιοχής Ω του \mathbb{R}^2 . Ένας απ' αυτούς έγκειται στο να καταγράψουμε την τιμή της συνάρτησης $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ σε ορισμένα από τα σημεία της Ω , όπως στο ακόλουθο σχήμα που αφορά τη συνάρτηση $f(x, y) = 2xy$ στην περιοχή

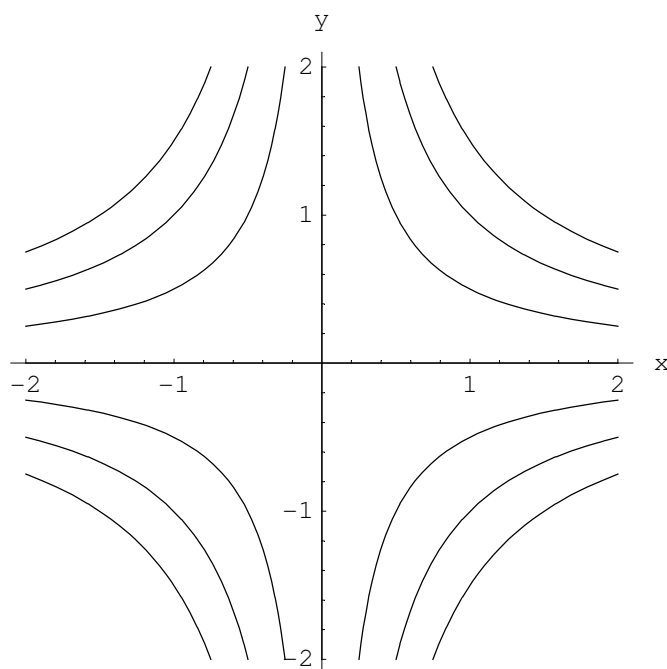
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$



Ένας άλλος τρόπος είναι το να καταγράψουμε τα σημεία της Ω στα οποία η συνάρτηση $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ παίρνει ορισμένες από τις τιμές της. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x, y) = 2xy$ παίρνει την τιμή 2 στο σημείο $(x, y) = (1, 1)$, αλλά και σε όλα τα σημεία των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση $xy = 1$. Αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω στις δυο καμπύλες (υπερβολές) του επόμενου σχήματος.



Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι καμπύλες της περιοχής Ω κατά μήκος των οποίων η $f(x, y) = 2xy$ παίρνει τις τιμές $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ και 3 . (Σημειώστε ότι $xy = 0$ κατά μήκος του άξονα x , όπου $y = 0$, όσο και κατά μήκος του άξονα y , όπου $x = 0$).



Οι τελευταίες παρατηρήσεις αποτελούν τη βάση για την εισαγωγή στο Ευκλείδειο επίπεδο άλλων συστημάτων συντεταγμένων, πέρα των Καρτεσιανών. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, με τύπο $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, όπου οι x, y

παριστάνουν Καρτεσιανές συντεταγμένες. Τα υποσύνολα του \mathbb{R}^2 που ορίζονται από τη συνθήκη $f(x, y) = r$, είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των Καρτεσιανών αξόνων και ακτίνα r .

Από την άλλη μεριά, η συνάρτηση $g: \Omega_g \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, με τύπο $g(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$, είναι τέτοια που η συνθήκη $g(x, y) = \theta$ ορίζει ημιευθείες οι οποίες ξεκινάνε αλλά δεν περιέχουν την αρχή των αξόνων και σχηματίζουν γωνία θ με τον άξονα x .

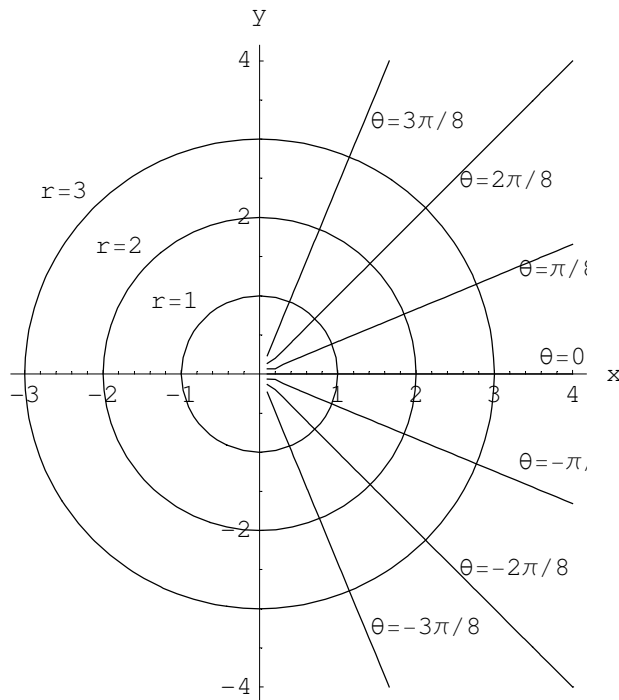
Από κάθε σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ διέρχεται μία μόνο ευθεία και ένας μόνο κύκλος, δηλαδή στο πεδίο ορισμού της η απεικόνιση $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Omega = \Omega_f \cap \Omega_g$, με τύπο $\Phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Αυτή μπορεί να επεκταθεί σε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση της περιοχής $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$ στην περιοχή $\Pi := \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ του \mathbb{R}^2 , νοούμενου ως το σύνολο των διαταγμένων ζευγαριών πραγματικών αριθμών.

Η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\Phi: \Omega \rightarrow \Pi$ που ορίζεται από τους τύπους

$$(7.1\alpha) \quad r = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = g(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$$

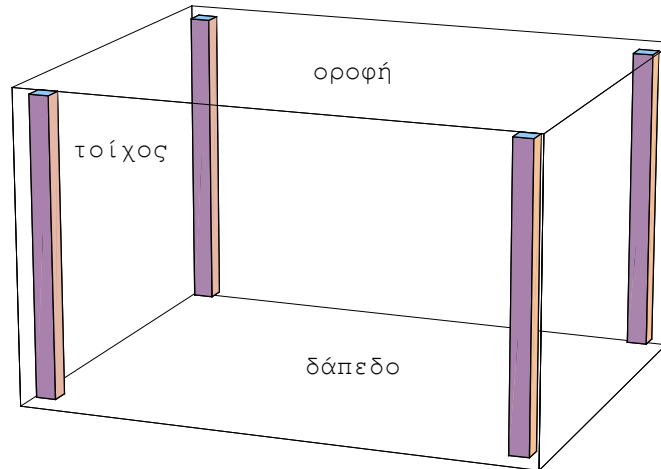
$$(7.1\beta) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

ισοδυναμεί με την κατασκευή των λεγόμενων πολικών συντεταγμένων (r, θ) του Ευκλείδειου επίπεδου. Πρέπει να σημειωθεί ότι αυτές οι συντεταγμένες δεν καλύπτουν όλα ανεξαιρέτως τα σημεία του επίπεδου.



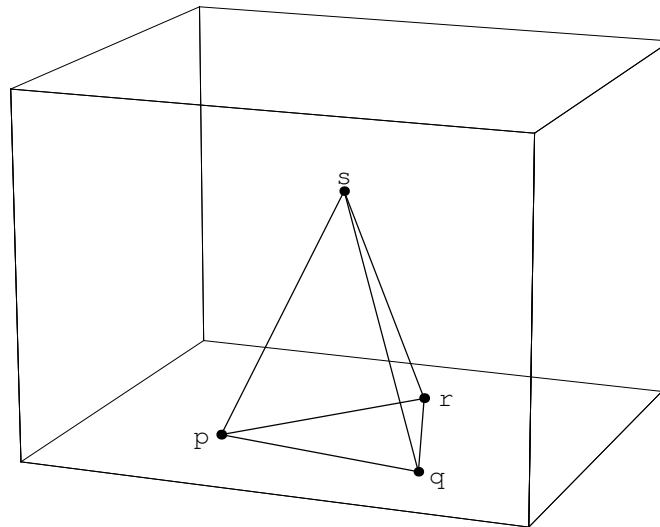
1.8 Ο Ευκλείδειος χώρος

Συγκεντρώστε την προσοχή σας στο δωμάτιο που βρίσκεστε αυτή τη στιγμή. Το το πάτωμα (δάπεδο), το ταβάνι (οροφή) και οι τέσσεροι μεταξύ τους τοίχοι αποτελούν φυσικά παραδείγματα επίπεδων τμημάτων. Το επόμενο σχήμα αποτελεί μια γραφική αναπαράσταση του δωματίου σας. Σημειώστε ότι πρόκειται για ένα επίπεδο σχήμα που κατασκευάζεται με βάση συγκεκριμένες συμβάσεις για το πώς παριστάνεται καθένα από τα έξι επίπεδα τμήματα που αναφέραμε παραπάνω - δάπεδο, οροφή και 4 τοίχοι.



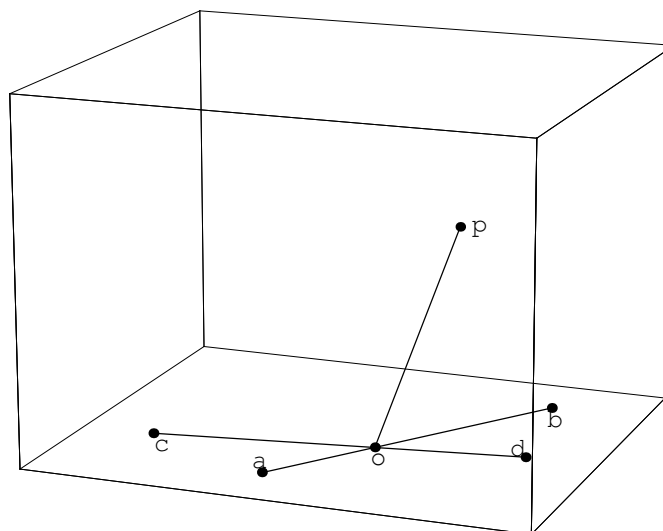
Το δωμάτιό σας αποτελεί παράδειγμα ενός τμήματος του φυσικού χώρου ή χωρικού τμήματος. Η μαθηματική αναπαράσταση ενός χωρικού τμήματος κατασκευάζεται κατ' αναλογία προς εκείνη του επίπεδου τμήματος, την οποία παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Αναλυτικότερα, τα πράγματα έχουν ως εξής.

Τα στοιχεία ενός χωρικού τμήματος, S , λέγονται κι αυτά σημεία. Για να έχουμε εποπτεία του τυχαίου σημείου p του χωρικού τμήματος, μπορούμε να το ταυτίζουμε με ένα μικρό αντικείμενο του δωματίου μας, γ.π. με έναν κόκο σκόνης που κάθετα πάνω στο τραπέζι μας. Δυο σημεία p, q του S ορίζουν το ευθύγραμμο τμήμα pq , ή qp και την αντίστοιχη ευθεία γραμμή που περιέχει το pq . Μαζί με ένα τρίτο σημείο r που δεν ανήκει στην ευθεία των p, q ορίζουν ένα επίπεδο - το επίπεδο που περιέχει το τρίγωνο pqr . Αν θεωρήσουμε και ένα τέταρτο σημείο s , το οποίο δεν περιέχεται σ' αυτό το επίπεδο, τότε ορίζεται ένα τμήμα του χώρου που περιέχεται ανάμεσα στα τρίγωνα pqr, pqs, qrs , και prs .

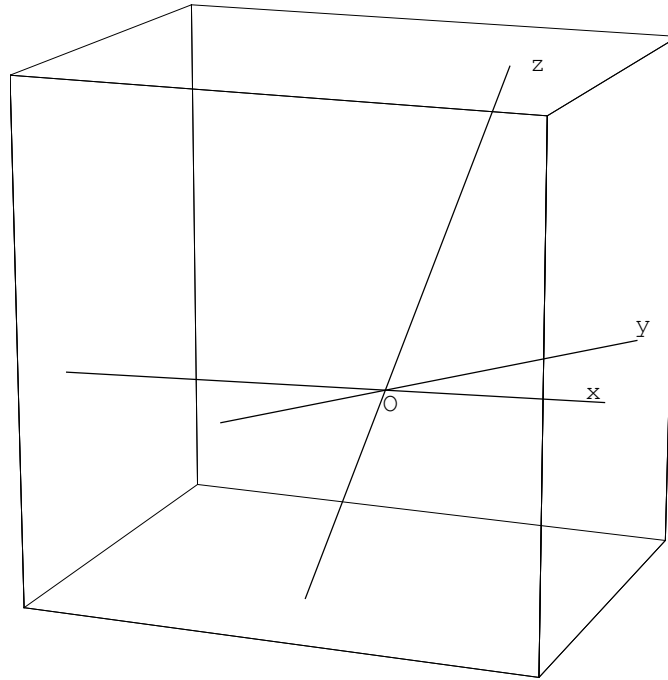


Το σχήμα που προκύπτει ονομάζεται τετράεδρο.

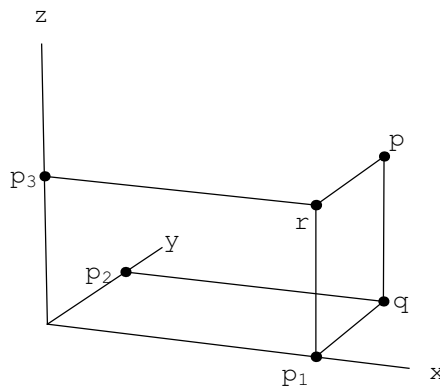
Στο σχήμα που ακολουθεί, τα ευθύγραμμα τμήματα ab και cd , που τέμνονται στο σημείο o , δεν είναι κάθετα μεταξύ τους. Το ευθύγραμμο τμήμα op δεν περιέχεται στο επίπεδο που ορίζουν τα ab και cd κι ούτε είναι κάθετο προς αυτά τα δύο.



Παρ' όλ' αυτά, οι τρεις ευθείες x , y και z που ορίζουν τα ευθύγραμμα τμήματα ab , cd , και op (βλ. επόμενο σχήμα) μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως άξονες, δηλαδή ως βάση για την κατασκευή μιας αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας ανάμεσα στα σημεία του χώρου και σε διαταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών.



Αφήνουμε αυτή την κατασκευή για άσκηση του αναγνώστη και προχωράμε στην κατασκευή ενός Καρτεσιανού συστήματος αξόνων, αφού είναι το είδος του συστήματος που χρησιμοποιείται συνηθέστερα. Θεωρούμε για τον σκοπό αυτό τις ευθείες x , y και z που είναι ανά δύο κάθετες μεταξύ τους, όπως στο σχήμα, και το τυχαίο σημείο p του χώρου.



Το σημείο p και η ευθεία z ορίζουν ένα επίπεδο. Μέσα σ' αυτό το επίπεδο και από το p φέρνουμε παράλληλη προς την ευθεία z . Αυτή τέμνει αναγκαστικά το επίπεδο που ορίζουν οι x και y σε κάποιο σημείο, ας το πούμε q . Ανάλογα, το σημείο p και η ευθεία y ορίζουν ένα δεύτερο επίπεδο.

Σ' αυτό το επίπεδο κι από το σημείο p φέρνουμε παράλληλη προς την ευθεία y . Αυτή τέμνει αναγκαστικά το επίπεδο που ορίζουν οι x και z , ας πούμε στο σημείο r .

Στη συνέχεια, από το σημείο q φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y κι άλλη μία παράλληλη προς τον άξονα x . Η πρώτη απ' αυτές τέμνει τον άξονα x σε κάποιο σημείο p_1 , ενώ η δεύτερη τέμνει τον άξονα y σε κάποιο σημείο p_2 . Τέλος, από το σημείο r φέρνουμε παράλληλη προς την ευθεία x . Αυτή θα συναντήσει τον άξονα z σε κάποιο σημείο p_3 . Με αυτό τον τρόπο έχουμε αντιστοιχίσει το σημείο p του χώρου με μια τριάδα σημείων (p_1, p_2, p_3) που ανήκουν στους άξονες x, y και z , αντίστοιχα. Αυτή η αντιστοιχία $p \rightarrow (p_1, p_2, p_3)$ είναι μονοσήμαντη. Μάλιστα, εύκολα πείθεται κανείς ότι η παραπάνω διαδικασία αντιστρέφεται αμέσως και ορίζει τη μονοσήμαντη αντιστοιχία μιας τριάδας σημείων (p_1, p_2, p_3) που ανήκουν, αντίστοιχα, στους άξονες x, y και z προς ένα σημείο p του χώρου.

Ευθύς μόλις βαθμονομήσουμε τους άξονες x, y και z , η αντιστοιχία που μόλις κατασκευάσαμε μετατρέπεται σε αντιστοιχία των σημείων του χώρου προς διαταγμένες τριάδες πραγματικών αριθμών. Γιατί τότε το σημείο p_1 αντιστοιχείται στον αριθμό $x(p_1)$, το p_2 αντιστοιχείται στον αριθμό $x(p_2)$ και, τέλος, το σημείο p_3 αντιστοιχείται στον αριθμό $x(p_3)$. Με άλλα λόγια, η βαθμονόμηση των αξόνων ορίζει την αντιστοιχία

$$(8.1) \quad (p_1, p_2, p_3) \rightarrow (x(p_1), y(p_2), z(p_3)) \in \mathbb{R}^3,$$

άρα και την αντιστοιχία

$$(8.2) \quad p \rightarrow (x(p), y(p), z(p)) \equiv (x(p_1), y(p_2), z(p_3)) \in \mathbb{R}^3.$$

Θα πρέπει, βέβαια, να σημειωθεί ότι αυτή η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία βασίζεται σε κάποια συγκεκριμένη επιλογή ενός συστήματος τριών ορθογώνιων αξόνων. Συνακόλουθα, μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρες τέτοιες αντιστοιχίες του Ευκλείδειου χώρου προς το σύνολο \mathbb{R}^3 , μία για κάθε σύστημα τριών ευθειών που είναι ανά δύο κάθετες μεταξύ τους.

Όπως στο \mathbb{R}^2 , έτσι και στο σύνολο \mathbb{R}^3 μπορούμε να ορίσουμε την πράξη της πρόσθεσης δύο στοιχείων του, καθώς και του πολλαπλασιασμού ενός στοιχείου του μ' έναν πραγματικό αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, αν $(x, y, z), (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$, τότε το άθροισμά τους ορίζεται από τον τύπο

$$(8.3) \quad (x, y, z) + (r, s, t) := (x + r, y + s, z + t).$$

Αν από την άλλη $a \in \mathbb{R}$ και $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, τότε ως γινόμενό τους ορίζεται το στοιχείο

$$(8.4) \quad a(x, y, z) := (ax, ay, az)$$

του \mathbb{R}^3 . Όταν νοείται ως εφοδιασμένο με αυτές τις δυο πράξεις, το σύνολο \mathbb{R}^3 λέγεται (τρισδιάστατος) *διανυσματικός χώρος* και τα στοιχεία του *διανύσματα*.

Από αυτούς τους ορισμούς έπεται αμέσως ότι

$$(8.5) \quad (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$$

και

$$(8.6) \quad (x, 0, 0) = x(1, 0, 0), \quad (0, y, 0) = y(0, 1, 0), \quad (0, 0, z) = z(0, 0, 1).$$

Κατά συνέπεια,

$$(8.7) \quad (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

Αυτή η σχέση παίρνει τη μορφή

$$(8.8) \quad \vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

αν θέσουμε

$$(8.9) \quad \vec{v} = (x, y, z), \quad \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Όταν, με βάση ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων $x-y-z$, το σύνολο \mathbb{R}^3 έχει αντιστοιχηθεί προς τον Ευκλείδειο χώρο E , τότε μπορούμε να παριστάνουμε το στοιχείο $\vec{v} = (x, y, z)$ του \mathbb{R}^3 είτε με το σημείο p που έχει συντεταγμένες (x, y, z) , είτε με ένα βέλος που έχει ως βάση την αρχή των αξόνων και κορυφή το σημείο p . Αυτό το βέλος δεν είναι παρά ένα **προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα**.

Ως **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\vec{v} = (x, y, z)$ και $\vec{w} = (r, s, t)$ του \mathbb{R}^3 ορίζεται ο πραγματικός αριθμός

$$(8.10) \quad \vec{v} \cdot \vec{w} := xr + ys + zt.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μηδενίζεται εάν και μόνο όταν τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα είναι μεταξύ τους κάθετα. Γιαυτό, όταν $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, τα διανύσματα \vec{v} , \vec{w} λέγονται **ορθογώνια**. Παράδειγμα ορθογώνιων διανυσμάτων αποτελούν τα \vec{e}_1 , \vec{e}_2 και \vec{e}_3 που ορίσαμε παραπάνω.

Ας υποθέσουμε ότι, ως προς κάποιο συγκεκριμένο Καρτεσιανό σύστημα αξόνων, οι συντεταγμένες ενός σημείου p είναι (x, y, z) . Τότε, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, είναι εύκολο ν' αποδειχτεί ότι η απόσταση του σημείου p από την αρχή των αξόνων είναι ίση προς $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Συνακόλουθα, η απόσταση δύο τυχαίων σημείων p_1 και p_2 με συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) , αντίστοιχα, δίνεται από την έκφραση

$$(8.11) \quad d(p_1, p_2) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \\ \equiv \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, ορίζουμε ως **μήκος του διανύσματος** $\vec{v} = (x, y, z)$ τον μη αρνητικό αριθμό

$$(8.12) \quad |\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Αν λοιπόν τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ διαφέρουν κατά

$$(8.13) \quad \vec{v} := \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) \\ = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) \equiv \Delta x + \Delta y + \Delta z.$$

τότε

$$(8.14) \quad |\vec{v}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \equiv d(p_1, p_2).$$

Από αυτές τις παρατηρήσεις συνάγεται το συμπέρασμα ότι, εφοδιασμένος με την έννοια του εσωτερικού γινόμενου δύο στοιχείων του και του μήκους ενός διανύσματος, ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^3 είναι καθ' όλα ισοδύναμος με τον Ευκλείδειο χώρο E . Γι' αυτό, ο \mathbb{R}^3 συχνά αναφέρεται σαν **τρισδιάτατος Ευκλείδειος χώρος**.

2. Κίνηση

2.1 Συστήματα αναφοράς

Όπως έχουμε τονίσει, οι έννοιες της φυσικής αποτελούν τα νοητικά εργαλεία με τα οποία προσπαθούμε να οικειοποιηθούμε, δηλαδή να καταλάβουμε, τον υλικό κόσμο που εμείς οι ίδιοι έχουμε "διασπάσει" σε στοιχεία που ονομάζουμε σώματα. Η έννοια του χώρου, ειδικότερα, μας επιτρέπει να εκφράσουμε μια πρώτη εικόνα για τα σώματα και τη μεταξύ τους σχέση. Πιο συγκεκριμένα, η φυσικο-μαθηματική έννοια του χώρου μας επιτρέπει να περιγράψουμε αναλυτικά το μέγεθος, τη μορφή και την εγγύτητα των σωμάτων.

Αυτό επιτυγχάνεται με μια νοητική διαδικασία που απαρτίζεται από δύο στάδια. Αρχικά, ανακατασκευάζουμε κάθε σώμα θεωρώντας ότι αποτελείται από άπειρα στοιχεία που τα ονομάζουμε *σωμάτια*. Στη συνέχεια ταυτίζουμε αυτά τα στοιχεία 1-1 με σημεία μιας περιοχής του Ευκλείδειου χώρου, \mathbb{R}^3 . Αυτός είναι ο λόγος που τα σωμάτια λέγονται και *υλικά σημεία*.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τα υλικά σημεία ως μοντέλα ολόκληρων σωμάτων. Αυτό γίνεται όταν οι διαστάσεις του σώματος που μας ενδιαφέρει είναι αμελητέες σε σύγκριση με εκείνες άλλων σωμάτων που εμπλέκονται στο φυσικό φαινόμενο που αναλύουμε. Άλλες πάλι φορές, το μοντέλο του υλικού σημείου υιοθετείται σαν μια πρώτη προσέγγιση ενός σώματος με μη μηδενικό όγκο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα και των δύο αυτών προσεγγίσεων είναι η αναπαράσταση της γης ως υλικού σημείου, όταν μελετάμε την κίνησή της γύρω από τον ήλιο.

Στην πραγματικότητα, κάθε υλικό σημείο ταυτίζεται με μια άπειρη αλυσίδα από σημεία κι αυτό έχει να κάνει με την έννοια του χρόνου.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας σταθούμε στο δωμάτιο στο οποίο βρίσκεστε αυτή τη στιγμή και ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει ένα σύστημα Καρτεσιανών αξόνων $x y z$. Τότε, κάθε στοιχείο ενός από τα αντικείμενα του δωματίου σας αντιστοιχίζεται αυτόματα σε κάποιο σημείο του χώρου. Για παράδειγμα, το στοιχείο σ αντιστοιχίζεται στο σημείο p . Με τη σειρά του, το p αντιστοιχίζεται στο στοιχείο $(x(p), y(p), z(p))$ του \mathbb{R}^3 .

Όμως, αν αυτό ίσχυε απολύτως, τότε ... ο κόσμος δεν θα υπήρχε! Θέλουμε να πούμε ότι, αν η παραπάνω αντιστοιχία ήταν απόλυτη, τότε όλα τα σώματα θα είχαν πάντα το ίδιο σχήμα και την ίδια μεταξύ τους απόσταση αιωνίως. Θα είχαμε να κάνουμε με ένα στατικό σύμπαν, έναν νεκρό κόσμο. Προφανώς, αυτή η εικόνα δεν έχει καμία σχέση με αυτό που ζούμε καθημερινά όλοι μας.

Αντίθετα, εκείνο που παρατηρούμε είναι το εξής: Παρόλο που ορισμένα σώματα φαίνονται να διατηρούν το σχήμα τους και την μεταξύ τους απόσταση, τα περισσότερα αλλάζουν συνεχώς μορφή και θέση. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην έννοια του χρόνου. Άρα, ως έννοια, ο χρόνος

άρρηκτα δεμένος με το χώρο. Και οι δυο μαζί, εκφράζουν την αντιφατική διαπίστωση ότι, “όλα τριγύρω αλλάζουν κι όλο τα ίδια μένουν”. Τον ακατάλυτο δεσμό του αμετάβλητου με την διαρκή αλλαγή -το "τα πάντα ρει" του Ηράκλητου. Με άλλα λόγια, στην περιγραφή του φυσικού γίνεσθαι, τα μέλη του ζευγαριού χώρος-χρόνος υπεισέρχονται όντας σε διαλεκτική σύζευξη κι όχι σε καθεστώς αυτονομίας.

Για να αποσαφηνίσουμε την την έννοια του χρόνου, θα πρέπει προχωρήσουμε σε μια τεχνητή αναπαράσταση του τρόπου με τον οποίο αυτή δημιουργήθηκε. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι ένα άρρηκτα δεμένο με την ιστορία του ανθρώπινου είδους σώμα, ο ήλιος, αλλάζει συνεχώς θέση στον ουρανό: Κάνει την εμφάνισή του το πρωί, στο σημείο του ορίζοντα που λέμε ανατολή, για να διαγράψει μια ημικυκλική πορεία στον ουράνιο θόλο και να χαθεί τελικά πίσω από το σημείο που λέμε δύση.

Αυτή η κίνηση, δηλαδή η αλλαγή θέσης ως προς τα στοιχεία της γης, λαβαίνει χώρα παράλληλα με άλλες μετακινήσεις, οι οποίες επαναλαμβάνονται πολλές φορές ανάμεσα στην ανατολή και τη δύση του ήλιου. Εμείς οι ίδιοι, γ.π., από το πρωί που θα ξυπνήσουμε ως τη στιγμή που θα πέσουμε για ύπνο, μετακινούμαστε επανειλημμένα μέσα σ’ ένα δωμάτιο του σπιτιού μας, από το ένα δωμάτιο σε άλλο, βγαίνουμε για να πάμε στη δουλειά, στο ίδρυμα όπου σπουδάζουμε, για ψώνια και για διασκέδαση, αλλάζοντας συνεχώς θέση στο σπίτι και στην πόλη, ή κι έξω απ’ αυτήν. Αυτό το πήγαιν’-έλα ολοκληρώνεται αρκετές φορές ανάμεσα σε μια ανατολή του ήλιου και την επόμενη. Έτσι, αποκτάμε την αίσθηση ότι, ορισμένες μετακινήσεις μπορούν να επαναληφθούν πολλές φορές πριν ολοκληρωθεί η κίνηση του ήλιου στον ουράνιο θόλο.

Αυτή η αίσθηση αποτυπώνεται στην έννοια του χρόνου με την οποία δίνουμε ένα μαθηματικό μέτρο σύγκρισης των δύο κινήσεων. Για τον σκοπό αυτό, μια από τις επαναλαμβανόμενες κινήσεις υιοθετείται ως μονάδα μέτρησης, οπότε όλες οι άλλες αποκτάνε μέγεθος και γίνονται κλάσματα ή πολλαπλάσια της πρώτης.

Για παράδειγμα, μια κίνηση που μπορεί να επαναληφθεί ακριβώς 24 φορές ανάμεσα σε μια ανατολή του ήλιου και την επόμενη γίνεται, ως χρονικό μέγεθος, το 1/24 της ημέρας. Αυτό το λέμε και ώρα και το συμβολίζουμε με h (το αρχικό γράμμα της αγγλικής λέξης hour=ώρα). Για κινήσεις που επαναλαμβάνονται πολλές φορές μέσα σε μια ώρα, χρησιμοποιούμε τις υποδιαιρέσεις του λεπτού, min, και του δευτερόλεπτου, sec: $1\text{min}=(1/60)\text{h}$ και $1\text{sec}=(1/60)\text{min}$.

Αντίθετα, υπάρχουν κινήσεις που ολοκληρώνονται αφού περάσουν πολλές ημέρες, όπως είναι η περιστροφή της γης γύρω από τον ήλιο που συνδέεται με τις αλλαγές του φυσικού μας περιβάλλοντος τις οποίες ονομάζουμε εποχές. Σε τέτοιες περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε τα πολλαπλάσια της ημέρας που ονομάζονται 1έτος=365 ημέρες, 1αιώνας=100έτη κ.λ.π.

Για τον αυτόματο υπολογισμό του χρονικού μέτρου μιας κίνησης αναπτύχθηκαν όργανα μεγάλης ακρίβειας που λέγονται **χρονόμετρα** ή **ρολόγια**. Στην πραγματικότητα, ένα χρονόμετρο "μεταγράφει" κάποια εσωτερική του κίνηση σε πραγματικούς αριθμούς. Αυτό μας οδηγεί στο να υιοθετήσουμε μια απόλυτη εικόνα για το χρόνο και να λέμε γ.π. ότι η ώρα είναι 10, ο ήλιος ανέτειλε στις 7 κ.λ.π. Με άλλα λόγια, ο ήλιος ανέτειλε όταν τα ρολόγια έδειχναν τον αριθμό 8h. Λέμε επίσης ότι, το λεωφορείο ξεκίνησε στις 9 κι έφτασε στο προορισμό του στις 12. Αυτό σημαίνει ότι, με βάση τις αντίστοιχες ενδείξεις κάποιου ρολογιού, στο γεγονός της αναχώρησης

αντιστοιχούμε τον αριθμό 9h και στην άφιξη στον προορισμό του αντιστοιχούμε τον αριθμό 12h. Έτσι, η κίνηση του λεωφορείου από την αφετηρία ως τον τερματικό σταθμό αποκτάει ως χρονικό μέτρο τον αριθμό 3h.

Τα κοινά ρολόγια είναι κατασκευασμένα έτσι που η ένδειξή τους, t , να περιορίζεται στο διάστημα $0h \leq t \leq 12h$. Γι' αυτό, τις ενδείξεις των ρολογιών δεν τις χρησιμοποιούμε με την απόλυτη έννοια για να μετρήσουμε τη χρονική διάρκεια μιας κίνησης. Αν γ.π. το λεωφορείο που αναφέραμε παραπάνω ξεκινήσει το ταξίδι της επιστροφής του στις 6h το απόγευμα και φτάσει στον αρχικό σταθμό στις 9h το βράδυ, δεν θα πούμε ότι η διάρκεια του συνολικού ταξιδιού του είναι 0h, απλώς και μόνο επειδή η ένδειξη των ρολογιών είναι ίδια στην αρχή και στο τέλος της διαδρομής του. Θα προσθέσουμε τις 12h που "έφαγαν" τα ρολόγια με το μεσημεριανό μηδενισμό της ένδειξής τους. Το ίδιο θα κάνουμε και για τα επόμενα ταξίδια του λεωφορείου, οπότε οι κινήσεις του θα αντιστοιχίζονται σε συνεχώς αυξανόμενους πραγματικούς αριθμούς, με άλλα λόγια στο διάστημα $t \geq 0h$ της πραγματικής ευθείας \mathbb{R} .

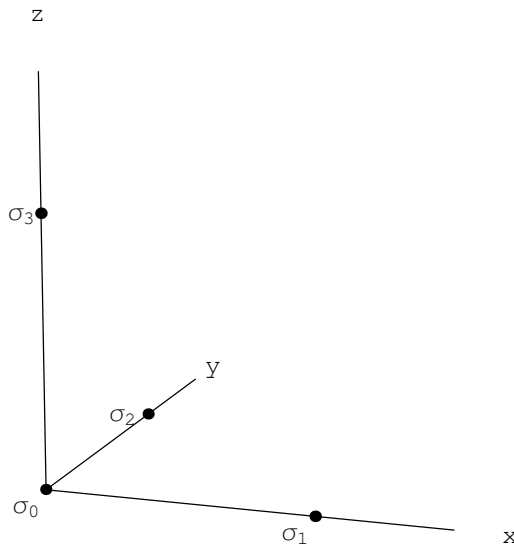
Αλλά το λεωφορείο του παραδείγματός μας υπήρχε και την προηγούμενη ημέρα από εκείνη που το παρατηρήσαμε στο μετ' επιστροφής ταξίδι του, αυτό που διάρκεσε 12h. Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε το $12h = 0h$ που έδειξαν κάποια στιγμή της ενδιάμεσης νύχτας τα ρολόγια ως την αρχή του χρόνου, τότε στις προηγούμενες κινήσεις του λεωφορείου θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε αρνητικές χρονικές τιμές.

Με βάση αυτή την παρατήρηση, δεχόμαστε ως αξίωμα την ακόλουθη εικόνα για την έννοια του χρόνου:

Με την βοήθεια οργάνων τα οποία ονομάζουμε ρολόγια ή χρονόμετρα, τα γεγονότα που συμβαίνουν γύρω μας μπορούν να αντιστοιχηθούν στην πραγματική ευθεία \mathbb{R} .

Όταν βαδίζουμε στην πόλη ή όταν περπατάμε μέσα στο δωμάτιό μας, θεωρούμε ότι κάποια αντικείμενα παραμένουν ακίνητα. Στη δεύτερη γ.π. περίπτωση, για να μιλήσουμε για τη δική μας κίνηση, πρέπει να θεωρήσουμε το πάτωμα και τους τοίχους του δωματίου, τουλάχιστον, ως ακίνητα. Ένα τέτοιο σύνολο από αντικείμενα που θεωρούνται ως ακίνητα κατά την περιγραφή της κίνησης όλων των άλλων σωμάτων ονομάζεται *σύστημα αναφοράς*.

Στην πραγματικότητα, για να ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς αρκούν τέσσερα μη συνεπίπεδα σώματα που αξιωματικά διατηρούν αμετάβλητη την μεταξύ τους απόσταση. Η απλούστερη διάταξη μιας τέτοιας τετράδας είναι αυτή που μπορούμε να ταυτίσουμε με τα στοιχεία $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 , όπως στο σχήμα.



Ως συγκεκριμένα παραδείγματα της έννοιας του συστήματος αναφοράς, μπορούμε να θεωρούμε το δωμάτιό μας, ένα αυτοκίνητο, πλοίο ή αεροπλάνο, μια περιοχή πάνω από την επιφάνεια της γης, την ίδια την γη ή κάποιο άλλο ουράνιο σώμα, έναν διαστημικό σταθμό ή διαστημόπλοιο, ένα σύμπλεγμα από ουράνια σώματα σαν το ηλιακό σύστημα ή το γαλαξία μας κ.λπ. Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να μη μας διαφεύγει ότι, τα σώματα που απαρτίζουν το σύστημα αναφοράς δεν συμμετέχουν στις διαδικασίες που λαβαίνουν χώρα στον εσωτερικό του χώρο ή στο υπόλοιπο φυσικό περιβάλλον. Απλώς χρησιμεύουν στην περιγραφή του φυσικού γίνεσθαι, χωρίς να το επηρεάζουν ή να επηρεάζονται απ' αυτό.

Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι κάθε σύστημα αναφοράς, Σ , έχει ορίσει τους δικούς του Καρτεσιανούς άξονες, με τη βοήθεια των οποίων προσδιορίζεται η θέση του τυχαίου σωμάτιου, σ . Θα θεωρούμε επίσης ότι κάθε σύστημα αναφοράς είναι εφοδιασμένο με ένα χρονόμετρο ή ρολόι, με τη βοήθεια του οποίου γίνεται ο χρονικός προσδιορισμός των κινήσεων του σ και, γενικότερα, όλων των φυσικών γεγονότων που λαβαίνουν χώρα στο περιβάλλον.

2.2 Απλά ή στοιχειώδη γεγονότα

Η λέξη γεγονός χρησιμοποιείται για να δηλώσει απλά, αλλά και σύνθετα, συμβάντα. Η κατάκτηση του παγκόσμιου κυπέλλου από την ομάδα της Βραζιλίας το 2002, ο γάμος του Μήτσου με την Κατίνα, η μετωπική σύγκρουση δύο αυτοκινήτων, η καταστροφή της Χιροσίμα και του Ναγκασάκι από τις αμερικανικές ατομικές βόμβες, η Οχτωβριανή επανάσταση που ανέτρεψε το Τσαρικό καθεστώς το 1917, είναι γεγονότα που ανήκουν στη δεύτερη κατηγορία. Το χτύπημα του χεριού μας στο τραπέζι, το άναμα ενός αναπτήρα, το άγγιγμα ενός πλήκτρου του υπολογιστή μας, ένας χτύπος της καρδιάς μας, θεωρούνται απλά συμβάντα. Η διάκριση είναι στην ουσία τεχνητή, αλλά καταλήγει να σημαίνει το εξής. Ένα γεγονός είναι τόσο απλούστερο όσο καλύτερα περιγράφεται με το να προσδιορίσουμε το που και πότε έγινε.

Ας εξετάσουμε αναλυτικότερα το ακόλουθο παράδειγμα. Από τον εκφωνητή του δελτίου ειδήσεων μαθαίνουμε ότι στις 4 το πρωί στο 37^ο χιλιόμετρο της εθνικής οδού Αθήνας - Πάτρας συγκρούστηκαν δύο αυτοκίνητα. Αυτή η περιγραφή ταιριάζει σε ένα απλό γεγονός, γιατί μας λέει καθαρά το **πότε** και το **πού** έλαβε χώρα η σύγκρουση. Ωστόσο, η ίδια η σύγκρουση είναι μια περίπλοκη φυσική διαδικασία, με τραγικά αποτελέσματα. Εδώ, λοιπόν, έχουμε ένα παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο ένα σύνθετο γεγονός ανάγεται σε απλό.

Το ίδιο ισχύει και για τα γεγονότα που θεωρούνται ότι είναι από τη φύση τους πολύ απλά. Τέτοια είναι οι πολυάριθμες συγκρούσεις που συμβαίνουν συνεχώς μπροστά στα μάτια μας και δεν τις βλέπουμε! Εννοούμε τις συγκρούσεις των μορίων του αέρα που μας περιβάλλει και τον αναπνέουμε. Λόγω του πολύ μικρού μεγέθους τους, η σύγκρουση δύο μορίων θεωρείται ένα από τα απλούστερα δυνατά γεγονότα. Συνακόλουθα, πιστεύουμε ότι, για την περιγραφή της, αρκεί να πούμε το πού και πότε έλαβε χώρα. Στην πραγματικότητα, η σύγκρουση δύο μορίων είναι μια πολύ σύνθετη διαδικασία, αφού η δομή των μορίων του αέρα είναι περίπλοκη και ακόμα πιο περίπλοκος είναι ο τρόπος με τον οποίο αλληλεπιδρούν, όταν πλησιάζουν το ένα το άλλο.

Συνοψίζοντας, με τη διαδικασία της νοητικής αφαίρεσης, καταλήγουμε στην έννοια του στοιχειώδους γεγονότος που είναι ανάλογη μ' εκείνη του στοιχειώδους σώματος ή σωματίου. Πιο συγκεκριμένα, με τον όρο **στοιχειώδες γεγονός** θα εννοούμε ένα συμβάν που θεωρείται ότι περιγράφεται πλήρως αν δοθούν οι χωρικές και χρονικές συντεταγμένες του ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Στα επόμενα, αντί για "στοιχειώδες γεγονός", θα λέμε απλά "γεγονός", για συντομία.

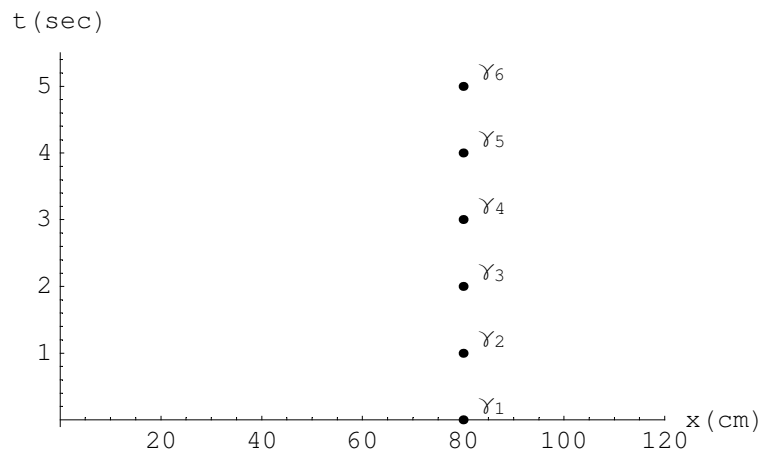
Ας υποθέσουμε γ.π. ότι κάθεστε αναπαυτικά στην πολυθρόνα ενός δωματίου, στο οποίο έχετε ορίσει ένα σύστημα Καρτεσιανών αξόνων $x - y - z$. Με την άδειά σας, θα θεωρήσουμε πως η καρδιά σας είναι ένα σωματίο (υλικό σημείο) και οι χτύποι της απλά (στοιχειώδη) γεγονότα που συμβαίνουν κάθε 1sec. Υποθέτουμε ότι η καρδιά σας μένει ακίνητη στο σημείο με συντεταγμένες $(x, y, z) = (80 \text{ cm}, 140 \text{ cm}, 185 \text{ cm})$.

Για ευκολία, θα υποθέτουμε επίσης ότι το ρολόι σας είναι εφοδιασμένο με μετρητή δευτερολέπτων που ενεργοποιείται μόλις αρχίσετε να καταγράφετε τους χτύπους της καρδιάς σας. Η ένδειξη του ρολογιού σας θα δηλώνεται με το γράμμα t . Αν $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ κ.λ.π. είναι διαδοχικοί χτύποι της καρδιάς σας, τότε μπορούμε να πούμε ότι στον πρώτο χτύπο το ρολόι σας λέει

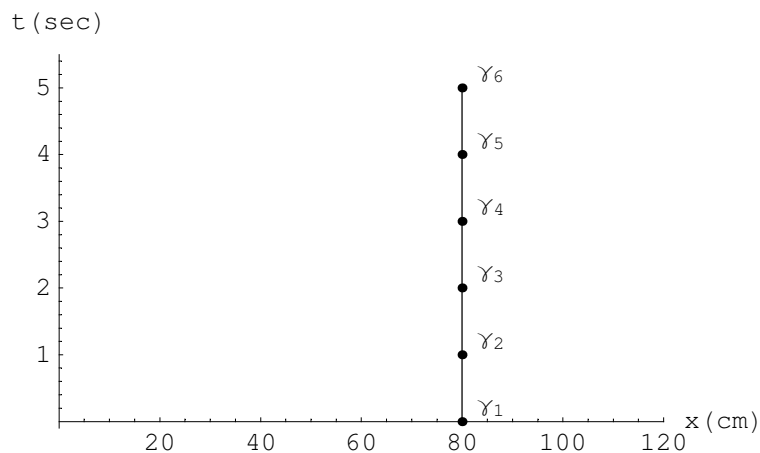
$t_1 \equiv t(\gamma_1)=0\text{sec}$, στον επόμενο λέει $t_2 \equiv t(\gamma_2)=1\text{sec}$, στον μεθεπόμενο $t_3 \equiv t(\gamma_3)=3\text{sec}$, κ.λπ. Με άλλα λόγια, η χρονική συντεταγμένη των γεγονότων $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ κ.λπ. είναι διαφορετική.

Αντίθετα, οι χωρικές συντεταγμένες των γεγονότων $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ κ.λπ. είναι ίδιες. Αν θέσουμε $(x_1, y_1, z_1) \equiv (x(\gamma_1), y(\gamma_1), z(\gamma_1))$, $(x_2, y_2, z_2) \equiv (x(\gamma_2), y(\gamma_2), z(\gamma_2))$ κ.λπ., τότε $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) = (x_3, y_3, z_3) = (80 \text{ cm}, 140 \text{ cm}, 185 \text{ cm})$.

Αν με βάση τα παραπάνω στοιχεία κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα, παραλείποντας τις συντεταγμένες y και z , θα καταλήξουμε στην ακόλουθη εικόνα.



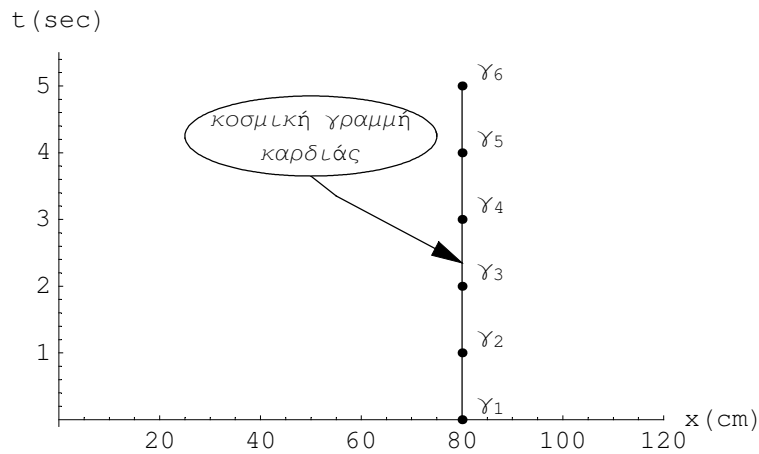
Προφανώς, όλα τα σημεία αυτού του χωροχρονικού διαγράμματος που αντιστοιχούν στα γεγονότα $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6$, βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $x = 80, 0 \leq t \leq 5$, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Τώρα, η ίδια η καρδιά σας βρίσκεται στην ίδια θέση ακόμα και ανάμεσα στους χτύπους της. Άρα, το γεγονός ότι η καρδιά σας βρίσκεται στη θέση $x = 80 \text{ cm}$ τη στιγμή $t = 0, 1 \text{ sec}$ θα πρέπει να παρασταθεί με ένα σημείο στη θέση $(x, t) = (80, 0, 1)$ του διαγράμματος. Ανάλογα, το γεγονός ότι η καρδιά σας βρίσκεται στη θέση $x = 80 \text{ cm}$ τη στιγμή $t = 0, 2 \text{ sec}$ θα πρέπει να παρασταθεί με ένα σημείο στη θέση $(x, t) = (80, 0, 2)$ του διαγράμματος. Και τα δύο αυτά σημεία ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα $x = 80, 0 \leq t \leq 5$, που περιέχει και τα γεγονότα $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6$. Γενικότερα, το γεγονός ότι η καρδιά σας βρίσκεται στη θέση $x = 80 \text{ cm}$ τη στιγμή $t = \beta \text{ sec}$, όπου β

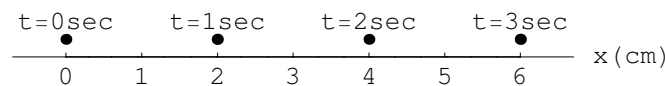
κάποιος αριθμός στο διάστημα $[0, 5]$ αντιστοιχεί στο σημείο $(x, t)=(80, \beta)$ του ευθύγραμμου τμήματος $x = 80, 0 \leq t \leq 5$. Συνακόλουθα, το σύνολο αυτών των γεγονότων ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $x = 80, 0 \leq t \leq 5$.

Το σύνολο των γεγονότων που συναποτελούν την ιστορία ενός σωματίου σ θα το λέμε **κοσμική καμπύλη** του σ . Αν το σωματίο παραμένει ακίνητο στο σημείο $x = a$, τότε η κοσμική του καμπύλη είναι η ευθεία $x = a, -\infty \leq t \leq \infty$ του χωροχρονικού διαγράμματος $x - t$. Το τμήμα της κοσμικής γραμμής της καρδιάς σας για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 5$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



2.3 Ομαλή ευθύγραμμη κίνηση

Θεωρούμε τώρα ένα σωματίο (υλικό σημείο) σ που κινείται κατά μήκος της ευθείας x . Υποθέτουμε ότι η x έχει βαθμονομηθεί και πως η χρονική στιγμή t που το σ βρίσκεται στη θέση x προσδιορίζεται με τη βοήθεια ενός χρονόμετρου. Το επόμενο σχήμα δείχνει τα αποτελέσματα των μετρήσεων ενός συγκεκριμένου πειράματος.



Με άλλα λόγια, από την κίνηση του συγκεκριμένου σωματίου καταγράφηκαν τα εξής στιγμιότυπα. Η θέση του σωματίου τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2$ και 3 sec. Ισοδύναμα, από την κίνηση του σ ξεχωρίσαμε τα εξής γεγονότα.

γ_0 : το γεγονός της αναχώρησης του σ από το σημείο $x = 0\text{cm}$ τη στιγμή $t = 0\text{sec}$,

γ_1 : το γεγονός της διέλευσης του σ από το σημείο $x = 2\text{cm}$ τη στιγμή $t = 1\text{sec}$,

γ_2 : το γεγονός της διέλευσης του σ από το σημείο $x = 4\text{cm}$ τη στιγμή $t = 2\text{sec}$,

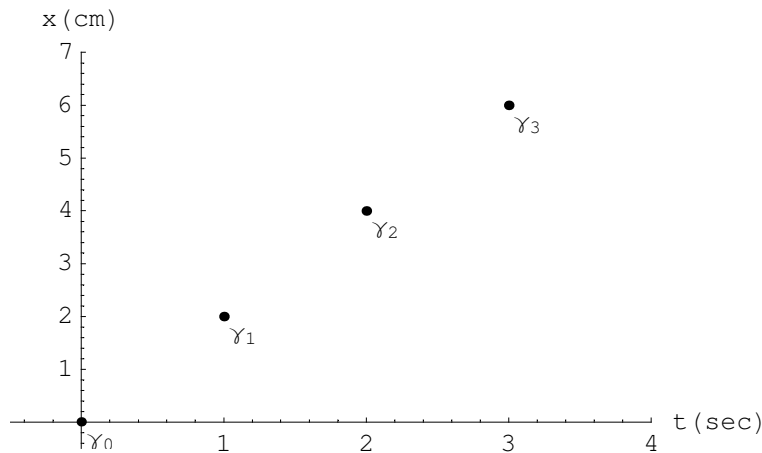
γ_3 : το γεγονός της άφιξης του σ στο σημείο $x = 6\text{cm}$ τη στιγμή $t = 3\text{sec}$.

Αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τον πίνακα

Γεγονός	Χωρική συντεταγμένη x	Χρονική συντεταγμένη t
γ_0	0 cm	0 sec
γ_1	2 cm	1 sec
γ_2	4 cm	2 sec
γ_3	6 cm	3 sec

Ο αριθμός $x_j \equiv x(\gamma_j)$, $j = 0, 1, 2, 3$, ονομάζεται *χωρική συντεταγμένη του γεγονότος* γ_j . Αντίστοιχα, ο αριθμός $t_j \equiv t(\gamma_j)$ ονομάζεται *χρονική συντεταγμένη του γεγονότος* γ_j . Τις συντεταγμένες των γεγονότων $\{\gamma_j\}$ μπορούμε να τις διατάξουμε σε ζευγάρια της μορφής (t_j, x_j) και να παραστήσουμε τα τελευταία σαν κουκίδες σ' ένα διάγραμμα t, x , σαν αυτό του επόμενου σχήματος.

Εναλλακτικά, μπορούμε να διατάξουμε τις συντεταγμένες των γεγονότων $\{\gamma_j\}$ σε ζευγάρια της μορφής (x_j, t_j) και να παραστήσουμε τα τελευταία σαν κουκίδες σ' ένα διάγραμμα x, t , σαν αυτό του επόμενου σχήματος.



Ποια από τις δύο γραφικές παραστάσεις θα προτιμήσουμε δεν έχει καμία σημασία. Το σημαντικό είναι μόνο το εξής: Από τα στοιχεία του πίνακα, αμέσως φαίνεται ότι η χωρική συντεταγμένη x_j του γεγονότος γ_j είναι ανάλογη προς τη χρονική συντεταγμένη του, t_j : Αν παραβλέψουμε τη φυσική σημασία των x και t , τότε $x_j = 2t_j$. Στην πραγματικότητα, η σχέση τους εκφράζεται από την ισότητα

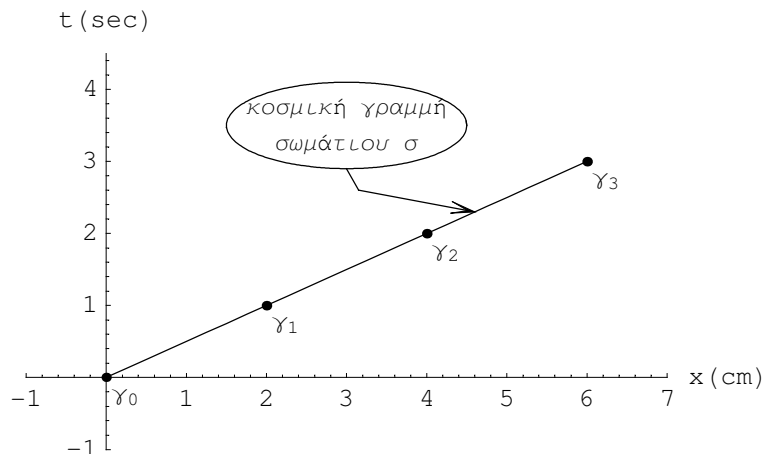
$$x_j = v t_j, \quad v = 2 \text{ cm/sec.}$$

Είναι προφανές ότι, για να μετακινηθεί από την αρχική του θέση, $x = 0$ cm, στην τελική του, $x = 6$ cm, το σωματίο σ πέρασε από όλα τα ενδιάμεσα σημεία του άξονα x . Η διέλευση του σ από καθένα από αυτά τα σημεία μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ξεχωριστό γεγονός. Είναι το σύνολο αυτών των γεγονότων που περιγράφει την κίνηση του σ .

Αν, λοιπόν, ονομάσουμε $(x, t) \equiv (x(\gamma), t(\gamma))$ τις συντεταγμένες του τυχαίου στοιχείου γ αυτού του συνόλου, μπορούμε να θέσουμε το ακόλουθο ερώτημα. Υπάρχει σχέση ανάμεσα στη χωρική συντεταγμένη, x , και τη χρονική, t , του γ ;

Θα υποθέσουμε ότι, στην περίπτωση που εξετάζουμε, η απάντηση στο πιο πάνω ερώτημα είναι καταφατική. Πιο συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι αυτή η σχέση είναι ακριβώς ίδια μ' εκείνη που βρήκαμε ότι ισχύει ανάμεσα στις συντεταγμένες των γεγονότων γ_j , $j = 0, 1, 2, 3$.

Με άλλα λόγια, θα υποθέσουμε ότι $x = vt$, $v = 2$ cm/sec, για κάθε t στο χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq 3 \text{ sec}$. Από γραφική άποψη, αυτή η υπόθεση σημαίνει το εξής: Τα σημεία που αντιστοιχούν στα γεγονότα τα οποία απαρτίζουν την μετακίνηση του σωματίου σ από το χωρικό σημείο $x = 0$ (cm) στο $x = 6$ (cm) βρίσκονται όλα πάνω στην ίδια ευθεία. Ακριβέστερα, αυτά τα σημεία αποτελούν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία γ_0 και γ_3 του διαγράμματος $x - t$, και το οποίο λέμε **κοσμική γραμμή** του σωματίου σ στο επόμενο σχήμα.



Η ποσότητα $v = 2$ cm/sec που ορίσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ονομάζεται **ταχύτητα του σωματίου σ ως προς το σύστημα αναφοράς το οποίο περιγράφει την κίνηση του σ** .

Γενικότερα, η ευθύγραμμη κίνηση ενός σωματίου είναι συχνά τέτοια που, για κάποιο χρονικό διάστημα $\alpha \leq t \leq \tau$, η χωρική συντεταγμένη του, x , καθορίζεται από την χρονική, t , μέσω μιας σχέσης της μορφής $x = x_0 + vt$. Προφανώς, οι σταθερές x_0 , v πρέπει έχουν διάσταση cm και cm/sec, αντίστοιχα.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις, λέμε ότι, κατά το χρονικό διάστημα $\alpha \leq t \leq \tau$, το σωματίο κινήθηκε με σταθερή ταχύτητα v . Τότε, η "κοσμική καμπύλη του σ " είναι μια ευθεία του χωροχρονικού διαγράμματος $x - t$, η οποία τέμνει τον χωρικό άξονα στο σημείο $x = x_0$ κι έχει κλίση v ως προς τον ίδιο άξονα.

Ας ονομάσουμε x_α την τιμή της χωρικής συντεταγμένης όταν $t = \alpha$. Με άλλα λόγια, ας θέσουμε $x_\alpha = a + v\alpha$. Τότε, $a = x_\alpha - v\alpha$ και η εξίσωση $x = a + vt$ που περιγράφει την κίνηση του σ γίνεται

$$(3.1) \quad x = x_\alpha + v(t - \alpha), \quad \alpha \leq t \leq \tau.$$

Παράδειγμα 1^ο

(i) Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq 5 \text{ sec}$, το σωματίο σ_1 κινείται με ταχύτητα $v = 5 \text{ cm/sec}$ κατά μήκος μιας ευθείας x . Να δοθεί η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σ_1 και να παρασταθεί η κοσμική του γραμμή, υποθέτοντας ότι ξεκίνησε από την αρχή του άξονα x .

(ii) Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το σωματίο σ_2 κινείται με ταχύτητα $v = 3 \text{ cm/sec}$ κατά μήκος της ίδιας ευθείας x . Να γραφτεί η εξίσωση κίνησης του σ_2 και να παρασταθεί η κοσμική του γραμμή, υποθέτοντας ότι κι αυτό ξεκίνησε από το σημείο $x = 0 \text{ cm}$ του άξονα x .

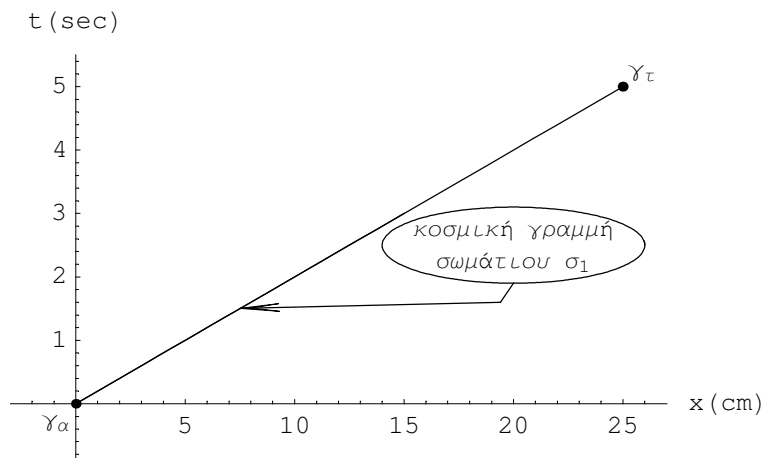
(iii) Να παρασταθούν οι κοσμικές γραμμές των σ_1 και σ_2 στο ίδιο χωροχρονικό διάγραμμα.

Λύση

(i) Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σ_1 είναι υποχρεωτικά της γενικής μορφής $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$. Αφού το χρονικό διάστημα που μας δίνεται είναι το $[0, 5]$, έπεται ότι $\alpha = 0(\text{sec})$ και $x_\alpha = 0(\text{cm})$. Άρα η εξίσωση κίνησης του σ_1 είναι

$$x = 0 + 5(t - 0) = 5t.$$

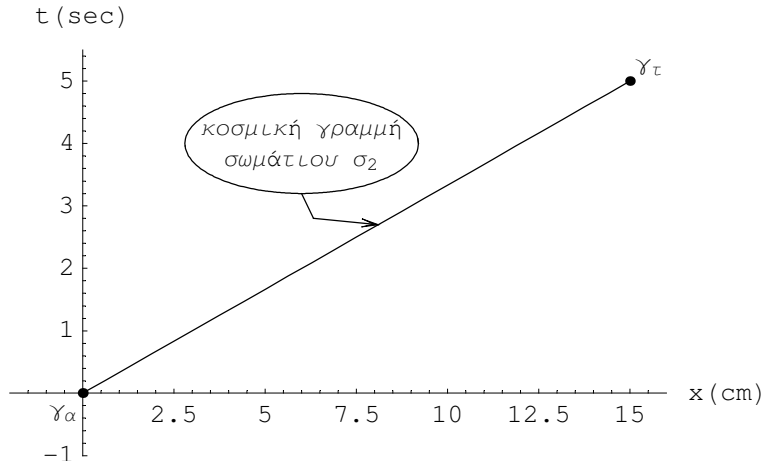
Στο αντίστοιχο χωροχρονικό διάγραμμα, η κοσμική γραμμή του σ_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_\alpha, \alpha) = (0, 0)$ και $(x_\tau, \tau) = (25, 5)$.



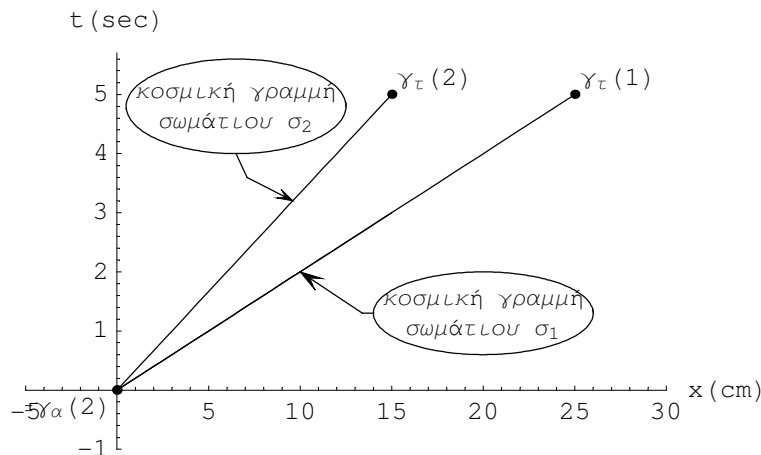
(ii) Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η εξίσωση κίνησης του σ_2 είναι

$$x = 0 + 3(t - 0) = 3t,$$

οπότε η κοσμική του γραμμή είναι το ευθύγραμμο τμήμα που δείχνουμε στο επόμενο διάγραμμα.



(iii) Η υπέρθεση των δύο προηγούμενων σχημάτων οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα. Παρατηρείστε ότι, η κοσμική γραμμή του σωματίου με την μικρότερη ταχύτητα έχει και την μικρότερη κλίση ως προς τον άξονα t .



Παράδειγμα 2^ο

(i) Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq 5 \text{ sec}$ το σωματίο σ_1 κινείται με ταχύτητα $v = 5 \text{ cm/sec}$ κατά μήκος της ευθείας x . Να δοθεί η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σ_1 και να παρασταθεί η κοσμική του γραμμή, υποθέτοντας ότι ξεκίνησε από τη θέση $x = 2 \text{ cm}$.

(ii) Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το σωματίο σ_2 κινείται με ταχύτητα $v = -3 \text{ cm/sec}$ κατά μήκος της ίδιας ευθείας x . Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του σ_2 και να παρασταθεί η κοσμική του γραμμή, υποθέτοντας ότι ξεκίνησε από το σημείο $x = 9 \text{ cm}$.

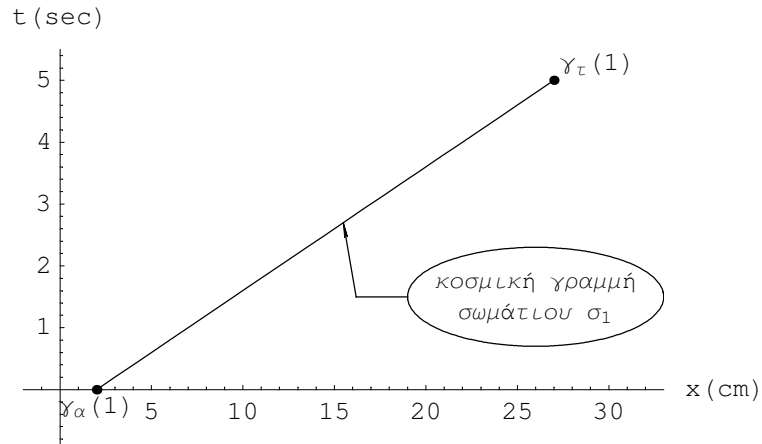
(iii) Να παρασταθούν οι κοσμικές γραμμές των σ_1 και σ_2 στο ίδιο χωροχρονικό διάγραμμα.

Λύση

(i) Η κίνηση του σ_1 περιγράφεται από την εξίσωση $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$. Στην προκειμένη περίπτωση $\alpha = 0 \text{ (sec)}$ και $x = 2 \text{ (cm)}$. Άρα η εξίσωση κίνησης του σ_1 είναι

$$x = 2 + 5(t - 0) = 2 + 5t.$$

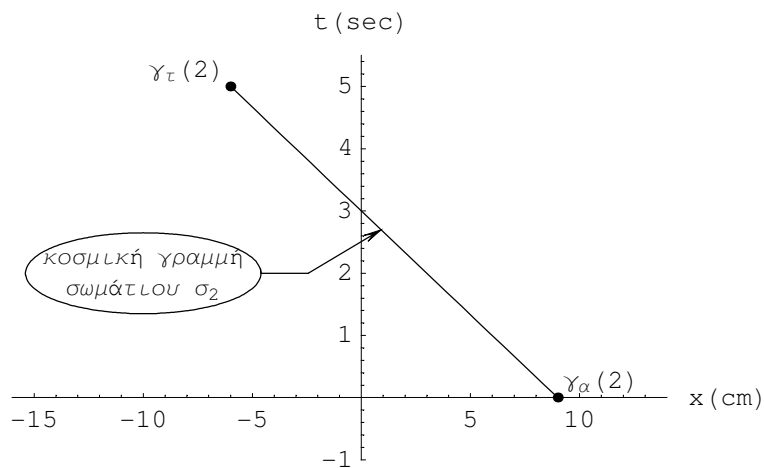
Η κοσμική γραμμή του σ_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_\alpha, \alpha) = (2, 0)$ και $(x_\tau, \tau) = (27, 5)$:



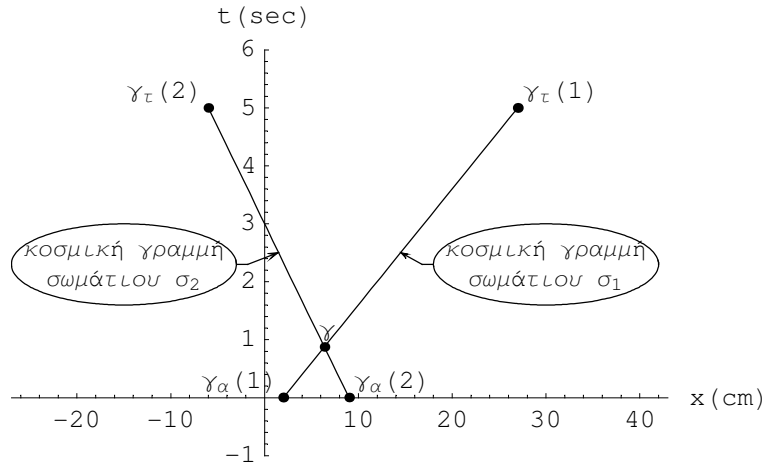
(ii) Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η εξίσωση κίνησης του σ_2 είναι

$$x = 9 + (-3)(t - 0) = 9 - 3t,$$

οπότε καταλήγουμε στο ακόλουθο διάγραμμα.



(iii) Η υπέρθεση των δύο προηγούμενων διαγραμμάτων οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:



Σημειώστε ότι τα σωματίδια σ_1 και σ_2 συναντιούνται σε κάποιο σημείο x_m του άξονα x που βρίσκεται ανάμεσα στο $x = 2$ cm, από το οποίο ξεκίνησε το σ_1 , και το $x = 9$ cm, από το οποίο ξεκίνησε το σ_2 .

Για να προσδιορίσουμε το σημείο συνάντησης, θα πρέπει να βρούμε την κοινή λύση των εξισώσεων $x = 2 + 5t$ και $x = 9 - 3t$. Αυτό είναι εύκολο και οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι τα σωματίδια σ_1 και σ_2 συναντιούνται στο σημείο $x = x_m = 6,375$ cm, τη χρονική στιγμή $t = t_m = (7/8)$ sec. Το γεγονός της συνάντησής τους δηλώνεται με γ στο τελευταίο χωρο-χρονικό διάγραμμα.

Παράδειγμα 3^ο

Ένα σωματίο, το σ_1 , κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα 4 cm/sec. Κατά μήκος της ίδιας ευθείας, κινείται κι ένα δεύτερο σωματίο, το σ_2 , που έχει ταχύτητα 6 cm/sec. Το σ_2 διέρχεται από το σημείο B τρία δευτερόλεπτα μετά τη διέλευση του σ_1 από το σημείο A. Αν το B απέχει από το A 15cm,

- (i) Να εξεταστεί αν τα σωματίδια πρόκειται να συναντηθούν μετά τη διέλευσή τους από τα σημεία A και B, αντίστοιχα.
- (ii) Στο ίδιο χωροχρονικό διάγραμμα, να κατασκευαστούν οι κοσμικές γραμμές των σ_1 και σ_2 από τη στιγμή που διέρχονται από τα σημεία A και B, αντίστοιχα, ως τη στιγμή της συνάντησής τους.

Λύση

(i) Η κίνηση καθενός από τα δύο σωματίδια περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $x = x_a + v(t - a)$. Ωστόσο, τα δοσμένα του προβλήματος δεν προσδιορίζουν τις τιμές των παραμέτρων x_a , v και a των σ_1 και σ_2 . Γι' αυτό, είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε κάποιες υποθέσεις που διευκολύνουν την ανάλυση του προβλήματος, αλλά δεν αλλάζουν το περιεχόμενό του.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι το σημείο A αντιστοιχεί στο σημείο $x = 0$ του άξονα x και πως το σ_1 περνάει από αυτό το σημείο την στιγμή $t = 0$. Έτσι, η εξίσωση κίνησης του σωματίου σ_1 γίνεται

$$x_1 = v_1 t, \quad |v_1| = 4 \text{ cm/sec},$$

όπου $|v_1|$ το μέτρο (η απόλυτη τιμή) της ταχύτητας του σ_1 . Είναι φανερό ότι, λέμε πως το μέτρο της ταχύτητάς του είναι 4 cm/sec, γιατί δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση προς την κινείται το σωματίο σ_1 .

Στη συνέχεια, ονομάζουμε x_B τη συντεταγμένη του σημείου B. Από την διατύπωση του προβλήματος, μπορούμε μόνο να συμπεράνουμε ότι $|x_B| = 15$ cm. Τώρα, αφού το σ_2 περνάει από το B τρία sec μετά τη διέλευση του σ_1 από το σημείο A, έπεται ότι το σ_2 βρίσκεται στο $x = x_B$ την χρονική στιγμή $t = 3$ sec. Συνακόλουθα, η εξίσωση κίνησης του σωματίου σ_2 γίνεται

$$x_2 = x_B + v_2(t - 3), \quad |x_B| = 15 \text{ cm}, \quad |v_2| = 6 \text{ cm/sec}.$$

Τα δυο σωματία θα συναντηθούν αν υπάρχει κάποια τιμή $t_m > 3$ sec της χρονικής παραμέτρου t , για την οποία $x_1 = x_2$. Αυτή η συνθήκη δίνει

$$v_1 t_m = x_B + v_2(t_m - 3) \Leftrightarrow t_m = (x_B - 3 v_2) / (v_1 - v_2).$$

Προφανώς,

$$t_m > 3 \Leftrightarrow x_B - 3 v_2 > 3(v_1 - v_2) \Leftrightarrow x_B > 3 v_1, \quad \text{αν } v_1 > v_2,$$

ενώ

$$t_m > 3 \Leftrightarrow x_B - 3 v_2 < 3(v_1 - v_2) \Leftrightarrow x_B < 3 v_1, \quad \text{αν } v_1 < v_2.$$

Ισοδύναμα, $t_m > 3$ εάν και μόνο όταν $v_2 < v_1 < x_B/3$, ή $(x_B/3) v_1 < v_2$.

Αφού $v_1 = (\pm 4)$, $v_2 = (\pm 6)$ και $x_B/3 = (\pm 5)$, οι μόνες δυνατές περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες:

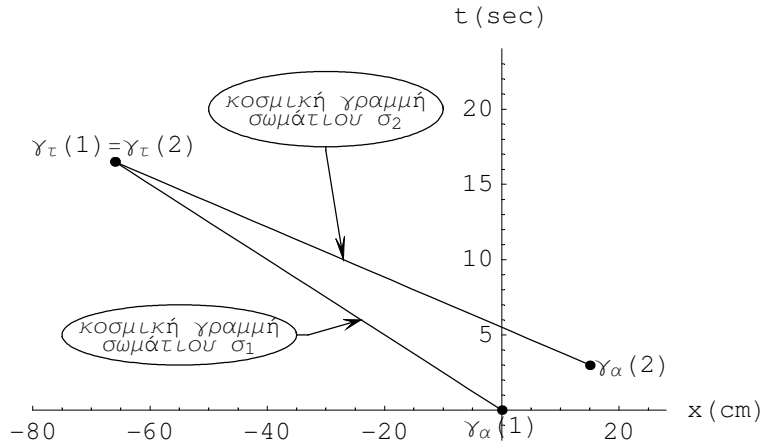
$$(\alpha) \quad x_B = 15, \quad v_1 = -4, \quad v_2 = -6.$$

$$\text{Τότε } t_m = 16,5 \text{ sec}, \quad x_m = -66 \text{ cm}.$$

$$(\beta) \quad x_B = -15, \quad v_1 = 4, \quad v_2 = 6.$$

$$\text{Τότε } t_m = 16,5 \text{ sec}, \quad x_m = 66 \text{ cm}.$$

(ii) Το χωροχρονικό διάγραμμα για την περίπτωση (α) έχει ως εξής:



Η κατασκευή του χωροχρονικού διαγράμματος για την περίπτωση (β) αφήνεται για άσκηση του αναγνώστη.

Άσκηση

Ένα σωματίο, σ_1 , κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα 4 cm/sec . Κατά μήκος της ίδιας ευθείας, κινείται κι ένα δεύτερο σωματίο, σ_2 , που έχει ταχύτητα 6 cm/sec . Το σ_2 διέρχεται από το σημείο B τρία δευτερόλεπτα πριν από τη διέλευση του σ_1 από το σημείο A. Αν το B απέχει από το A 12 cm ,

(i) Να εξεταστεί αν τα σωματία πρόκειται να συναντηθούν μετά τη διέλευσή τους από τα σημεία A και B, αντίστοιχα.

(ii) Στο ίδιο χωροχρονικό διάγραμμα, να κατασκευαστούν οι κοσμικές γραμμές των σ_1 και σ_2 , από τη στιγμή που διέρχονται από τα σημεία A και B, αντίστοιχα, ως τη στιγμή της συνάντησής τους.

Παράδειγμα 4^ο

(i) Στο χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq 10 \text{ sec}$, το σωματίο σ_1 κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Ως τη στιγμή $t = 4 \text{ sec}$, η ταχύτητά του είναι 5 cm/sec . Αμέσως μετά αλλάζει και γίνεται 8 cm/sec . Να γραφτεί η εξίσωση κίνησης του σ_1 και να παρασταθεί η κοσμική του γραμμή, υποθέτοντας ότι τη στιγμή $t = 0 \text{ sec}$ βρισκόταν στο σημείο $x = 0 \text{ cm}$.

(ii) Στο ίδιο χρονικό διάστημα, το σωματίο σ_2 κινείται αρχικά με ταχύτητα 3 cm/sec προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Στο σημείο $x = 15 \text{ cm}$ χτυπάει σ' ένα εμπόδιο με αποτέλεσμα η ταχύτητά του ν' αντιστραφεί, χωρίς ν' αλλάξει το μέτρο της. Να γραφτεί η εξίσωση κίνησης του σ_2 και να παρασταθεί η κοσμική του γραμμή, υποθέτοντας ότι κι αυτό ξεκίνησε από το σημείο $x = 0 \text{ cm}$.

(iii) Να παρασταθούν οι κοσμικές γραμμές των σ_1 και σ_2 στο ίδιο χωροχρονικό διάγραμμα.

Λύση

(i) Επειδή η ταχύτητα του σ_1 δεν είναι ίδια σε όλο το χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq 10 \text{ sec}$, η

κίνησή του δεν μπορεί να περιγραφεί από μία μόνο εξίσωση της μορφής $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$. Ωστόσο, μπορούμε να χωρίσουμε το παραπάνω διάστημα σε δύο, με τρόπο ώστε η εξίσωση $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$ να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα ξεχωριστά.

Πιο συγκεκριμένα, για το χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq 4 \text{ sec}$ η εξίσωση κίνησης του σ_1 είναι της μορφής $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$ με $\alpha = 0$, $x_\alpha = 0$ και $v = 5$. Δηλαδή,

$$x = 5t, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

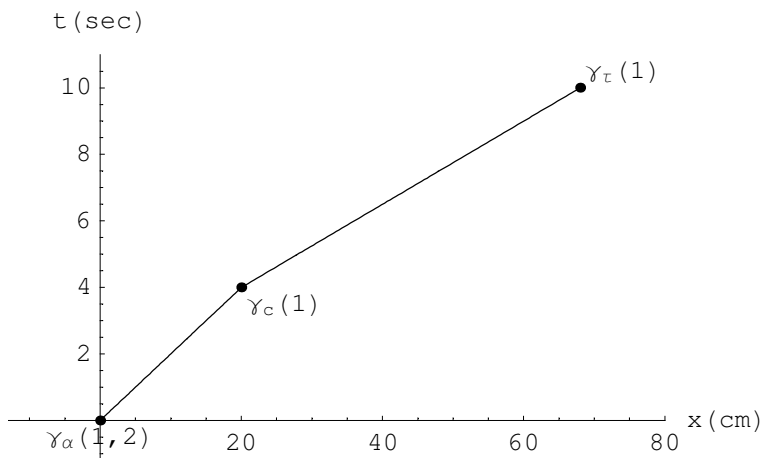
Όμοια, στο χρονικό διάστημα $4 \text{ sec} \leq t \leq 10 \text{ sec}$ η εξίσωση κίνησης του σ_1 είναι της μορφής $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$ με $\alpha = 4$, $x_\alpha = 20$ και $v = 8$. Κι αυτό γιατί στο τέλος του διαστήματος $0 \leq t \leq 4$ το σ_1 έχει φτάσει στο σημείο $x = 5 \cdot 4 = 20$ (cm). Συνεπώς,

$$x = 20 + 8(t - 4) = -4 + 8t, \quad 4 \leq t \leq 10.$$

Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω εκφράσεις για το x στα διαστήματα $0 \text{ sec} \leq t \leq 4 \text{ sec}$ και $4 \text{ sec} \leq t \leq 10 \text{ sec}$, αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης του σ_1 για όλο το χρονικό διάστημα $[0, 10]$ στη μορφή

$$x = \begin{cases} 5t, & 0 \leq t \leq 4 \\ -4 + 8t, & 4 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Η κοσμική γραμμή του σ_1 που ορίζει αυτή η εξίσωση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



(ii) Με τον, ίδιο τρόπο αναλύεται και η κίνηση του σ_2 . Αναλυτικότερα, κατά το χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq t_c \text{ sec}$, όπου t_c η στιγμή που το σ_2 χτυπάει στο εμπόδιο, η κίνησή του περιγράφεται από την εξίσωση $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$ με $\alpha = 0$, $v = 3$. Δηλαδή,

$$x = 3t, \quad 0 \leq t \leq t_c.$$

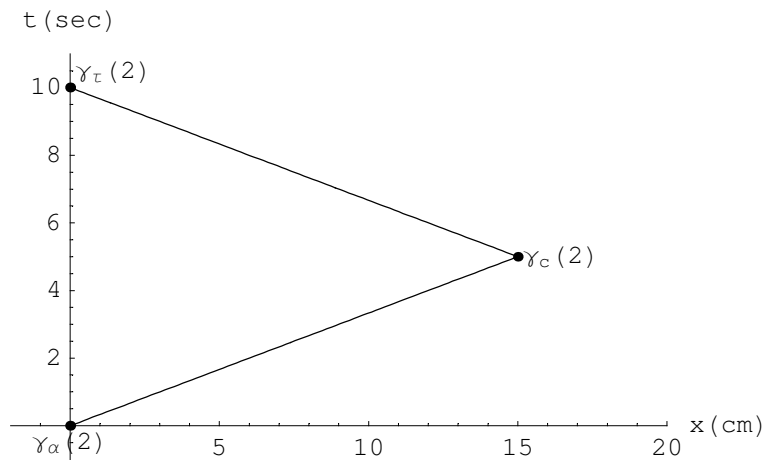
Την στιγμή $t = t_c$ το σ_2 έχει φτάσει στο σημείο $x = x_c = 15$ (cm). Από την $x_c = 3t_c$ αμέσως έπεται ότι $t_c = 5$ (sec). Στο υπόλοιπο χρονικό διάστημα, δηλαδή στο $5 \text{ sec} \leq t \leq 10 \text{ sec}$, το σ_2 κινείται με ταχύτητα $v = -3$ (cm/sec). Άρα η κίνησή του περιγράφεται από την εξίσωση $x = x_\alpha + v(t - \alpha)$ με $\alpha = 5$, $x_\alpha = 15$ και $v = -3$. Δηλαδή,

$$x = 15 - 3(t - 5) = 30 - 3t, \quad 5 \leq t \leq 10.$$

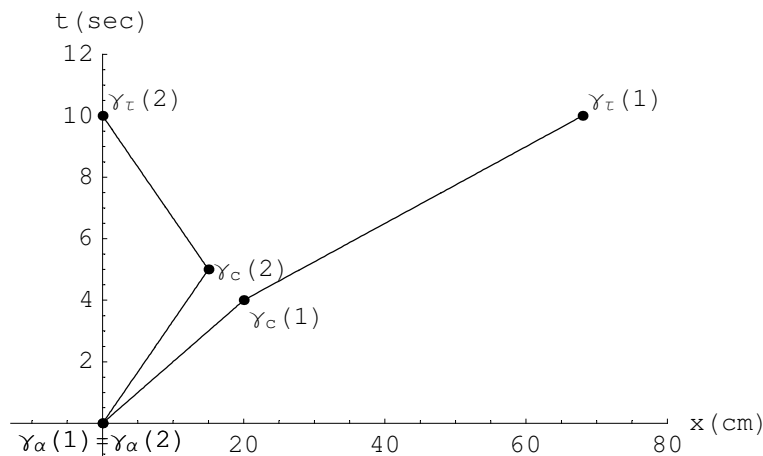
Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω εκφράσεις για το x στα διαστήματα $0 \text{ sec} \leq t \leq 5 \text{ sec}$ και $5 \text{ sec} \leq t \leq 10 \text{ sec}$, αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης του σ_2 για όλο το χρονικό διάστημα $[0, 10]$ στη μορφή

$$x = \begin{cases} 3t, & 0 \leq t \leq 5 \\ 30 - 15t, & 5 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

Η κοσμική γραμμή του σ_2 την οποία ορίζει αυτή η εξίσωση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



(iii) Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις κοσμικές γραμμές και των δύο σωμάτων σε κοινό χωροχρονικό διάγραμμα.



Για προφανείς λόγους, η κίνηση των σωμάτων σ_1 και σ_2 που αναλύσαμε στο τελευταίο παράδειγμα ονομάζεται τμηματικά ομαλή ευθύγραμμη κίνηση. Γενικότερα, κατά το χρονικό διάστημα $I = [a, \tau]$ ένα σώμα σ εκτελεί τμηματικά ομαλή ευθύγραμμη κίνηση, αν

(α) Σε όλο το διάστημα I το σ κινείται πάνω στη ίδια ευθεία και

(β) Το χρονικό διάστημα I μπορεί να χωριστεί σε n επιμέρους διαστήματα, $I_1 = [t_0, t_1]$, $I_2 = [t_1, t_2]$, ..., $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, ..., $I_n = [t_{n-1}, t_n]$, όπου

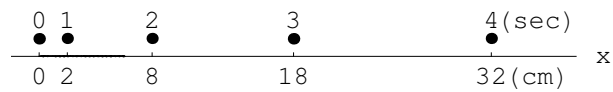
$$(3.2) \quad \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{j-1} < t_j < \dots < t_{n-1} < t_n = \tau,$$

σε καθένα από τα οποία η εξίσωση κίνησης του σ είναι της μορφής

$$(3.3) \quad x = x_{j-1} + v_j(t - t_{j-1}), \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

2.4 Ευθύγραμμη επιταχυνόμενη κίνηση

Στο επόμενο σχήμα φαίνονται (με μαύρες κουκίδες) οι διαδοχικές θέσεις ενός σωμάτιου σ , το οποίο κινείται κατά μήκος της ευθείας x .



Αν ονομάσουμε

γ_0 το γεγονός της διεύλευσης του σ από το σημείο $x_0 = 0$ τη στιγμή $t_0 = 0$,

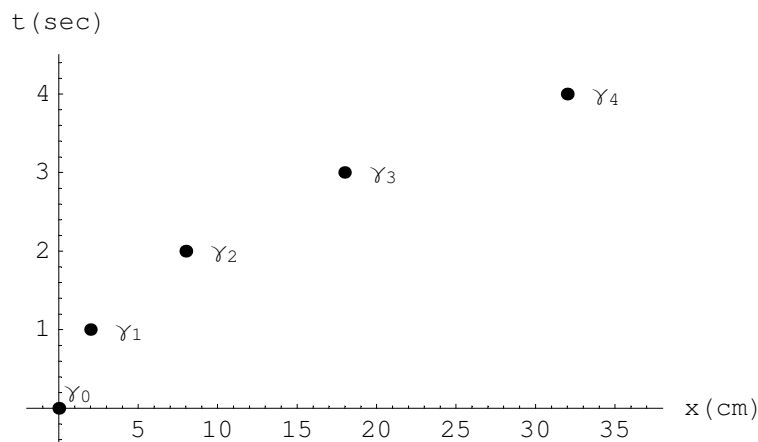
γ_1 το γεγονός της διεύλευσης του σ από το σημείο $x_1 = 2$ τη στιγμή $t_1 = 1$,

γ_2 το γεγονός της διεύλευσης του σ από το σημείο $x_2 = 8$ τη στιγμή $t_2 = 2$,

γ_3 το γεγονός της διεύλευσης του σ από το σημείο $x_3 = 18$ τη στιγμή $t_3 = 3$,

γ_4 το γεγονός της διεύλευσης του σ από το σημείο $x_4 = 32$ τη στιγμή $t_4 = 4$,

τότε εύκολα θα κατασκευάσουμε και το αντίστοιχο χωροχρονικό διάγραμμα:



Από τα δοσμένα της κίνησης και το αντίστοιχο διάγραμμα συνάγεται αμέσως ότι, το σ δεν εκτελεί ομαλή κίνηση. Ισοδύναμα, οι χωρικές συντεταγμένες, x_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$), δεν έχουν γραμμική σχέση με τις χρονικές, t_j . Με άλλα λόγια δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $x_j = x_0 + v t_j$, όπου v μια σταθερή με διαστάσεις ταχύτητας.

Θα μπορούσαμε, βέβαια, να υποθέσουμε ότι το σ εκτελεί τμηματικά ομαλή κίνηση. Αυτή η υπόθεση ισοδυναμεί με τον ακόλουθο ισχυρισμό. Αν χωρίσουμε το χρονικό διάστημα $I = [0, 4]$ ($0 \text{ sec} \leq t \leq 4 \text{ sec}$) στα 4 υποδιαστήματα $I_1 = [t_0, t_1] = [0, 1]$, $I_2 = [t_1, t_2] = [1, 2]$, $I_3 = [t_2, t_3] = [2, 3]$ και $I_4 = [t_3, t_4] = [3, 4]$, τότε

$$(4.1) \quad x = x_{j-1} + v_j(t - t_{j-1}), \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Αναλυτικότερα, στο πρώτο υποδιάστημα θα ίσχυε ότι

$$(4.2) \quad x = x_0 + v_1(t - t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Όμως $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ και $t_1 = 1$ (sec). Άρα η τελευταία έκφραση γίνεται

$$(4.3) \quad x = v_1 t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

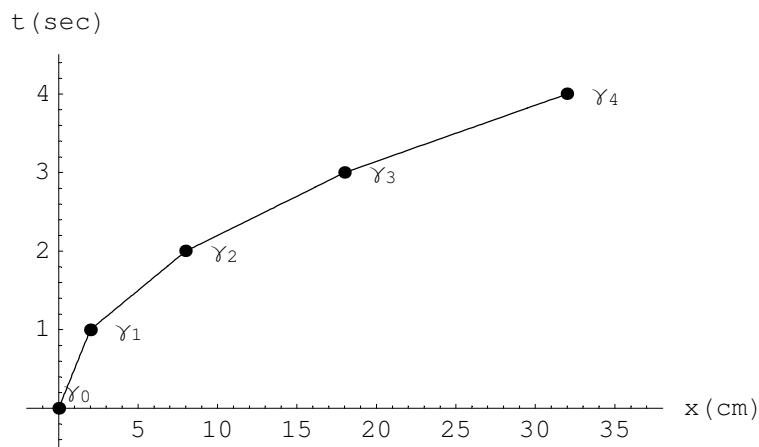
Γνωρίζουμε επιπλέον ότι $x = 2$ (cm) όταν $t = 1$ (sec). Συνεπώς, αφού η σχέση $x = v_1 t$ ισχύει και για $t = 1$, η τιμή της σταθερής v_1 θα πρέπει να είναι συμβατή με την συνθήκη $2 = v_1 \cdot 1$. Άρα $v_1 = 2$ (cm/sec).

Ανάλογα, στο δεύτερο υποδιάστημα θα ίσχυε ότι

$$(4.4) \quad x = x_1 + v_2(t - t_1) = 2 + v_2(t - 1), \quad t_1 = 1 \leq t \leq 2 = t_2.$$

Όμως, ήδη γνωρίζουμε ότι $x = 8$ cm, όταν $t = 2$ (sec). Άρα θα πρέπει να τηρείται η συνθήκη $8 = 2 + v_2(2 - 1)$, από την οποία έπεται ότι $v_2 = 6$ (cm/sec). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι $v_3 = 10$ (cm/sec) και $v_4 = 14$ (cm/sec).

Αν υιοθετήσουμε την παραπάνω υπόθεση της τμηματικά ομαλής κίνησης, η κοσμική γραμμή του σωματίου σ θα αποτελείται από 4 ευθύγραμμα τμήματα, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



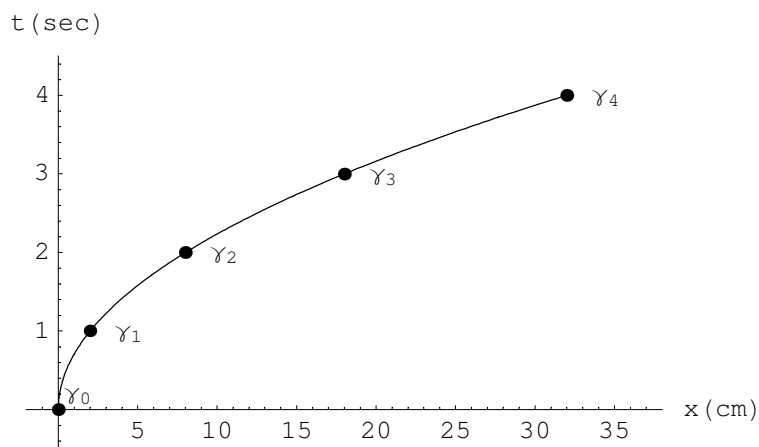
Ωστόσο, μια άλλη υπόθεση για την εξίσωση κίνησης είναι εξίσου εύλογη. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ανάμεσα στις χωρικές συντεταγμένες, x_j , και τις χρονικές, t_j , υπάρχει η ακόλουθη σχέση:

$$(4.5) \quad x_j = \beta t_j^2, \quad \beta = 2 \text{ cm/sec}^2, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι η τελευταία σχέση δεν ισχύει μόνο κατά τις στιγμές t_0, \dots, t_4 , αλλά καθόλο το χρονικό διάστημα $[0, 4]$, ότι δηλαδή

$$(4.6) \quad x = \beta t^2, \quad \beta = 2 \text{ cm/sec}^2, \quad 0 \leq t \leq 4.$$

Αν υιοθετηθεί η δεύτερη υπόθεση για την εξίσωση κίνησης του σ , τότε η κοσμική του γραμμή θα είναι η παραβολική καμπύλη του επόμενου σχήματος.



Το ποια από τις δύο παραπάνω υποθέσεις οδηγεί σε πιστότερη αναπαράσταση της πραγματικής κίνησης του σωμάτιου σ θα το απαντήσει η πειραματική ανάλυση. Αν για την κίνηση που εκτέλεσε το σ υπάρχουν λεπτομερέστερα στοιχεία, τότε η σύγκριση των δύο υποθέσεων δεν είναι δύσκολη. Σε κάθε περίπτωση, μια έγκυρη σύγκριση θα απαιτούσε να είχαμε καταγράψει την θέση του σ σε πολύ περισσότερες τιμές της χρονικής παραμέτρου t και όχι μόνο στις στιγμές t_0, \dots, t_4 .

Ανεξάρτητα από τις "πειραματικές" συνθήκες του συγκεκριμένου παραδείγματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι σε κάποιο χρονικό διάστημα $[a, \tau]$ η κίνηση ενός σωμάτιου περιγράφεται από την εξίσωση $x = \beta t^2$, όπου β μια σταθερή με διαστάσεις cm/sec^2 . Γενικότερα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι της μορφής $x = f(t | \lambda, \mu, \dots)$, όπου $f(t | \lambda, \mu, \dots)$ μια συνάρτηση του χρόνου, t , η οποία εξαρτιέται κι από τις παραμέτρους λ, μ κ.λ.π. Για ευκολία, μια συνάρτηση αυτής της μορφής θα την συμβολίζουμε, από τώρα και στο εξής, απλώς με $f(t)$.

Το απλούστερο παράδειγμα δίνεται από την συνάρτηση $f(t) = \lambda + \mu t + \nu t^2$, με $\nu \neq 0$. (Σημειώστε ότι, αφού το x έχει διάσταση cm και το t διάσταση sec , η εξίσωση $x = \lambda + \mu t + \nu t^2$, οι παράμετροι λ, μ και ν πρέπει να έχουν διαστάσεις cm , cm/sec και cm/sec^2 , αντίστοιχα).

Μένοντας στο παράδειγμα όπου $x = f(t) \equiv \beta t^2$, $t \in [\alpha, \tau]$, ας υποθέσουμε ότι οι τιμές t_1 και $t_2 = t_1 + h$ της χρονικής παραμέτρου t ανήκουν στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε οι αντίστοιχες τιμές της χωρικής συντεταγμένης θα δίνονται από τις εκφράσεις $x_1 = f(t_1) \equiv \beta t_1^2$ και $x_2 = f(t_2) \equiv \beta t_2^2 = \beta(t_1 + h)^2$.

Κατά συνέπεια,

$$(4.7) \quad \begin{aligned} x_2 - x_1 &= f(t_2) - f(t_1) \\ &= f(t_1 + h) - f(t_1) \equiv \beta(t_1 + h)^2 - \beta t_1^2 = \beta(2t_1 + h)h \end{aligned}$$

και άρα

$$(4.8) \quad \frac{x_2 - x_1}{h} = \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h} = \beta(2t_1 + h).$$

Αφού η ποσότητα h έχει διάσταση sec, η $(x_2 - x_1)/h$ θα έχει διάσταση cm/sec, δηλαδή ταχύτητας. (Πρόκειται γι' αυτό που ονομάζεται μέση ταχύτητα του σωμάτιου σ στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_1 + h]$).

Συνακόλουθα, διάσταση ταχύτητας έχει και η ποσότητα v_1 που δίνει το όριο της $(x_2 - x_1)/h$ καθώς το h τείνει στο μηδέν:

$$(4.9) \quad v_1 := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t_1)}{h} = 2\beta t_1.$$

Αυτό το όριο ονομάζεται **ταχύτητα** του σωμάτιου τη χρονική στιγμή t_1 .

Είναι φανερό ότι η διαδικασία που οδήγησε στην έκφραση για την ταχύτητα του σ τη στιγμή t_1 μπορεί να επαναληφθεί αυτούσια για οποιαδήποτε τιμή της χρονικής παραμέτρου t στο διάστημα $[\alpha, \tau]$. Άρα μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$(4.10) \quad v := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = 2\beta t, \quad t \in [\alpha, \tau],$$

και να την ονομάσουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του σ .

Από μαθηματική άποψη, το όριο

$$(4.11) \quad f'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \quad t \in [\alpha, \tau],$$

όταν υπάρχει, ονομάζεται **παράγωγος της συνάρτησης** $f: [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο t και συνήθως συμβολίζεται με $(df/dt)(t)$. Σε ότι ακολουθεί, υποθέτουμε ότι η παράγωγος ("ως προς τη μεταβλητή t ") της συνάρτησης $f(t)$ υπάρχει σε κάθε σημείο του διαστήματος $[\alpha, \tau]$. Συνακόλουθα, με στιγμιαία ταχύτητα του σ θα εννοούμε την συνάρτηση $v = f'(t)$.

Τώρα, είναι φανερό ότι η εξίσωση

$$(4.12) \quad x = x_1 + v_1(t - t_1)$$

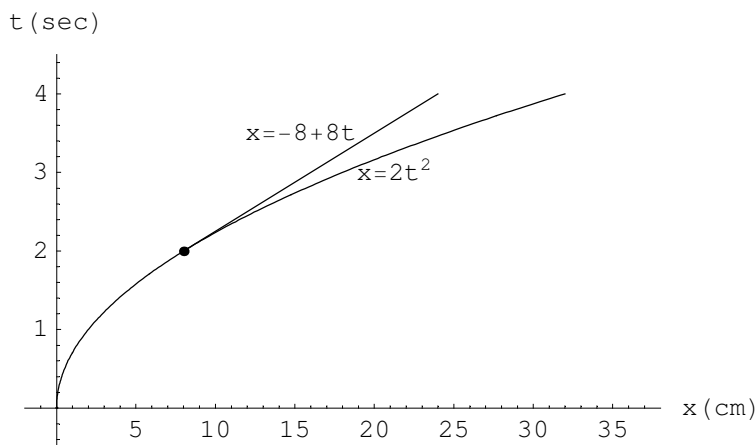
περιγράφει ένα σώματιο που κινείται ομαλά με ταχύτητα v_1 και διέρχεται από το σημείο $x = x_1$ τη στιγμή $t = t_1$. Αυτή η παρατήρηση στηρίζει και τη φυσική ερμηνεία της στιγμιαίας ταχύτητας v_1 : Αν το σώματιο σ διατηρούσε την ταχύτητα v_1 και μετά τη στιγμή t_1 , τότε η κοσμική του γραμμή

θα ήταν η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση (4.12) και όχι η καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $x = f(t)$, στη γενική περίπτωση, ή την $x = f(t) = \beta t^2$ στο ειδικότερο παράδειγμα που εξετάσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι στο πιο πάνω παράδειγμα $\beta = 2 \text{ (cm/sec}^2\text{)}$, οπότε $x = 2t^2$, και ότι $[\alpha, \tau] = [0, 4]$. Τότε $v = 4t$. Ειδικότερα τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ sec}$ το σώμα σ βρίσκεται στο σημείο $x = 8 \text{ cm}$ και η ταχύτητά του είναι $v_1 = 8 \text{ cm/sec}$. Άρα η αντίστοιχη εξίσωση $x = x_1 + v_1(t - t_1)$ γίνεται $x = 8 + 8(t - 2) = -8 + 8t$.

Οι κοσμικές γραμμές που ορίζονται από τις σχέσεις $x = 2t^2$, $t \in [0, 4]$ και $x = -8 + 8t$, $t \in [2, 4]$, φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



■

Αν η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση ενός σώματιου σ στο χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau]$ είναι της μορφής $x = f(t)$, τότε μπορούμε να ονομάσουμε $g(t)$ την παράγωγο της συνάρτησης f και να γράψουμε τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας στη μορφή $v = g(t)$. Μάλιστα, η ίδια η συνάρτηση g μπορεί να έχει παράγωγο σε κάποιο σημείο t_1 του διαστήματος $[\alpha, \tau]$. Με άλλα λόγια, μπορεί να υπάρχει το όριο

$$(4.13) \quad a_1 := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t_1+h) - g(t_1)}{h}.$$

Αυτό το όριο ονομάζεται *επιτάχυνση του σ την στιγμή t_1* .

Από μαθηματική άποψη, πρόκειται για την *παράγωγο δεύτερης τάξης της συνάρτησης* $f : [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο t_1 , η οποία συμβολίζεται με $(d^2 f / d x^2)(t_1)$ ή με $f''(t_1)$. Στα επόμενα, υποθέτουμε ότι η δεύτερη παράγωγος της $f : [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος (α, τ) , τουλάχιστον.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σώματιου σ στο χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau]$ είναι της μορφής

$$(4.14) \quad x = f(t) \equiv \lambda + \mu t + \nu t^2$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η στιγμιαία ταχύτητα του σ δίνεται από την έκφραση

$$(4.15) \quad v = f'(t) \equiv \mu + 2\nu t$$

και η στιγμιαία επιτάχυνση από την

$$(4.16) \quad a = f''(t) \equiv 2\nu.$$

Σημειώστε ότι, στην προκείμενη περίπτωση, η επιτάχυνση είναι σταθερή σε όλο το διάστημα $[\alpha, \tau]$.

Μπορούμε, τώρα, να δώσουμε και την φυσική σημασία των παραμέτρων λ , μ και ν . Από την τελευταία εξίσωση έπεται ότι $\nu = a/2$. Άρα μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση της ταχύτητας σαν $v = \mu + at$. Την αρχική στιγμή $t = \alpha$, η τελευταία σχέση γίνεται $v_\alpha = \mu + a\alpha$. Συνεπώς, $\mu = v_\alpha - a\alpha$ και η εξίσωση της ταχύτητας γίνεται

$$(4.17) \quad v = v_\alpha + a(t - \alpha).$$

Αντίστοιχα, η εξίσωση $x = \lambda + \mu t + \nu t^2$ γίνεται

$$(4.18) \quad x = \lambda + (v_\alpha - a\alpha)t + (1/2)at^2.$$

Όταν $t = \alpha$, η τελευταία γίνεται

$$(4.19) \quad x_\alpha = \lambda + (v_\alpha - a\alpha)\alpha + (1/2)a\alpha^2 = \lambda + v_\alpha\alpha - (1/2)a\alpha^2.$$

Άρα,

$$(4.20) \quad \lambda = x_\alpha - v_\alpha\alpha + (1/2)a\alpha^2$$

κι έτσι η $x = \lambda + \mu t + \nu t^2$ γίνεται τελικά

$$(4.21) \quad x = x_\alpha + v_\alpha(t - \alpha) + \frac{1}{2}a(t - \alpha)^2.$$

■

Παράδειγμα

Όταν η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σωματίου σ στο χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau]$ είναι της μορφής

$$(4.22) \quad x = f(t) \equiv \lambda + \mu t + \nu t^2 + \xi t^3,$$

η στιγμιαία ταχύτητα του σ δίνεται από την έκφραση

$$(4.23) \quad v = f'(t) \equiv \mu + 2\nu t + 3\xi t^2$$

και η στιγμιαία επιτάχυνση από την

$$(4.24) \quad a = f''(t) \equiv 2\nu + 6\xi t.$$

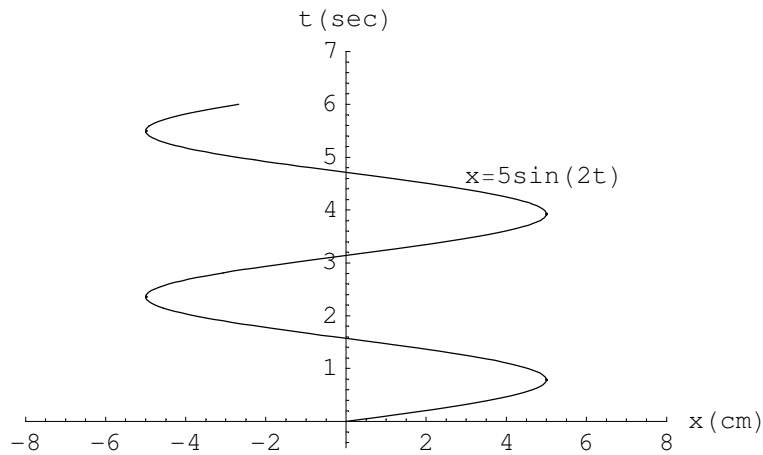
Άρα, σ' αυτή την περίπτωση, η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή, παρά αλλάζει γραμμικά με το χρόνο στο διάστημα $[\alpha, \tau]$.

■

Η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή και στην περίπτωση που η κίνηση του σ περιγράφεται από την εξίσωση

$$(4.25) \quad x = f(t) = A \sin(\omega t)$$

και η αντίστοιχη κοσμική γραμμή είναι όπως στο επόμενο σχήμα.

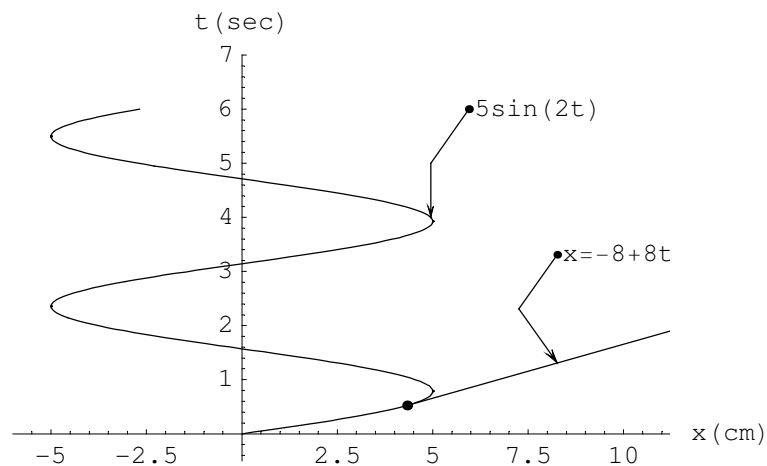


Σε τούτη την περίπτωση, η στιγμιαία ταχύτητα περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$(4.26) \quad v = f'(t) = A \omega \cos(\omega t),$$

ενώ η στιγμιαία επιτάχυνση από την

$$(4.27) \quad a = f''(t) = -A \omega^2 \sin(\omega t).$$

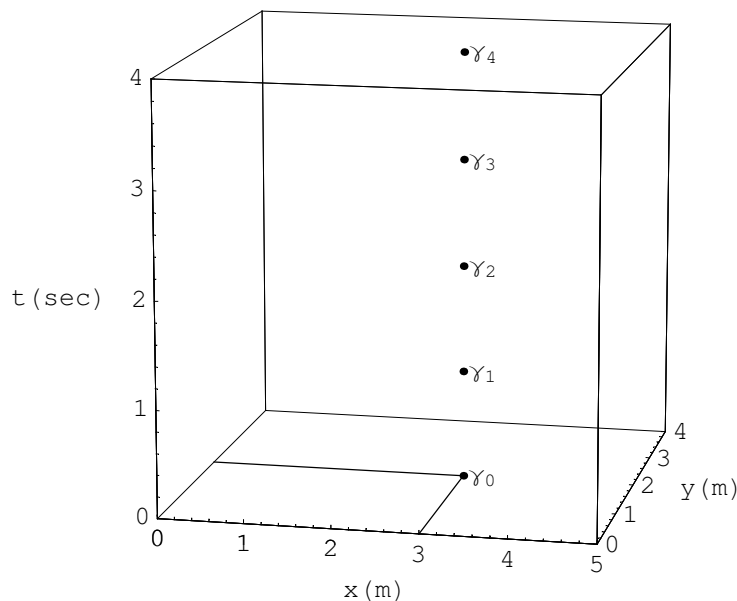


■

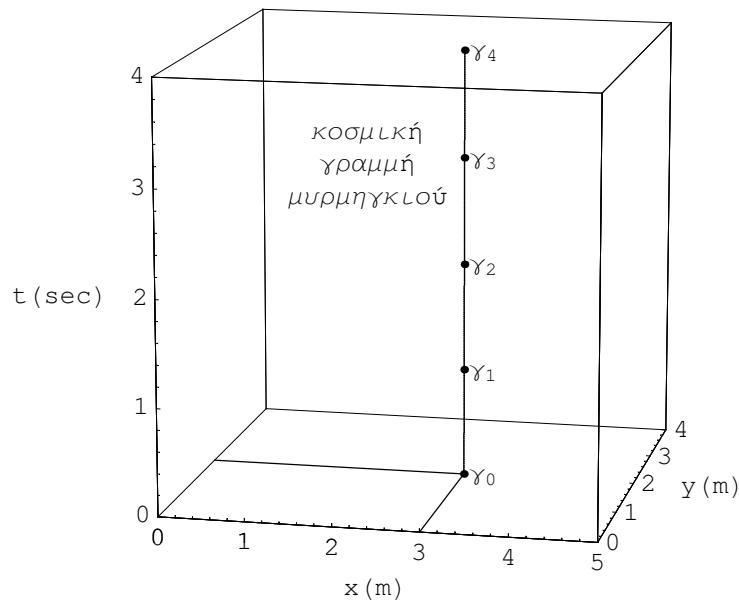
2.5 Επιταχυνόμενη κίνηση στις 2 και 3 διαστάσεις

Οι έννοιες που εισαγάγαμε στο προηγούμενο εδάφιο γενικεύονται αμέσως για να περιγράψουν γεγονότα και κινήσεις σωμάτων που λαβαίνουν χώρα σ' ένα επίπεδο ή στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, θα περιοριστούμε αρχικά στο επίπεδο και θα υποθέσουμε ότι το σύστημα αναφοράς Σ που περιγράφει τα γεγονότα έχει ήδη ορίσει ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων $x - y$ και διαθέτει ένα χρονόμετρο με το οποίο προσδιορίζει τη χρονική συντεταγμένη $t(\gamma)$ του τυχαίου γεγονότος γ .

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε μια πεντάδα γεγονότων, $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, που έχουν συμβεί στο ίδιο σημείο $(x, y) = (3\text{ m}, 2\text{ m}) = (300\text{ cm}, 200\text{ cm})$ του δαπέδου του δωματίου σας, αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Συγκεκριμένα, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$ και $t_4 = 4\text{ sec}$, αντίστοιχα, όπου $t_j \equiv t(\gamma_j)$.



Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω γεγονότα σε διαδοχικούς χτύπους της καρδιάς ενός μυρμηγκιού που μένει ακίνητο στο σημείο $(x, y) = (3\text{ m}, 2\text{ m})$ του δαπέδου. Τότε η ευθεία που τα ενώνει αποτελεί την κοσμική γραμμή της καρδιάς ή, αν θέλετε, του ίδιου του μυρμηγκιού.



Γενικότερα, η κοσμική γραμμή ενός ακίνητου αντικείμενου είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς τον άξονα t .

Ας υποθέσουμε τώρα πως το μυρμήγκι της ιστορίας μας αρχίζει να κινείται πάνω στο δάπεδο. Τότε οι χωρικές συντεταγμένες του αλλάζουν με το χρόνο, ας πούμε, σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$(5.1) \quad x = f(t | \lambda, \mu, \dots), \quad y = g(t | \lambda, \mu, \dots),$$

όπου $f : [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ δοσμένες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το χρονικό διάστημα $\alpha \leq t \leq \tau$ και λ, μ κ.λπ. διάφορες παράμετροι. (Τις τελευταίες δεν θα τις αναφέρουμε ρητά στα επόμενα, για να είναι οι εκφράσεις μας απλούστερες). Τότε η (στιγμιαία) ταχύτητά του ορίζεται από το διάνυσμα $\vec{v} \equiv (v_x, v_y)$, όπου

$$(5.2) \quad v_x = f'(t), \quad v_y = g'(t),$$

και η (στιγμιαία) επιτάχυνσή του ορίζεται από το διάνυσμα

$$(5.3) \quad \vec{a} \equiv (a_x, a_y),$$

όπου

$$(5.4) \quad a_x = f''(t), \quad a_y = g''(t).$$

Ως μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ορίζονται οι ποσότητες

$$(5.5) \quad |\vec{v}| \equiv \|\vec{v}\| := \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

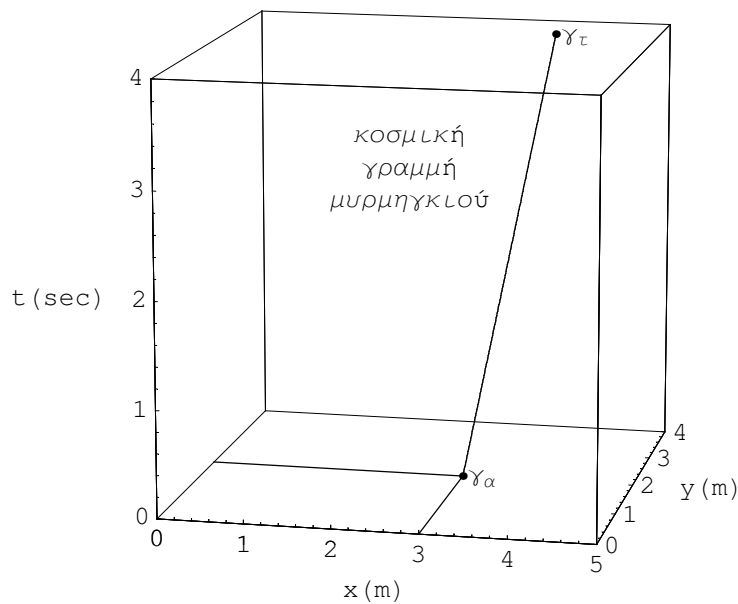
και

$$(5.6) \quad |\vec{a}| \equiv \|\vec{a}\| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

αντίστοιχα.

Αν γ.π. $x = \lambda + \mu t$, $y = \nu + \xi t$, τότε $v_x = \mu$, $v_y = \xi$, και $a_x = 0$, $a_y = 0$. Σ' αυτή την περίπτωση μιλάμε για *ομαλή ευθύγραμμη κίνηση*, αφού στο επίπεδο $x - y$ το αντικείμενο κινείται κατά μήκος της ευθείας που έχει κλίση μ ως προς τον άξονα x και ξ ως προς τον άξονα y , με σταθερή ταχύτητα μέτρου $|\vec{v}| = \sqrt{\mu^2 + \xi^2}$. Αυτή η ευθεία αποτελεί την προβολή της κοσμικής γραμμής του αντικείμενου που, με τη σειρά της, είναι μια ευθεία κλίσης $|\vec{v}| = \sqrt{\mu^2 + \xi^2}$ ως προς τον χρονικό άξονα t .

Το επόμενο σχήμα αντιστοιχεί στην επιλογή $\mu = 0,2 \text{ m/sec}$, $\nu = 0,3 \text{ m/sec}$ και το χρονικό διάστημα $0 \text{ sec} \leq t \leq 4 \text{ sec}$.



Όταν η επιτάχυνση του σωματίου είναι μη μηδενική, τότε η κοσμική του καμπύλη παύει να είναι μια ευθεία του χωροχρονικού διαγράμματος $x - y - t$, ακόμα και όταν η κίνησή του είναι ευθύγραμμη. Για να γίνει σαφής η διάκριση ανάμεσα στην εικόνα που δίνει για την κίνηση ενός σωματίου η κοσμική του μαμπύλη από τη μια και η καμπύλη που διαγράφει μέσα στο επίπεδο στο οποίο κινείται, από την άλλη, εισάγουμε το εξής ορισμό.

Η εικόνα του χρονικού διαστήματος $[\alpha, \tau]$ στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^2 κατά την απεικόνιση $r: [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$, που ορίζει το ζευγάρι $f: [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$, ονομάζεται τροχιά του σωματίου κατά το χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau]$. Με άλλα λόγια, *τροχιά ενός σωματίου σ κατά το*

χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau]$ λέγεται το υποσύνολο του \mathbb{R}^2 που ορίζεται από τις συνθήκες $x = f(t)$, $y = g(t)$. Πρόκειται για την προβολή της κοσμικής γραμμής του σ στο επίπεδο $x - y$.

Παράδειγμα

Αν, κατά χρονικό διάστημα $\alpha \leq t \leq \tau$, το σωματίο σ κινείται σε μια ευθεία του επιπέδου $x - y$ με σταθερή επιτάχυνση (a_x, a_y) , τότε οι χωρικές συντεταγμένες του καθορίζονται από εξισώσεις της μορφής

$$(5.7) \quad x = \lambda + \mu t + (1/2) a_x t^2,$$

$$(5.8) \quad y = \nu + \xi t + (1/2) a_y t^2,$$

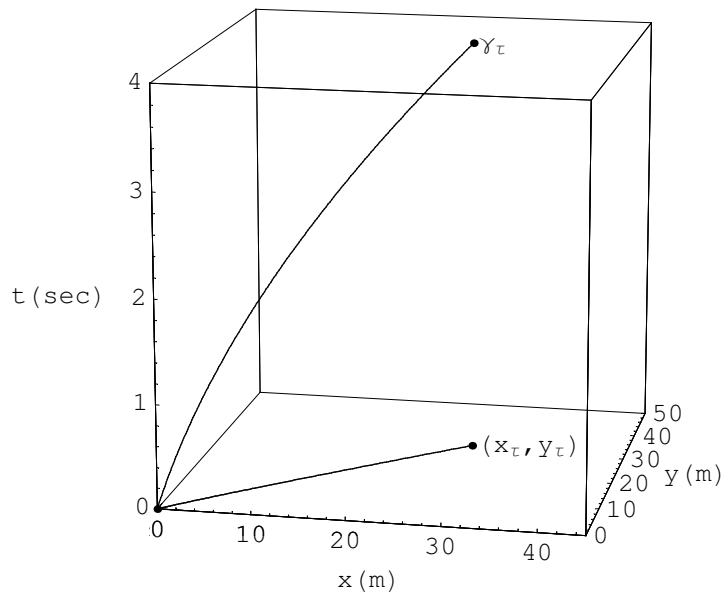
που μπορούν να μετατραπούν στις

$$(5.9) \quad x = x_\alpha + v_{x\alpha}(t - \alpha) + (1/2) a_x(t - \alpha)^2,$$

$$(5.10) \quad y = y_\alpha + v_{y\alpha}(t - \alpha) + (1/2) a_y(t - \alpha)^2,$$

έτσι ώστε οι παράμετροι να έχουν σαφές φυσικό νόημα.

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε την κοσμική καμπύλη και την τροχιά ενός σωματίου που κινείται στο επίπεδο $x-y$ με σταθερή επιτάχυνση $(a_x, a_y) = (2, 2) \text{ cm/sec}^2$, κατά το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 4 \text{ sec}$, στην περίπτωση όπου $(v_{x0}, v_{y0}) = (3, 4) \text{ cm/sec}$.



■

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις

$$(5.11) \quad x = f(t) = a \cos(\omega t),$$

$$(5.12) \quad y = g(t) = a \sin(\omega t),$$

περιγράφουν ένα σωματίο που κινείται πάνω σ' έναν κύκλο ακτίνας a με γωνιακή ταχύτητα ω .

Οι συνιστώσες της στιγμιαίας ταχύτητας του σ δίνονται από τις εκφράσεις

$$(5.13) \quad v_x = -a \omega \sin(\omega t), \quad v_y = a \omega \cos(\omega t),$$

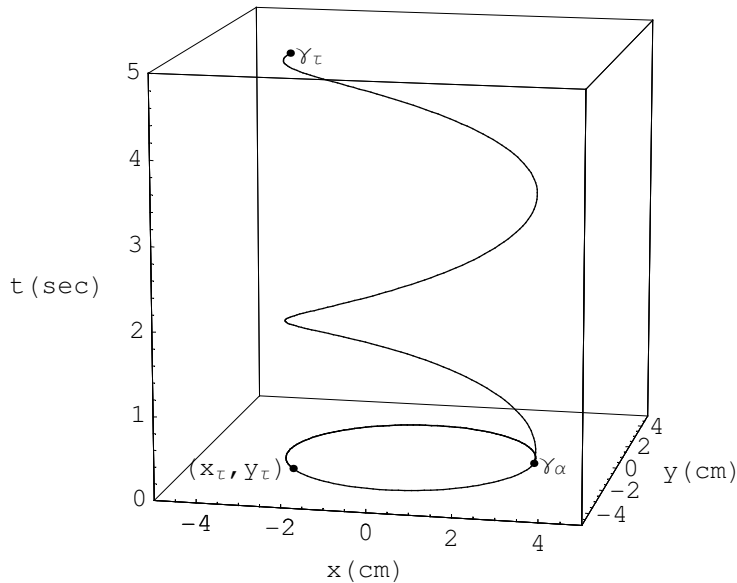
και οι συνιστώσες της στιγμιαίας επιτάχυνσης από τις

$$(5.14) \quad a_x = -a \omega^2 \cos(\omega t), \quad a_y = -a \omega^2 \sin(\omega t),$$

Προφανώς,

$$(5.15) \quad |\vec{v}| = a \omega, \quad |\vec{a}| = a \omega^2.$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε το τμήμα της κοσμικής καμπύλης του σ που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau]=[0, 5\text{sec}]$, στην περίπτωση που $a = 3 \text{ cm}$, $\omega = 2 \text{ sec}^{-1}$.



Τέλος, η κίνηση ενός σωματίου στον τρισδιάστατο χώρο περιγράφεται με τη βοήθεια τριών εξισώσεων της μορφής

$$(5.16) \quad x = f(t | \lambda, \mu, \dots), \quad y = g(t | \lambda, \mu, \dots), \quad z = h(t | \lambda, \mu, \dots),$$

όπου $f : [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$, και $h : [\alpha, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ δοσμένες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το χρονικό διάστημα $\alpha \leq t \leq \tau$ και λ, μ κ.λπ. διάφορες παράμετροι. Και πάλι, για ευκολία, οι εξισώσεις της κίνησης θα γράφονται στην απλούστερη μορφή $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, εκτός αν υπάρχει ανάγκη να τονιστεί η εξάρτησή τους από κάποια συγκεκριμένη παράμετρο).

Τότε η (στιγμιαία) ταχύτητά του ορίζεται από το διάνυσμα

$$(5.17) \quad \vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z),$$

όπου

$$(5.18) \quad v_x = f'(t), \quad v_y = g'(t), \quad v_z = h'(t)$$

και η (στιγμιαία) επιτάχυνσή του ορίζεται από το διάνυσμα

$$(5.19) \quad \vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z),$$

όπου

$$(5.20) \quad a_x = f''(t), \quad a_y = g''(t), \quad a_z = h''(t).$$

Ως μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ορίζονται οι ποσότητες

$$(5.21) \quad |\vec{v}| \equiv \|\vec{v}\| := \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

και

$$(5.22) \quad |\vec{a}| \equiv \|\vec{a}\| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

αντίστοιχα.

Θα πρέπει να είναι φανερό ότι, στην περίπτωση που η κίνηση ενός σωματίου λαβαίνει χώρα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε γραφικές παραστάσεις τις κοσμικής του γραμμής, σαν κι αυτές που παρουσιάσαμε νωρίτερα για κίνηση πάνω σε μια ευθεία ή στο επίπεδο. Περιοριζόμαστε σε προβολές της στους χώρους $x - y - t$, $x - z - t$, $y - z - t$ και $x - y - z$. Η τελευταία είναι αυτό που ονομάζουμε *τροχιά* του σωματίου.

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις

$$(5.23\alpha) \quad x = f(t) = a \cos(\omega t),$$

$$(5.23\beta) \quad y = g(t) = a \sin(\omega t),$$

$$(5.23\gamma) \quad z = h(t) = (1/2) b t^2,$$

περιγράφουν ένα σωματίο σ που κινείται πάνω στην επιφάνεια ενός κύλινδρου ακτίνας a με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega > 0$.

Οι συνιστώσες της στιγμιαίας ταχύτητας του σ δίνονται από τις εκφράσεις

$$(5.24\alpha) \quad v_x = -a\omega \sin(\omega t),$$

$$(5.24\beta) \quad v_y = a\omega \cos(\omega t),$$

$$(5.24\gamma) \quad v_z = b t$$

και οι συνιστώσες της στιγμιαίας επιτάχυνσης από τις

$$(5.25\alpha) \quad a_x = -a\omega^2 \cos(\omega t),$$

$$(5.25\beta) \quad a_y = -a\omega^2 \sin(\omega t),$$

$$(5.25\gamma) \quad a_z = b.$$

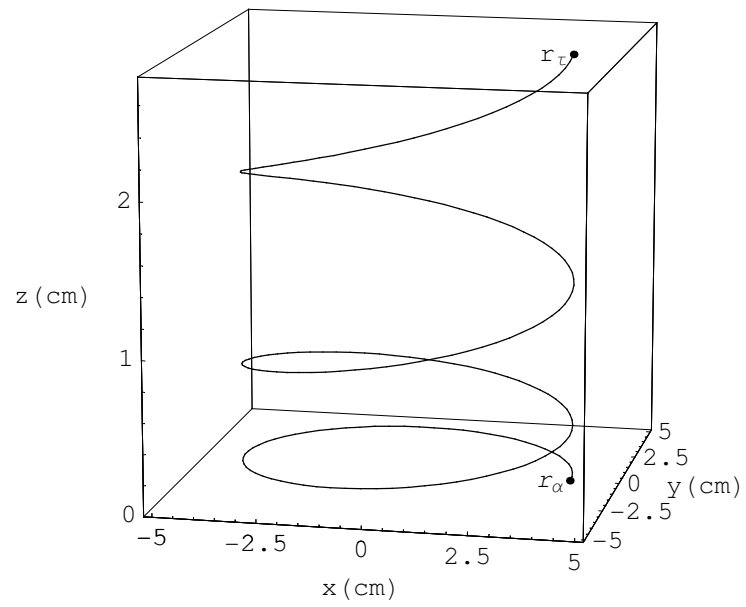
Συνεπώς,

$$(5.26) \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2 t^2}$$

και

$$(5.27) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a^2 \omega^4 + b^2}.$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε το τμήμα της τροχιάς του σ που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau] = [0, (3\pi/4)\text{sec}]$, στην περίπτωση που $a = 4 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm/sec}$, $\omega = 8 \text{ sec}^{-1}$.



■

3. Θεωρία Μηχανικής του Newton

3.1 Νευτωνική Μηχανική

Η πρώτη ολοκληρωμένη θεωρία για τον τρόπο με τον οποίο κινούνται και αλληλεπιδρούν τα σώματα διατυπώθηκε από τον Isaac Newton (Νεύτωνα, προς το ελληνικότερον). Τα βασικά στοιχεία αυτής της θεωρίας, η οποία είναι γνωστή ως *Νευτώνεια ή Νευτωνική Μηχανική*, μπορούν να εκφραστούν με τον ακόλουθο τρόπο.

1. Κάθε σώμα είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο υλικών σημείων ή σωματίων.
2. Ο χώρος είναι απόλυτος. Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιότητές του είναι τελείως ανεξάρτητες από την παρουσία ή μη των υλικών σωμάτων και των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων. Η δομή του είναι εκείνη του Ευκλείδειου τρισδιάστατου γεωμετρικού χώρου.
3. Υπάρχει ένα (τουλάχιστον) σύστημα αναφοράς, Σ , και αντίστοιχοι Καρτεσιανοί άξονες $x - y - z$, στο οποίο ο φυσικός χώρος ταυτίζεται με το σύνολο \mathbb{R}^3 .
4. Ο χρόνος είναι επίσης απόλυτος και έχει τη δομή του \mathbb{R} .
5. (*2^{ος} Νόμος ή αξίωμα του Νεύτωνα*) Κάθε σωματίο, σ , υφίσταται την επίδραση του υπόλοιπου φυσικού κόσμου. Αυτή η επίδραση λέγεται *δύναμη που ασκείται στο σ* . είναι μια διανυσματική ποσότητα που συνήθως παριστάνεται με \vec{F} κι η οποία καθορίζει την στιγμιαία επιτάχυνση, \vec{a} , του σ , με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(1. 1) \quad \vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}.$$

Σ' αυτή την εξίσωση, ο θετικός αριθμός m αποτελεί το μέτρο μιας φυσικής ποσότητας που χαρακτηρίζει το ίδιο το σωματίο και λέγεται *μάζα του σ* .

Ακριβέστερα, ας υποθέσουμε ότι, κατά το χρονικό διάστημα $[\alpha, \tau]$, η τροχιά του σ στο σύστημα αναφοράς Σ περιγράφεται από την τριάδα των συναρτήσεων

$$(1. 2) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Τότε, με *επιτάχυνση* του σ ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς Σ εννοούμε την τριάδα

$$(1. 3) \quad \vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) := (f''(t), g''(t), h''(t)).$$

Συνεπώς, η (1. 1) αποτελεί συμπυκνωμένη έκφραση της τριάδας των διαφορικών εξισώσεων

$$(1. 4\alpha) \quad a_x = \frac{1}{m} F_x \quad \Leftrightarrow \quad f''(t) = \frac{1}{m} F_x,$$

$$(1.4\beta) \quad a_y = \frac{1}{m} F_y \Leftrightarrow g''(t) = \frac{1}{m} F_y,$$

$$(1.4\gamma) \quad a_z = \frac{1}{m} F_z \Leftrightarrow h''(t) = \frac{1}{m} F_z,$$

Με τη σειρά τους, τα δεξιά μέλη F_x , F_y και F_z αυτών των εξισώσεων, εκφράζουν, με τον πιο συμπυκνωμένο τρόπο, τις συναρτήσεις που παριστάνουν τις **συνιστώσες της δύναμης**.

Με βάση τον τρόπο με τον οποίο υπεισέρχεται στην εξίσωση (1. 1), λέμε ότι, η μάζα ενός σωμάτιου αποτελεί και μέτρο της αδράνειάς του. Πιο συγκεκριμένα, αν στα σωμάτια σ_1 , σ_2 ασκηθεί η ίδια δύναμη και η μάζα του πρώτου είναι μεγαλύτερη από εκείνη του δεύτερου, τότε η επιτάχυνση του σ_1 θα είναι μικρότερη σε μέτρο από εκείνη του σ_2 .

Μια συνηθισμένη μονάδα μάζας είναι το γραμμάριο, gr. Αν ως μονάδα της επιτάχυνσης χρησιμοποιείται η cm/sec^2 , τότε η μονάδα μέτρησης της δύναμης είναι αναγκαστικά η dyne = $\text{gr} \cdot \text{cm}/\text{sec}^2$.

6. (3^{ος} Νόμος ή αξίωμα του Νεύτωνα) Αν $\{\sigma_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, είναι ένα σύστημα που αποτελείται από n σωμάτια, τότε κάθε σωματίο του συστήματος επιδρά σε κάθε άλλο, σύμφωνα με τον τύπο

$$(1.5) \quad \vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

όπου \vec{F}_{jk} είναι η δύναμη που ασκείται στο σωματίο σ_j από το σωματίο σ_k . Με άλλα λόγια, "η δράση ισούται προς την αντίδραση".

Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση κίνησης του σωμάτιου σ_j γίνεται

$$(1.6) \quad \vec{a}_j = \frac{1}{m} \left(\vec{F}_j^{\text{εξ}} + \sum_{k=1}^n \vec{F}_{jk} \right),$$

όπου $\vec{F}_j^{\text{εξ}}$ η δύναμη που υφίσταται το σ_j από εξωγενείς παράγοντες.

Σημειώστε ότι, από την (1. 5) αμέσως έπεται ότι $\vec{F}_{jj} = -\vec{F}_{jj}$ και άρα

$$(1.7) \quad \vec{F}_{jj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Με άλλα λόγια, ένα σωματίο ποτέ δεν ασκεί δύναμη στον εαυτό του.

7. Το σύστημα αναφοράς Σ στο οποίο ισχύουν οι δυο παραπάνω νόμοι του Newton ονομάζεται **αδρανειακό**.

Προφανώς, όταν σ' ένα σωματίο δεν ασκείται δύναμη, όταν δηλαδή $\vec{F} = \vec{0}$, τότε

$$(1.8) \quad \vec{a} = (f''(t), g''(t), h''(t)) = (0, 0, 0).$$

Συνακόλουθα, οι συναρτήσεις οι οποίες προσδιορίζουν την τροχιά του σωμάτιου στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς είναι της μορφής

$$(1.6) \quad f(t) = x_0 + v_{x0} t, \quad g(t) = y_0 + v_{y0} t, \quad h(t) = z_0 + v_{z0} t,$$

όπου οι τριάδες (x_0, y_0, z_0) και (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}) αποτελούνται από τυχαίες σταθερές.

Με άλλα λόγια, όταν $\vec{F} = \vec{0}$, τότε το σωματίο κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$. Στην ειδικότερη περίπτωση που αυτή η ταχύτητα μηδενίζεται, το σωματίο μένει ακίνητο στη θέση $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)$. Αυτό το πόρισμα του δεύτερου νόμου, είναι γνωστό ως **πρώτο αξίωμα ή πρώτος νόμος της Νευτωνικής μηχανικής**.

Το συμπέρασμα ότι ένα ελεύθερο σωματίο κινείται με σταθερή (ενδεχομένως και μηδενική) ταχύτητα ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αποτελεί μέχρι σήμερα ένα επίμαχο σημείο της Νευτωνικής θεωρίας. Ορισμένοι ερευνητές επιμένουν στην άποψη του ίδιου του Newton ότι πρόκειται για μια πρόταση που έχει το χαρακτήρα αξιώματος, ισότιμου προς τα άλλα δύο. Στο ζήτημα αυτό θα επανέλθουμε αργότερα.

Εδώ θα περιοριστούμε στο να επισημάνουμε ότι από πολλούς μαθηματικούς φυσικούς ακόμα και ο δεύτερος νόμος της Νευτωνικής Μηχανικής ανάγεται σε ορισμό της δύναμης. Με άλλα λόγια, το δεύτερο αξίωμα, από πρόταση για τη σχέση των φυσικών ποσοτήτων \vec{a} , m και \vec{F} , μετατρέπεται στην έκφραση $\vec{F} := m\vec{a}$, που δηλώνει ότι η ποσότητα \vec{F} είναι απλώς μια συντομογραφία του γινόμενου $m\vec{a}$.

Αναλυτικότερα, η άποψη ότι η δύναμη δεν αποτελεί έννοια ανεξάρτητη από την επιτάχυνση στηρίζεται στο ακόλουθο επιχειρήμα. Ο μόνος τρόπος με τον οποίο διαπιστώνουμε ότι ένα σωματίο υφίσταται την επίδραση του περιβάλλοντός του είναι η μέτρηση της επιτάχυνσής του. Από γνωσιολογική ή επιστημολογική άποψη, αυτό το επιχειρήμα στηρίζεται στην αρχή του **οπερεσιοναλισμού** (*operationalism*) ή **τελεσισμού**. Σύμφωνα μ' αυτή τη φιλοσοφική αρχή, μια έννοια της φυσικής έχει νόημα εάν και μόνο όταν υπάρχει μια ακριβής πειραματική διαδικασία, η εκτέλεση (**τέλεσις**) της οποίας οδηγεί στη μέτρηση της αντίστοιχης ποσότητας. Τα περιθώρια αυτών των σημειώσεων δε μας επιτρέπουν να επεκταθούμε σε μιαν αναλυτική κριτική του τελεσισμού. Γι' αυτό περιοριζόμαστε να παρατηρήσουμε ότι, αν η φυσική και οποιαδήποτε άλλη επιστήμη υιοθετούσε τις γνωσιολογικές θέσεις του τελεσισμού, τότε θα απογυμνωνότανε τελείως από το εννοιολογικό της οπλοστάσιο και από επιστήμη (= σύνολο αποτελούμενο από έννοιες, προτάσεις σχέσεων και μεθόδων ελέγχου αυτών των προτάσεων) θα κατέληγε σε ένα κατάλογο συνταγών παρατήρησης και μέτρησης.

Έτσι κι αλλιώς η Νευτωνική Μηχανική παραμένει μια ελλιπής θεωρία, όσο δεν προστίθεται σ' αυτήν μια πρόταση για τον προσδιορισμό της δύναμης που ασκείται στο τυχαίο σωματίο σ του ενδιαφέροντός μας. Ο Newton, όχι μόνο παρατήρησε πρώτος απ' όλους αυτό το έλλειμα, αλλά μας έδωσε και την πρώτη στην ιστορία της φυσικής θεωρία για τις δυνάμεις που παρατηρούνται στη φύση. Πρόκειται για τη θεωρία που καθιερώθηκε με την επωνυμία **νόμος της παγκόσμιας έλξης**. Η διατύπωσή της είναι πολύ απλή και είναι πλέον σε όλους γνωστή:

(i) Κάθε σωματίο έλκει κάθε άλλο.

(ii) Η ένταση της αμοιβαίας έλξης δύο σωματίων είναι ανάλογη προς το γινόμενο των μαζών τους και αντίστροφα ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασής τους.

Με άλλα λόγια: Ας υποθέσουμε ότι $\{\sigma_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, είναι ένα σύστημα n σωματίων και ότι

\vec{r}_j είναι το διάνυσμα που προσδιορίζει τη θέση του σωμάτιου σ_j ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ . Τότε το σωμάτιο σ_k ασκεί στο σ_j δύναμη \vec{F}_{jk} η οποία καθορίζεται από τον τύπο

$$(1.9) \quad \vec{F}_{jk} = -G m_j m_k \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}$$

όπου m_j, m_k οι αντίστοιχες μάζες των δύο σωμάτων και G η λεγόμενη **παγκόσμια σταθερή**. Η τιμή της τελευταίας στο σύστημα μονάδων που έχουμε υιοθετήσει είναι

$$(1.10) \quad G = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ dynes} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{gr}^{-2}$$

Συνακόλουθα,

$$(1.11) \quad \left| \vec{F}_{jk} \right| = G m_j m_k \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2},$$

Η συνολική δύναμη που ασκούν στο σ_j όλα τα υπόλοιπα σωμάτια του συστήματος δίνεται από την έκφραση

$$(1.12) \quad \vec{F}_j = -m_j \sum_{k=1, k \neq j}^n G m_k \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}.$$

Αυτή η δύναμη λέγεται *βαρυτική* και το φαινόμενο που περιγράφεται από το νόμο της παγκόσμιας έλξης ονομάζεται *βαρύτητα*.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η επιτάχυνση του σωμάτιου σ_j που προκαλείται από τη βαρυτική δύναμη είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του, αφού ο 2^{ος} νόμος και η (1.12) συνεπάγονται ότι

$$(1.11) \quad \vec{a}_j = \frac{1}{m_j} \vec{F}_j = - \sum_{k=1, k \neq j}^n G m_k \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^3}.$$

Άλλα παραδείγματα θεωριών ή “φαινομενολογικών προτάσεων” για τον καθορισμό του όρου \vec{F} στην εξίσωση $\vec{a} = \vec{F}/m$ θα παρουσιαστούν στο επόμενο εδάφιο.

3.2 Λύσεις των εξισώσεων κίνησης

Η σχέση $\vec{a} = \vec{F}/m$ που εκφράζει τον 2^ο νόμο την Νευτωνικής Μηχανικής αναφέρεται και σαν *εξίσωση κίνησης* (του σωμάτιου σ μάζας m στο οποίο ασκείται δύναμη \vec{F}). Όπως αναφέραμε, η $\vec{a} = \vec{F}/m$ δηλώνει ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, οι οποίες, για συντομία, συνήθως γράφονται ως εξής:

$$(2.1) \quad m x'' = F_x, \quad m y'' = F_y, \quad m z'' = F_z.$$

Εδώ, άγνωστες είναι οι συναρτήσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$, και $z = h(t)$ που καθορίζουν τη στιγμιαία θέση του σωμάτιου σ στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιεί τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x - y - z$. Συνακόλουθα, το σύμβολο x'' δηλώνει τη δεύτερης τάξης παράγωγο της

συνάρτησης $f(t)$ κι ανάλογα για τα υπόλοιπα. Στην περίπτωση που η κίνηση του σ περιορίζεται σε μια ευθεία ή σε ένα επίπεδο, η εξίσωση κίνησης ορίζεται από μία ή δύο, αντίστοιχα, από τις εξισώσεις του συστήματος (2. 1).

Όσο αφορά τα δεξιά μέλη των διαφορικών εξισώσεων (2.1), αυτά είναι συγκεκριμένοι συνδυασμοί ή συναρτήσεις της επτάδας (x, y, z, x', y', z', t) και άλλων παραμέτρων, συναρτήσεις που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη “θεωρία δυνάμεων”, σαν αυτή του Newton για την βαρύτητα. Το τι ακριβώς εννοούμε θα διευκρινιστεί από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα (Αρμονικός ταλαντωτής)

Ξεκινάμε την ανάλυση της εξίσωσης κίνησης μ’ ένα κλασικό μονοδιάστατο παράδειγμα, αυτό του “αρμονικού ταλαντωτή”. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η έκφραση για τη δύναμη που ασκείται στο σωματίο σ , όταν αυτό βρίσκεται στο σημείο x , είναι

$$(2. 2) \quad F_x = -k x, \quad k > 0.$$

Αυτή η έκφραση, χρησιμοποιείται γ.π. στην περίπτωση που η δύναμη οφείλεται σ’ ένα ελατήριο στη μια άκρη του οποίου είναι προσδεμένο το σωματίο σ , ενώ η άλλη είναι στερεωμένη σ’ ένα ακίνητο αντικείμενο - σ’ έναν τοίχο, ας πούμε. Τότε η σταθερή k εκφράζει το πόσο δύσκολα συμπιέζεται ή επιμηκύνεται (ξεντώνει) το ελατήριο, οπότε ονομάζεται **χαρακτηριστική σκληρότητας**. Οι μονάδες της είναι dynes/cm.

Σ’ αυτή την περίπτωση η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$(2. 3) \quad m x'' = -k x$$

που μπορεί να γραφτεί και σαν

$$(2. 4) \quad x'' = -\omega^2 x, \quad \omega := \sqrt{k/m}.$$

Αυτή η εξίσωση λύνεται πολύ εύκολα με βάση την εξής παρατήρηση. Αν υποθέσουμε προσωρινά ότι $\omega = 1$, τότε η (2. 4) εκφράζει το ακόλουθο πρόβλημα: Να βρεθεί μια συνάρτηση $f(t)$ που είναι ίδια με τη δεύτερης τάξης παράγωγό της, αλλά με αντίθετο πρόσημο.

Από τον ακόλουθο πίνακα αμέσως συνάγεται ότι δυο λύσεις αυτού του προβλήματος είναι οι $f(t) = \sin t$ και $f(t) = \cos t$. Κι αυτό γιατί, αν γ.π. $f(t) = \sin t$, τότε $f'(t) = \cos t$ και άρα $f''(t) = (\cos t)' = -\sin t = -f(t)$.

$f(t)$	$f'(t)$
t^n	$n t^{n-1}$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$1 / \cos^2 t$
$\ln t$	t^{-1}
e^t	e^t
$\sinh t := \frac{1}{2} (e^t - e^{-t})$	$\cosh t := \frac{1}{2} (e^t + e^{-t})$
$\cosh t$	$\sinh t$
$\tanh t := \frac{\sinh t}{\cosh t}$	$1 / \cosh^2 t$

Αν πάλι $f(t) = \cos t$, τότε $f'(t) = -\sin t$ και άρα $f''(t) = (-\sin t)' = -\cos t = -f(t)$. Εύκολα εξάλλου διαπιστώνεται ότι και κάθε γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων είναι επίσης λύση του ίδιου προβλήματος.

Τέλος, όταν $f(t) = \sin(\omega t)$, τότε $f'(t) = \omega \cos(\omega t)$ και άρα $f''(t) = (\omega \cos(\omega t))' = -\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 f(t)$. Το ίδιο προφανώς ισχύει και όταν $f(t) = \cos(\omega t)$.

Συνεπώς, οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2. 4) είναι της μορφής

$$(2. 5) \quad x = f(t | \omega, C_1, C_2) = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t),$$

όπου C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές.

Σημειώστε ότι από την (2. 5) έπεται ότι

$$(2. 6) \quad x_0 := f(0 | \omega, C_1, C_2) = C_2,$$

$$(2. 7) \quad v_0 \equiv x'_0 := f'(0 | \omega, C_1, C_2) = \omega C_1.$$

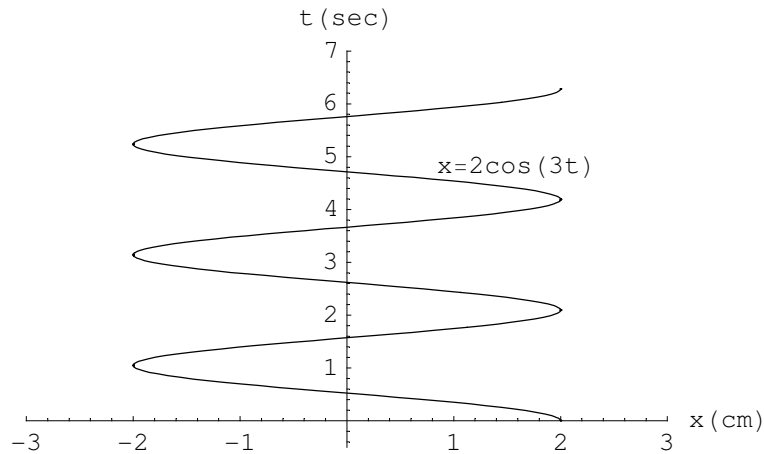
Άρα η λύση (2. 5) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(2. 8) \quad x = F(t | \omega, x_0, v_0) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + x_0 \cos(\omega t),$$

που, εκτός από την $\omega := \sqrt{k/m}$, περιέχει ως παραμέτρους την “αρχική θέση”, x_0 , και την “αρχική ταχύτητα”, v_0 , του σωμάτιου σ .

Από το γεγονός ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2π , έπεται ότι το σωματίο σ επανέρχεται στην ίδια θέση κάθε $T := 2\pi/\omega$ δευτερόλεπτα. Η τελευταία ποσότητα ονομάζεται (*χρονική*) *περίοδος* του αρμονικού ταλαντωτή κι η αντίστροφή της, $\nu := 1/T$, *συχνότητα της ταλάντωσης*.

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε το τμήμα της κοσμικής καμπύλης του σ (το γράφημα της συνάρτησης $F(t | \omega, x_0, v_0)$) που αντιστοιχεί στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 3T$, στην περίπτωση όπου $\omega = 3 \text{ sec}^{-1}$, $x_0 = 2 \text{ cm}$ και $v_0 = 0 \text{ cm/sec}$.



Σχ. 2.1

Παράδειγμα

Αν υποθεθεί ότι στο σωματίο σ του προηγούμενου παραδείγματος, πέρα από τη "δύναμη επαναφοράς" $-k x$, ασκείται και η "αντίσταση του αέρα" που είναι ανάλογη προς την ταχύτητα του σ , τότε η έκφραση για τη δύναμη γίνεται

$$(2.9) \quad F_x = -k x - l x', \quad k, l > 0.$$

Προφανώς, οι μονάδες της σταθερής l είναι dynes·sec/cm.

Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση κίνησης γίνεται

$$(2.10) \quad m x'' = -k x - l x'$$

που μπορεί να γραφτεί και σαν

$$(2.11) \quad x'' = -\omega^2 x - 2\rho x', \quad \omega := \sqrt{k/m}, \quad 2\rho := \sqrt{k/l}.$$

Για να λύσουμε αυτή τη διαφορική εξίσωση, αρκεί πάλι να παρατηρήσουμε ότι, αν η λύση της είναι $x = f(t)$, τότε η συνάρτηση $f(t)$ πρέπει να έχει την εξής ιδιότητα: Η δεύτερης τάξης παράγωγός της είναι ίση με το γραμμικό συνδυασμό της ίδιας και της παραγώγου της. Αυτό μπορεί να συμβεί εάν και μόνο όταν οι παράγωγοι της $f(t)$ είναι ανάλογοι προς την ίδια την $f(t)$. Από τον παραπάνω κατάλογο των παραγώγων των πιο γνωστών συναρτήσεων φαίνεται καθαρά ότι κάτι τέτοιο ισχύει μόνο για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και την εκθετική. Από την άλλη και οι τρεις αυτές συναρτήσεις μπορούν να εκφραστούν σε ενιαία μορφή ως εξής.

Εισάγουμε τη έκφραση

$$(2.12) \quad e^{iz} := \cos z + i \sin z,$$

στην οποία το i είναι μια συμβολική ποσότητα με την ιδιότητα ότι $i^2 = -1$. Κατά τα άλλα, το σύμβολο i απλώς χρησιμεύει για να γράφουμε ένα ζευγάρι πραγματικών αριθμών στη μορφή αθροίσματος. Με άλλα λόγια,

$$(2.13) \quad \cos z + i \sin z \equiv (\cos z, \sin z).$$

Στη συνέχεια, επιβάλλουμε στην έκφραση e^{iz} όλες τις ιδιότητες της συνήθους εκθετικής συνάρτησης, όπως την

$$(2.14) \quad e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} e^{i\beta}.$$

Με βάση τον ορισμό (2.12), η σχέση (2.14) σημαίνει ότι

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \end{aligned}$$

Από τη σύμβαση που υιοθετήσαμε έπεται ότι αυτή η ισότητα αποτελεί τη συντομογραφία της ακόλουθης δυάδας:

$$(2.16\alpha) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$(2.16\beta) \quad \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta.$$

Αυτές, όμως, είναι γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Τώρα, από το γεγονός ότι $\sin(-z) = -\sin z$ έπεται ότι

$$(2.17) \quad e^{-iz} := \cos z - i \sin z.$$

Συνακόλουθα,

$$(2.18) \quad \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z, \quad \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z.$$

Με το τελευταίο αποτέλεσμα ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού μας ότι και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούν να γραφτούν στην μορφή της εκθετικής.

Επιστρέφοντας στη διαφορική εξίσωση (2.11), υποθέτουμε ότι η λύση της είναι της μορφής $x = f(t) = e^{\lambda t}$. Τότε $f'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $f''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ και άρα η διαφορική εξίσωση θα ικανοποιείται αν η παράμετρος λ είναι τέτοια που

$$(2.19) \quad \lambda^2 = -\omega^2 - 2\rho\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega^2 = 0.$$

Αυτό ισχύει όταν

$$(2.20) \quad \lambda = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega^2}.$$

Είναι φανερό ότι ανάλογα με τη σχέση των αρχικών παραμέτρων ω και ρ , προκύπτουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

(i) $\omega > \rho$.

Τότε $\rho^2 - \omega^2 < 0$ και άρα $\sqrt{\rho^2 - \omega^2} = \sqrt{(-1)(\omega^2 - \rho^2)} = i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$. Συνακόλουθα, $\lambda = -\rho \pm i\sqrt{\omega^2 - \rho^2}$ οπότε

$$(2.21) \quad \begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{(-\rho \pm i \sqrt{\omega^2 - \rho^2})t} = e^{-\rho t} e^{\pm i \sqrt{\omega^2 - \rho^2} t} \\ &= e^{-\rho t} (\cos \sqrt{\omega^2 - \rho^2} t + i \sin \sqrt{\omega^2 - \rho^2} t). \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$(2.22) \quad x = f(t | \omega, \rho, C_1, C_2) = e^{-\rho t} (C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \rho^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \rho^2} t).$$

(ii) $\omega < \rho$.

Τότε $\rho^2 - \omega^2 > 0$, και η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$(2.23) \quad x = f(t | \omega, \rho, C_1, C_2) = e^{-\rho t} (C_1 e^{\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\omega^2 - \rho^2} t}).$$

(iii) $\omega = \rho$.

Σ' αυτή την περίπτωση, η παραπάνω διαδικασία δίνει μόνο μία λύση, την $e^{-\rho t}$. Ωστόσο, μια δεύτερη λύση μπορεί εύκολα να βεθεί αν υποθεθεί ότι είναι της μορφής $g(t) e^{-\rho t}$. Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στη διαφορική εξίσωση οδηγεί στη συνθήκη $g''(t) = 0$, που σημαίνει ότι $g(t) = C_1 t + C_2$. Συνεπώς η αντίστοιχη λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$(2.24) \quad x = f(t | \omega, C_1, C_2) = e^{-\omega t} (C_1 t + C_2).$$

Παράδειγμα

Παραμένοντας στην ανάλυση της εξίσωσης κίνησης σε μια χωρική διάσταση, εξετάζουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος δύο σωματιών, το οποίο συνδέεται άμεσα με το πρώτο παράδειγμα.

Ένα ελατήριο τείνει να επανέλθει στο φυσικό του μήκος αν τεντωθεί ή συμπιεστεί. Αυτή η τάση αναδειχεται και με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε δύο σωματίδια, τα σ_1 και σ_2 , που είναι στερεωμένα στα άκρα ενός ελατηρίου φυσικού μήκους L . Πιάνουμε τα σωματίδια και τα τραβάμε προς αντίθετες κατευθύνσεις, έτσι που το ελατήριο να επιμηκυνθεί, και μετά τα αφήνουμε. Παρακολουθούμε την κίνηση των από τη στιγμή που τα αφήνουμε και μετά.

Αν τη στιγμή t , οι συντεταγμένες θέσης των σ_1 , σ_2 είναι x_1 και x_2 , αντίστοιχα, τότε η μεταξύ τους απόσταση είναι $|x_1(t) - x_2(t)|$. Αυτή η απόσταση είναι και το μήκος του ελατηρίου τη στιγμή t . Αν υποθέσουμε ότι $x_2 > x_1$, τότε το μήκος του ελατηρίου τη στιγμή t διαφέρει από το φυσικό του μήκος L κατά $\Delta L = x_2 - x_1 - L$. Αν ο λόγος $|\Delta L| / L$ είναι πολύ μικρότερος από τη μονάδα, τότε το ελατήριο ασκεί δύναμη ίση προς $-k \Delta L$ σε καθένα από τα δύο σωματίδια που έχουν προσδεθεί στα άκρα του, όπου k η χαρακτηριστική σκληρότητας του ελατηρίου.

Με άλλα λόγια, η δύναμη που ασκείται στο σ_1 είναι ίση προς $k[x_2 - x_1 - L]$. Αντίστοιχα, η δύναμη που ασκείται στο σ_2 είναι ίση προς $-k[x_2 - x_1 - L]$. Άρα το σύστημα των εξισώσεων κίνησης είναι

$$(2.25) \quad m_1 \ddot{x}_1 = k [x_2 - x_1 - L],$$

$$(2.26) \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k [x_2 - x_1 - L],$$

όπου η τελεία πάνω από ένα γράμμα δηλώνει την παράγωγο της αντίστοιχης συνάρτησης και διπλή τελεία την παράγωγο δεύτερης τάξης.

Προσθέτοντας κατά μέλη, βρίσκουμε ότι

$$(2.27) \quad m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0.$$

Συνεπώς,

$$(2.28) \quad m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = P_0 = \text{σταθ.}$$

Θυμίζουμε ότι, στο πλαίσιο της Νευτωνικής θεωρίας, η ποσότητα $\vec{p} := m \vec{v}$ ονομάζεται **ορμή** του σωματίου (που έχει μάζα m και ταχύτητα \vec{v}). Συνεπώς, η ποσότητα

$$(2.29) \quad P := m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2$$

αντιπροσωπεύει την **ολική ορμή** του συστήματος $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται ότι η ολική ορμή του συστήματος που εξετάζουμε είναι σταθερή και ίση με P_0 .

Η εξ. (2.29) συνεπάγεται ότι

$$(2.30) \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 = P_0 t + C.$$

Τώρα, η ποσότητα

$$(2.31) \quad X := \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

αναφέρεται ως **κέντρο μάζας του συστήματος** $\{\sigma_1, \sigma_2\}$.

Αφού, λοιπόν, τη στιγμή $t = 0$ η εξ. (2.30) γίνεται

$$(2.32) \quad m_1 x_{10} + m_2 x_{20} = C$$

έπεται ότι

$$(2.33) \quad X = \Psi(t | m, X_0, P_0) = \frac{P_0}{m} t + m X_0,$$

όπου

$$(2.34) \quad m := m_1 + m_2, \quad X_0 := \frac{m_1 x_{10} + m_2 x_{20}}{m}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το κέντρο μάζας του συστήματος $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $V = P_0/m$. Για ευκολία, επιλέγουμε τις τιμές $P_0 = 0$, $X_0 = 0$ για την ολική ορμή και την αρχική θέση του κέντρου μάζας, αντίστοιχα. Τότε η εξίσωση (2.30) γίνεται

$$(2.35) \quad x_1 = -(m_2/m_1) x_2.$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για τη x_1 στην εξίσωση κίνησης του σωματίου σ_2 δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(2.36) \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k \left[\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) x_2 - L \right].$$

Αυτή η εξίσωση γράφεται και σαν

$$(2.37) \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 + \frac{kL}{m_2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{km}{m_1 m_2}}.$$

Εύκολα εξακριβώνεται ότι η έκφραση

$$(2.38) \quad x_2 = f(t | \omega, m_1, m_2, L, C_1, C_2) = \frac{m_1}{m} L + C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t),$$

όπου C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές αποτελεί λύση της εξ. (2.37).

Στο όριο $(m_2/m_1) \rightarrow 0$, η (2.38) γίνεται

$$(2.39) \quad x_2 = \Phi(t | \omega_0, m_2, L, C_1, C_2) = L + C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m_2},$$

ενώ από την (2.35) συνάγεται ότι $x_1 = 0$.

Από την (2.38) έπεται ότι

$$(2.40) \quad x_{20} := f(0 | \omega, m_1, m_2, L, C_1, C_2) = \frac{m_1}{m} L + C_2$$

$$(2.41) \quad v_{20} := \dot{f}(0 | \omega, m_1, m_2, L, C_1, C_2) = \omega C_1.$$

Συνακόλουθα, οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των σωματίων σ_1 και σ_2 μπορούν να γραφτούν στην ακόλουθη μορφή που δείχνει καθαρά το πως υπεισέρχονται οι αρχικές τους θέσεις και ταχύτητες.

$$(2.42) \quad x_2 = \frac{m_1}{m} L[1 - \cos(\omega t)] + \frac{v_{20}}{\omega} \sin(\omega t) + x_{20} \cos(\omega t),$$

$$(2.43) \quad x_1 = -\frac{m_2}{m} L[1 - \cos(\omega t)] + \frac{v_{10}}{\omega} \sin(\omega t) + x_{10} \cos(\omega t),$$

$$(2.44) \quad v_{10} = -(m_2/m_1) v_{20}, \quad x_{10} = -(m_2/m_1) x_{20}.$$

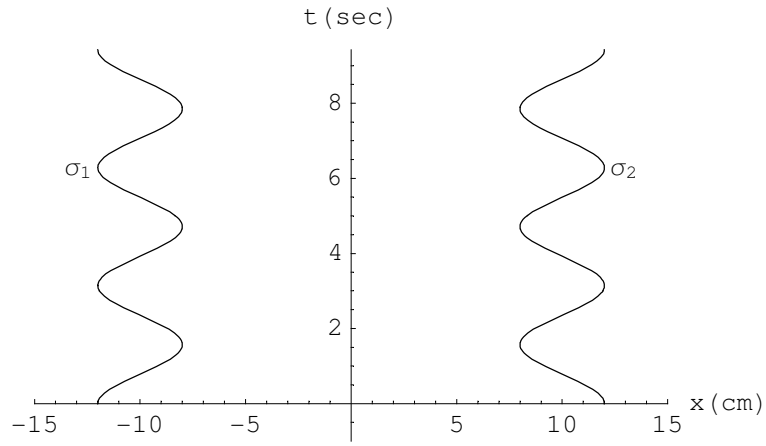
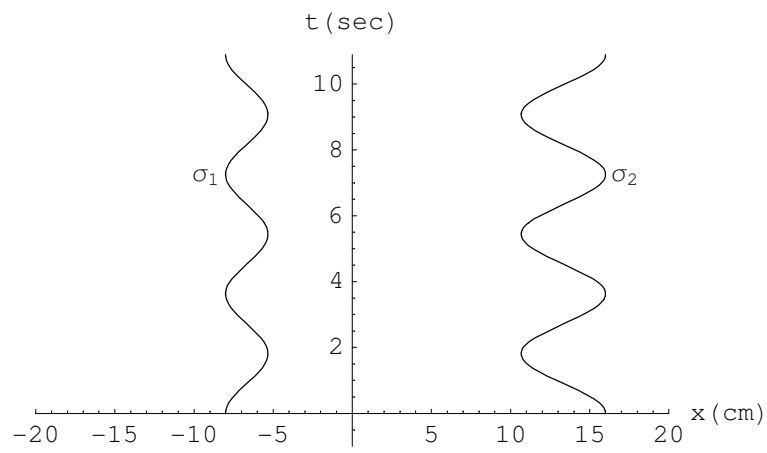
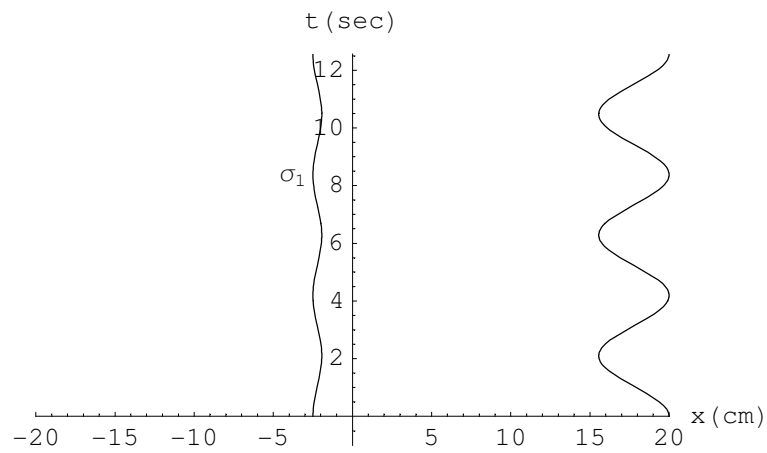
Στα επόμενα τρία σχήματα δείχνουμε αντιπροσωπευτικά τμήματα των κοσμικών καμπυλών των σ_1, σ_2 , όταν $L = 20$ cm, $k = 4$ dynes/cm, $v_{20} = 0$, $x_{20} = 12$ cm και

(i) $m_1 = m_2 = 2$ gr, $x_{20} = 12$ cm,

(ii) $m_1 = 4$ gr, $m_2 = 2$ gr, $x_{20} = 16$ cm,

(iii) $m_1 = 16$ gr, $m_2 = 2$ gr, $x_{20} = 20$ cm,

αντίστοιχα. Από αυτά τα σχήματα φαίνεται καθαρά ότι, καθώς ο λόγος m_1/m_2 μεγαλώνει, το πλάτος των ταλαντώσεων του σ_1 όλο και μικραίνει. Στο όριο $m_1/m_2 \rightarrow \infty$, το σωματίο σ_1 μένει ακίνητο και μόνο το σ_2 ταλαντώνεται. Αυτή η οριακή κατάσταση αντιστοιχεί στη λύση (2.39) και, από φυσική άποψη στο πιο πάνω παράδειγμα του αρμονικού ταλαντωτή. Εδώ, τον ρόλο του τοίχου τον παίζει το ... υπέρβαρο σωματίο σ_1 .

 **$\Sigma\chi. 2.2$**  **$\Sigma\chi. 2.3$**  **$\Sigma\chi. 2.4$**

Παράδειγμα

Περνάμε πλέον στη μελέτη της εξίσωσης κίνησης ενός συστήματος σωματίων στις τρεις διαστάσεις - ενός συστήματος με ξεχωριστό ενδιαφέρον τόσο από την άποψη της ιστορίας της φυσικής όσο και από την άποψη των σύγχρονων εφαρμογών. Αναφερόμαστε στο παράδειγμα δύο σωματίων που κινούνται υπό την επίδραση την αμοιβαίας βαρυτικής του έλξης, μόνο.

Αν, λοιπόν, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ είναι τα διανύσματα θέσης των σωματίων σ_1 και σ_2 , αντίστοιχα, τότε, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε παραπάνω, η κίνηση του συστήματος $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ καθορίζεται από τις εξισώσεις

$$(2.45) \quad m_1 \vec{r}_1'' = \vec{F}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$(2.46) \quad m_2 \vec{r}_2'' = \vec{F}_{21} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Από αυτές αμέσως έπεται ότι

$$(2.47) \quad m_1 \vec{r}_1'' + m_2 \vec{r}_2'' = 0.$$

Συνεπώς,

$$(2.48) \quad m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = \vec{P}_0,$$

και άρα

$$(2.49) \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{P}_0 t + \vec{C},$$

όπου \vec{P}_0, \vec{C} αυθαίρετα (σταθερά) διανύσματα.

Όπως και στο μονοδιάστατο παράδειγμα, το διάνυσμα

$$(2.50) \quad \vec{P} := m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2'$$

παριστάνει την ολική ορμή και το

$$(2.51) \quad \vec{R} := \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Από την (2.49) συνάγεται ότι η ολική ορμή είναι σταθερή και ίση με \vec{P}_0 κι ότι το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα

$$(2.52) \quad \vec{V} = \frac{\vec{P}_0}{M}, \quad M := m_1 + m_2,$$

αφού η παραπάνω εξίσωση γράφεται σαν

$$(2.53) \quad \vec{R} = \frac{\vec{P}_0}{M} t + \vec{R}_0.$$

Για να διευκολύνουμε την παραπέρα ανάλυση του προβλήματος, μπορούμε και πάλι να επιλέξουμε τις τιμές $\vec{P}_0 = 0$, $\vec{R}_0 = 0$ για την ολική ορμή και την αρχική θέση του κέντρου μάζας, αντίστοιχα. Τότε η εξ (2. 49) γίνεται

$$(2. 54) \quad \vec{r}_1 = -(m_2 / m_1) \vec{r}_2.$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για το διάνυσμα θέσης \vec{r}_1 του σ_1 στην εξίσωση κίνησης του σωματίου σ_2 δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(2. 55) \quad m_2 \vec{r}_2'' = -G m_1 m_2 \frac{[1+(m_2/m_1)] \vec{r}_2}{|[1+(m_2/m_1)] \vec{r}_2|^3}$$

Αυτή γράφεται και σαν

$$(2. 56) \quad m_2 \vec{r}_2'' = -G m_2 \mu \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3}, \quad \mu := \frac{m_1^3}{M^2}$$

Για ν' απλοποιήσουμε τη γραφή των εξισώσεων που ακολουθούν, θέτουμε $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}$, $m_2 \equiv m$, $G m \equiv k$, οπότε η εξίσωση κίνησης του σ_2 γίνεται

$$(2. 57) \quad \vec{r}'' = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

Αναλυτικότερα,

$$(2. 58) \quad x'' = -k \frac{x}{r^3}, \quad y'' = -k \frac{y}{r^3}, \quad z'' = -k \frac{z}{r^3}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Από τις δυο πρώτες απ' αυτές τις εξισώσεις αμέσως έπεται ότι

$$(2. 59) \quad y x'' - x y'' = (y x' - x y')' = 0.$$

Συνεπώς, $y x' - x y' = \text{σταθ.}$ κι αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε

$$(2. 60) \quad L_z := m(y x' - x y') = L_3,$$

όπου L_3 αυθαίρετη σταθερή.

Με ανάλογο τρόπο, ο συνδυασμός της δεύτερης με την τρίτη και της τρίτης με την πρώτη των εξισώσεων (2. 58) δίνει

$$(2. 61) \quad L_x := m(y z' - z y') = L_1,$$

και

$$(2. 62) \quad L_y := m(z x' - x z') = L_2$$

αντίστοιχα, όπου L_1 , L_2 τυχαίες σταθερές.

Το διάνυσμα

$$(2. 63) \quad \vec{L} \equiv (L_x, L_y, L_z) := \vec{r} \times \vec{p},$$

$\vec{r} \times \vec{p}$ το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{r} και $\vec{p} := m\vec{v}$, ονομάζεται **στροφορμή** του σωματίου μάζας μ και ταχύτητας \vec{v} (και άρα ορμής $\mu\vec{v}$) ως προς την αρχή των αξόνων $x - y - z$. Συνακόλουθα, τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να αναδιατυπωθούν λέγοντας ότι η **στροφορμή του σωματίου ως προς την αρχή των αξόνων διατηρείται** (μένει σταθερή).

Αφού, τώρα, το διάνυσμα \vec{L} δε μεταβάλλεται, το ίδιο θα ισχύει και για το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα \vec{r} και \vec{p} . Κι αυτό γιατί από τον ορισμό, $\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$, του \vec{L} έπεται ότι $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$, $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση του σωματίου σ_2 περιορίζεται σε ένα επίπεδο. Χωρίς να μειώσουμε τη γενικότητα των αποτελεσμάτων μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό το επίπεδο ταυτίζεται με το επίπεδο $x - y$. Ισοδύναμα, μπορούμε να εισαγάγουμε ένα καινούργιο σύστημα Καρτεσιανών αξόνων του οποίου το επίπεδο $x - y$ ($z = 0$) να ταυτίζεται με το επίπεδο μέσα στο οποίο κινείται το δοσμένο σωματίο.

Με τον περιορισμό $z = 0$ οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$(2.64) \quad x'' = -k \frac{x}{r^3}, \quad y'' = -k \frac{y}{r^3}, \quad , \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Από αυτές έπεται ότι

$$(2.65) \quad x'x'' + y'y'' = -k \frac{1}{r^3} (xx' + yy').$$

Ισοδύναμα,

$$(2.66) \quad \frac{1}{2} [(x')^2 + (y')^2]' = -k \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} (x^2 + y^2)' \equiv -k \frac{r'}{r^2}.$$

Συνεπώς,

$$(2.67) \quad \frac{1}{2} [(x')^2 + (y')^2]' = k \frac{1}{r} + \text{σταθ.}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη σχέση με m καταλήγουμε στην έκφραση

$$(2.68) \quad \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 - k m \frac{1}{r} = E = \text{σταθ.}, \quad \vec{v} := (x', y').$$

Οι ποσότητες

$$(2.69) \quad T := \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2, \quad V := -k m \frac{1}{r},$$

ονομάζονται **κινητική και δυναμική ενέργεια** του σωματίου, αντίστοιχα.

Έτσι, η εξίσωση (2.68) μπορεί να γραφτεί σαν

$$(2.70) \quad T + V = E$$

και εκφράζει τη **διατήρηση της ολικής ενέργειας** του σωματίου σ_2 .

Η παραπέρα ανάλυση του προβλήματος διευκολύνεται με την εισαγωγή των πολικών συντεταγμένων (r, φ) , μέσω των εξισώσεων

$$(2.71) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Γιατί τότε

$$(2.72) \quad x' = r' \cos \varphi - r \varphi' \sin \varphi, \quad y' = r' \sin \varphi + r \varphi' \cos \varphi,$$

κι έτσι

$$(2.73) \quad |\vec{v}|^2 \equiv (x')^2 + (y')^2 = (r')^2 + r^2 (\varphi')^2.$$

$$(2.74) \quad x y' - y x' = r^2 \varphi'.$$

Άρα οι εξισώσεις (2.60) και (2.68) γίνονται

$$(2.75) \quad L_z := m r^2 \varphi' = L \equiv L_3$$

και

$$(2.76) \quad \frac{1}{2} m [(r')^2 + r^2 (\varphi')^2] - k m \frac{1}{r} = E$$

αντίστοιχα.

Η αντικατάσταση της πρώτης στη δεύτερη δίνει

$$(2.77) \quad \frac{1}{2} m (r')^2 + \frac{L^2}{2 m r^2} - k m \frac{1}{r} = E.$$

Λύνοντας ως προς r' βρίσκουμε ότι

$$(2.78) \quad r' = \pm \sqrt{2 m E + 2 k m^2 \frac{1}{r} - \frac{L^2}{r^2}}.$$

Με τη βοήθεια πινάκων για ολοκληρώματα, αυτή η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης λύνεται εύκολα και δίνει τη στιγμιαία απόσταση του σωματίου σ_2 από την αρχή των αξόνων $x-y$ στη μορφή $r = f(t | m, L, E, r_0)$. Η αντικατάσταση της τελευταίας έκφρασης στην (2.75) οδηγεί σε μια διαφορική εξίσωση που η λύση της, στη μορφή $\varphi = g(t | m, L, E, r_0, \varphi_0)$, δίνει τη στιγμιαία γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης, $\vec{r} = (x, y)$, με τον άξονα x .

Ωστόσο, στο βαθμό που μας ενδιαφέρει μόνο η τροχιά του σ_2 , μπορούμε να εργαστούμε μ' ένα διαφορικό τρόπο. Αν υποθέσουμε ότι $L \neq 0$, τότε και $\varphi' \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $\varphi = g(t)$ μπορεί να λυθεί ως προς την παράμετρο t , στη μορφή $t = h(\varphi)$. Η αντικατάσταση της τελευταίας στην $r = f(t)$ οδηγεί στην $r = \Phi(\varphi) = f(h(\varphi))$. Συνακόλουθα,

$$(2.79) \quad \dot{r} := \Phi'(\varphi) = f'(h(\varphi)) h'(\varphi) = f'(h(\varphi)) [1 / f'(h(\varphi))] \equiv r' / \varphi'$$

Ας εισαγάγουμε και τη συνάρτηση

$$(2.80) \quad u := r^{-1} \equiv 1 / \Phi(\varphi).$$

Από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι

$$(2.81) \quad \dot{u} := -r^{-2} \dot{r} = -r^{-2} r' / \varphi' = -r^{-2} r' / (L / m r^2) = -m r' / L.$$

Η αντικατάσταση της τελευταίας στην (2.77) μετατρέπει αυτή τη διαφορική εξίσωση στην

$$(2.82) \quad \frac{L^2}{2m} (\dot{u})^2 + \frac{L^2}{2m} u^2 - k m u = E.$$

Παραγωγίζοντας αυτήν ως προς φ , καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$(2.83) \quad \ddot{u} + u - k \frac{m^2}{L^2} = 0.$$

Αν θέσουμε

$$(2.84) \quad U := u - k \frac{m^2}{L^2},$$

η παραπάνω διαφορική εξίσωση θα πάρει την οικεία μορφή.

$$(2.85) \quad \ddot{U} + U = 0.$$

Η λύση της τελευταίας μπορεί να γραφτεί σαν $U = A \cos(\varphi - \varphi_0)$, οπότε

$$(2.86) \quad r = \frac{1}{k(m/L)^2 + A \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Σημείωση (Κυριακή, 05-11-2006):

Σημειώστε ότι $\dot{U} = -A \sin(\varphi - \varphi_0)$ και άρα $\dot{U} = 0$ όταν $\varphi = \varphi_0$ ή $\varphi = \varphi_0 + \pi$. Από την άλλη μεριά $\dot{U} = \dot{u} = -m r' / L$ και άρα οι τιμές φ_0 και $\varphi_0 + \pi$ της γωνίας φ αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η “ακτινική ταχύτητα”, r' , του σωμάτιου μηδενίζεται.

Σύμφωνα με την (2.86), όταν $\varphi = \varphi_0$, το σωματίο σ_2 βρίσκεται σε απόσταση r_0 από την αρχή των αξόνων, όπου

$$(2.87) \quad r_0 = \frac{1}{k(m/L)^2 + A}.$$

Απ' αυτή τη σχέση έπεται ότι

$$(2.88) \quad A = \frac{1}{r_0} - k \frac{m^2}{L^2}$$

και άρα η (2.86) μπορεί να γραφτεί σαν

$$(2.89) \quad r = \frac{1}{k \frac{m^2}{L^2} + \left(\frac{1}{r_0} - k \frac{m^2}{L^2}\right) \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Ισοδύναμα,

$$(2.90) \quad r = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)},$$

όπου

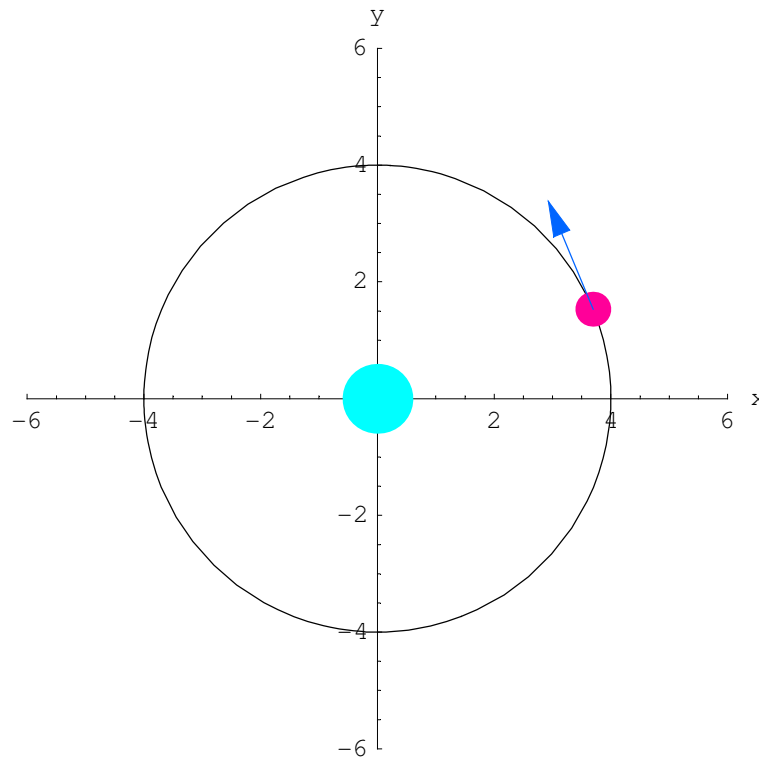
$$(2.91) \quad \rho := \frac{L^2}{k m^2}, \quad \varepsilon := \frac{\rho}{r_0} - 1.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon \geq 0$, αφού, στην αντίθετη περίπτωση, αρκεί να αντικαταστήσουμε το φ_0 από το $\varphi_0 + \pi$ για να καταλήξουμε στα ίδια. Επιπλέον, θέτουμε $\varphi_0 = 0$, για ευκολία στη γραφή των εκφράσεων που προκύπτουν στην παρακάτω ανάλυση, οπότε η (2.90) γίνεται

$$(2.92) \quad r = \Phi(\varphi | \rho, \varepsilon) = \frac{\rho}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

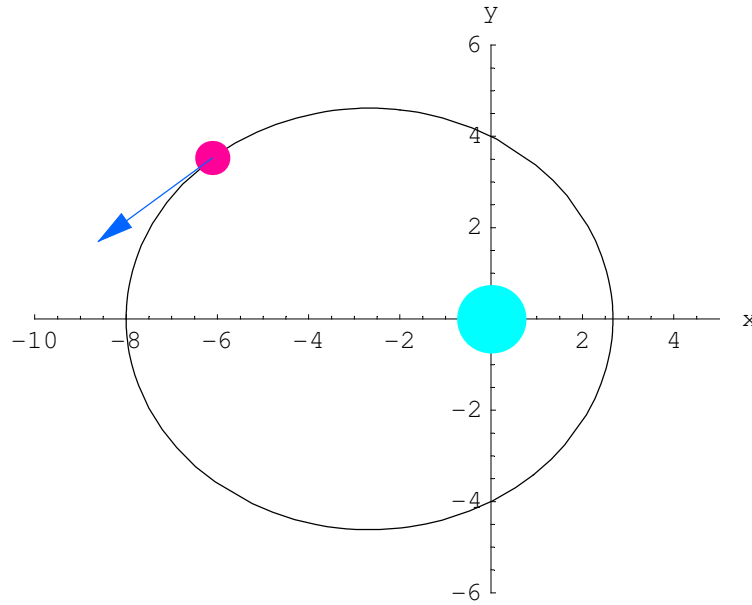
Αυτή η εξίσωση περιγράφει τις καμπύλες του επίπεδου $x - y$ που είναι γνωστές ως *κωνικές τομές*. Πιο συγκεκριμένα, ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου ε , διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $\varepsilon = 0$. Τότε $r = \rho$, πράγμα που σημαίνει ότι το σωματίο κινείται σε κύκλο ακτίνας ρ με κέντρο την αρχή των αξόνων $x - y$.



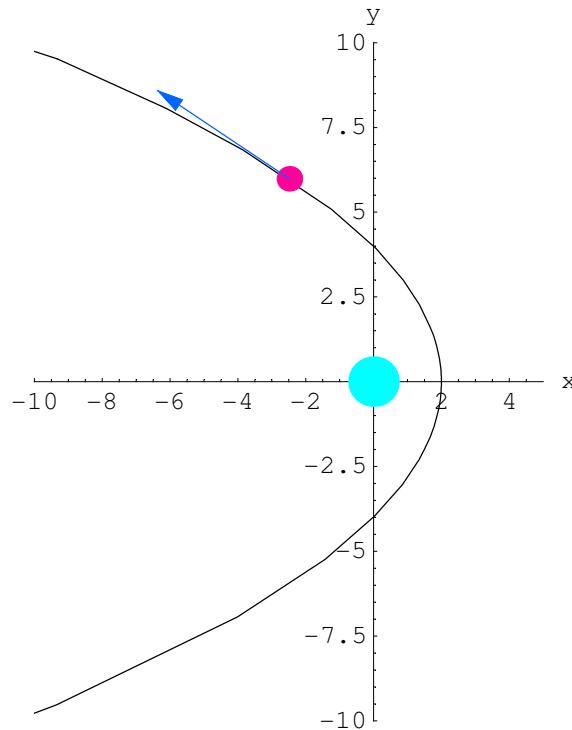
Σχ. 2.5

(ii) $0 < \varepsilon < 1$. Η τροχιά του σωματίου είναι η κλειστή καμπύλη που ονομάζουμε *έλλειψη*. Η παράμετρος ε ορίζει την *εκκεντρότητα* της έλλειψης, μια από τις εστίες της οποίας ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Η απόσταση του σωματίου από το “ελκτικό κέντρο” είναι ελάχιστη όταν $\varphi = 0$. Τότε $r = r_{\min} = \rho / (1 + \varepsilon)$. Η απόσταση μεγιστοποιείται στο αντίθετο σημείο όπου $\varphi = \pi$, οπότε $r = r_{\max} = \rho / (1 - \varepsilon)$.



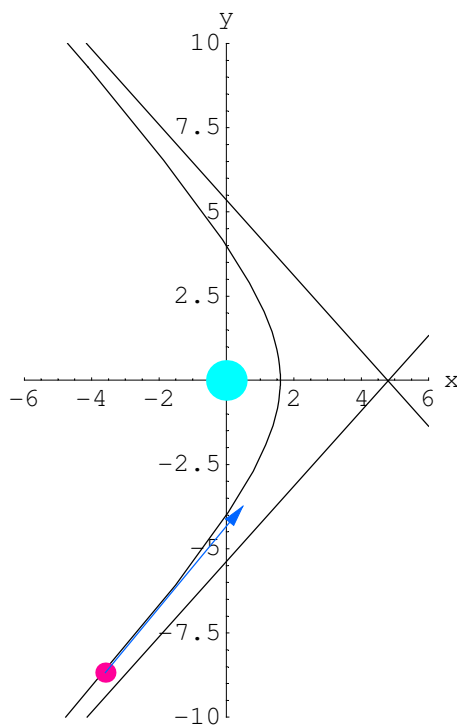
Σχ. 2.6

(iii) $\varepsilon = 1$. Η τροχιά που διαγράφει το σωματίο είναι η ανοιχτή καμπύλη που ονομάζουμε *παραβολή*. Η απόστασή του από την αρχή των αξόνων έχει μόνο ελάχιστη τιμή, την $r_{\min} = \rho/2$.

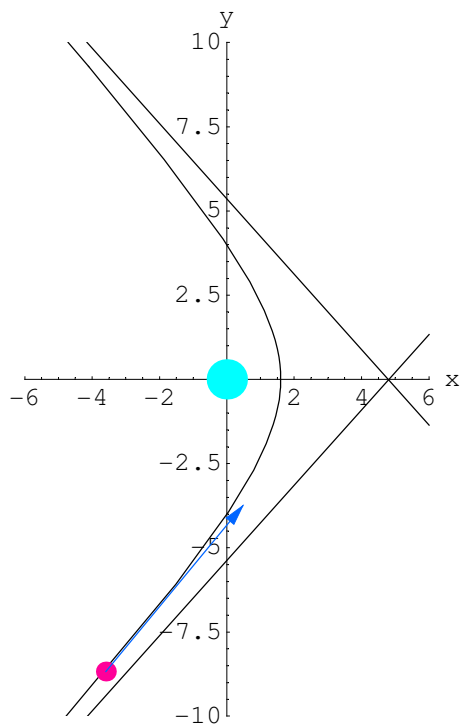


Σχ. 2.7

(iv) $\varepsilon > 1$. Ισχύουν τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση, με τη διαφορά ότι $r_{\min} = \rho / (1 + \varepsilon)$ και η καμπύλη λέγεται **υπερβολή**.



Σχ. 2.8



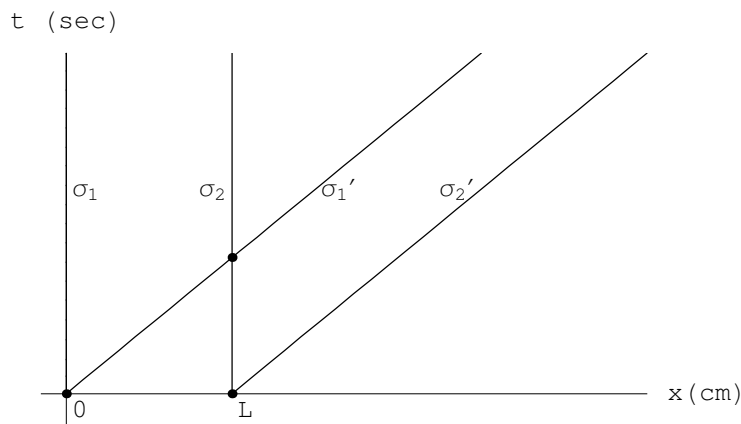
4. Σχετικότητα των Γαλιλαίου-Νεύτωνα

Είναι πλέον καιρός να μελετήσουμε τη σχέση που τυχόν υπάρχει ανάμεσα στις περιγραφές φυσικών γεγονότων και κινούμενων σωμάτων που δίνουν δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Για ευκολία, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με την περίπτωση όπου τα πάντα λαβαίνουν χώρα πάνω σε μια ευθεία γραμμή. Συνακόλουθα, μπορούμε να θεωρούμε και τα εμπλεκόμενα συστήματα αναφοράς ως μονοδιάστατα, οπότε η θέση των γεγονότων και των σωμάτων προσδιορίζεται από μία μόνο χωρική συντεταγμένη.

4.1 Σύνδεση συστημάτων αναφοράς

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι τα σώματα σ_1 και σ_2 , ακινητούν στα σημεία $x = 0$ και $x = L$, αντίστοιχα, του άξονα x ενός συστήματος αναφοράς (Σ) Σ . Τα σ_1 και σ_2 θα μπορούσαν να ταυτιστούν με τα άκρα μιας ράβδου μήκους L που καταλαμβάνει το διάστημα $0 \leq x \leq L$ του άξονα x .

Θεωρούμε, τώρα, δύο άλλα σώματα, τα σ_1' και σ_2' , που κινούνται με σταθερή ταχύτητα $V > 0$ ως προς το Σ και που τη στιγμή $t = 0$ βρίσκονται δίπλα στα σ_1 και σ_2 , αντίστοιχα. Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις κοσμικές γραμμές της παραπάνω τετράδας σωμάτων για κάποιο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T$.



Σχ. 1.1

Είναι φανερό ότι, τη χρονική στιγμή t , το σ_1' θα βρίσκεται στο σημείο $x = V t$, ενώ το σ_2' θα βρίσκεται στο σημείο $x = L + V t$. Άρα, η μεταξύ τους απόσταση θα είναι L , όση δηλαδή και τη στιγμή $t = 0$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε t , έπεται ότι, για το Σ Σ , τα σώματα σ_1' , σ_2' μπορεί να θεωρηθούν ως τα άκρα ενός μονοδιάστατου σώματος μήκους L .

Θα υποθέσουμε ότι αυτό το σώμα ορίζει τον άξονα x' ενός συστήματος αναφοράς Σ' . Για εποπτεία, μπορούμε να ταυτίζουμε το Σ' μ' ένα αυτοκίνητο, πλοίο, αεροπλάνο ή το βαγόνι ενός τρένου και τον άξονα x' με τη μεγάλη διάσταση (μήκος) αυτού του μεταφορικού μέσου.

Χωρίς να μειώνεται η γενικότητα της ανάλυσής μας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σ_1' βρίσκεται συνεχώς στο σημείο $x' = 0$ του άξονα x' και πως το ρολόι του Σ' δείχνει $t' = 0$, όταν το σ_1' βρίσκεται δίπλα στο σ_1 . Ας ονομάσουμε αυτό το γεγονός (της συνεύρεσης των σ_1 και σ_1') γ_0 . Τότε οι χωροχρονικές συντεταγμένες του, ως προς τα Σ και Σ' , αντίστοιχα, είναι $(x_0, t_0) = (0, 0)$ και $(x_0', t_0') = (0, 0)$.

Θεωρούμε, στη συνέχεια, το ζευγάρι των γεγονότων:

$$\gamma_1 = \text{συνάντηση του } \sigma_2' \text{ με το } \sigma_2 \text{ τη στιγμή } t = 0,$$

$$\gamma_2 = \text{συνάντηση του } \sigma_1' \text{ με το } \sigma_2 \text{ κάποια τη στιγμή αργότερα.}$$

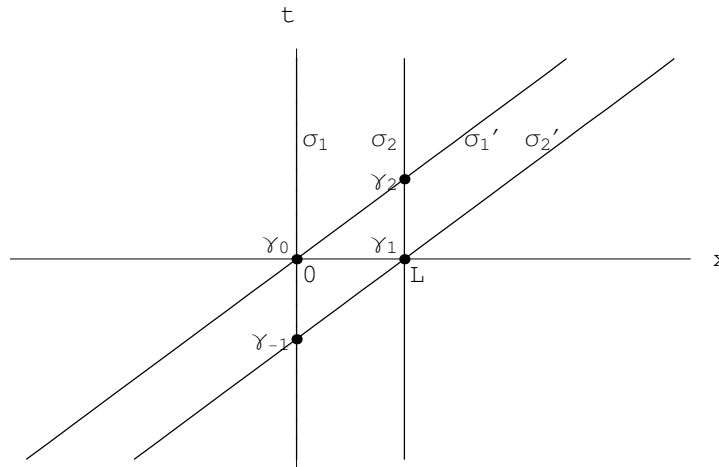
Προφανώς, οι συντεταγμένες αυτών των γεγονότων ως προς το Σ είναι $(x_1, t_1) = (L, 0)$ και $(x_2, t_2) = (L, L/V)$, αντίστοιχα.

Αν θεωρήσουμε το ίδιο προφανές ότι οι συντεταγμένες των γεγονότων γ_1 και γ_2 ως προς το Σ είναι $(x_1', t_1') = (L, 0)$ και $(x_2', t_2') = (0, L/V)$, αντίστοιχα, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε το εξής. Σύμφωνα με το Σ' , το σώμα σ_2 μετακινήθηκε από τη θέση $x_1' = L$, όπου βρισκόταν τη στιγμή $t_1' = 0$, στη θέση $x_2' = 0$, όπου έφτασε στιγμή $t_2' = L/V$. Άρα η ταχύτητα του σ_2 ως προς το Σ είναι ίση με

$$\frac{x_2' - x_1'}{t_2' - t_1'} = \frac{0 - L}{L/V} = -V.$$

Αυτό το συμπέρασμα είναι πολύ εύλογο από φυσική άποψη. Τα σώματα σ_1' , σ_2' κινούνται με την ίδια ταχύτητα V ως προς το Σ και, ουσιαστικά, ορίζουν το Σ . Άρα, το σώμα σ_2 που είναι ακίνητο στο Σ θα πρέπει να κινείται με την ίδια σε μέτρο ταχύτητα, V , αλλά προς την αντίθετη κατεύθυνση, ως προς το Σ .

Με βάση το επόμενο σχήμα, εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το σώμα σ_1 , άρα και για το Σ συνολικά, αφού το τελευταίο ορίζεται από το ζευγάρι $\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Πιο συγκεκριμένα, κάποια στιγμή πριν από την $t = 0$, ακριβέστερα όταν $t = -L/V$, το σώμα σ_2' περνάει δίπλα από το σ_1 . Όταν πλέον $t = 0$, δίπλα από το σ_1 περνάει το σ_1' . Άρα, ως προς το Σ , το σώμα σ_1 κινήθηκε από τη θέση όπου βρίσκεται το σ_2' προς τη θέση του σ_1' . Αφού η απόσταση ανάμεσα σ' αυτές τις δυο θέσεις είναι L , αμέσως συνάγεται ότι η ταχύτητα του σ_1 ως προς το Σ είναι $-V$.



Σχ. 1.2

Αν εξετάσουμε προσεκτικά τα επιχειρήματα που αναπτύξαμε λίγο παραπάνω, θα διαπιστώσουμε αμέσως ότι βασίζονται στην ακόλουθη υπόθεση:

Αν το ΣΑ Σ' κινείται με ταχύτητα V ως προς το ΣΑ Σ, τότε

(α) Η χρονική συντεταγμένη οποιουδήποτε γεγονότος, γ , είναι ίδια στα δύο ΣΑ Σ και Σ'. Με άλλα λόγια, για κάθε γ , $t'(\gamma) = t(\gamma)$.

(β) Η χωρική συντεταγμένη, $x'(\gamma)$, του τυχαίου γεγονότος, γ , ως προς το ΣΑ Σ' προκύπτει, αν από τη χωρική συντεταγμένη του ως προς το ΣΑ Σ, $x(\gamma)$, αφαιρέσουμε τη χωρική συντεταγμένη, Vt , του σωματίου που ορίζει την αρχή του άξονα x' του ΣΑ Σ'. Με άλλα λόγια, για κάθε γ , $x'(\gamma) = x(\gamma) - Vt$.

Παραλείποντας την ένδειξη γ για ευκολία, γράφουμε τις δυο παραπάνω σχέσεις μαζί στη μορφή

$$(1.1) \quad \boxed{x' = x - Vt, \quad t' = t}$$

και σημειώνουμε ότι ισχύουν για κάθε τιμή της ταχύτητας V , θετική ή αρνητική.

Ας υποθέσουμε ότι ένα άλλο σωματίο, το σ , κινείται με ταχύτητα $u > V$ ως προς το ΣΑ Σ και πως τη στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, τη στιγμή $t = 0$, τα σ , σ_1 και σ_1' βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο. Το σ θα συναντήσει το σ_2' κάποια στιγμή t_4 που προσδιορίζεται από το ότι, εκείνη τη στιγμή και τα δύο αυτά σωματίδια βρίσκονται στο ίδιο σημείο του άξονα x , ας πούμε στο $x = x_4$. Με βάση τα δοσμένα για την κίνηση του σ , $x_4 = ut_4$. Από την άλλη, η κίνηση του σ_2' είναι τέτοια που $x_4 = L + Vt_4$. Συνεπώς, $L + Vt_4 = ut_4$, και άρα $t_4 = L/(u - V)$.

Με άλλα λόγια το γεγονός γ_4 της συνάντησης των σωματίων σ και σ_2' έχει συντεταγμένες $(x_4, t_4) = (uL/(u - V), L/(u - V))$, ως προς το ΣΑ Σ. Αντίθετα, ως προς το ΑΣ Σ', οι συντεταγμένες του είναι $(x_4', t_4') = (L, t_4) = (L, L/(u - V))$, αφού στο ΑΣ Σ' το σ_2' βρίσκεται συνεχώς στο σημείο $x_4' = L$.

Σύμφωνα λοιπόν με το $\Sigma_A \Sigma'$, το σ_2' διάνυσε ένα διάστημα μήκους L σε χρονικό διάστημα $L/(u - V)$. Κατά συνέπεια, η ταχύτητα του σ_2' ως προς το $\Sigma_A \Sigma'$ είναι ίση με $u' = L/[L/(u - V)] = u - V$.

Όλοι μας έχουμε άμεση εποπτεία του παραπάνω αποτελέσματος: Άν το αυτοκίνητο στο οποίο επιβαίνουμε κινείται με ταχύτητα V , ας πούμε με 100km/h, και αυτό που περνάει δίπλα μας κινείται με ταχύτητα u , ας πούμε με 120km/h, τότε έχουμε την εντύπωση ότι η ταχύτητα του δεύτερου αυτοκίνητου είναι $u' = u - V$, δηλαδή 20km/h στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Όταν η ταχύτητα του άλλου αυτοκίνητου είναι ίδια μ' εκείνου στο οποίο επιβαίνουμε, τότε το βλέπουμε σαν ακίνητο.

Παράδειγμα

Ένα τραίνο κινείται με ταχύτητα 80km/h. Ο επιβάτης Α κάθετα στη θέση του και διαβάζει εφημερίδα. Ο επιβάτης Β βαδίζει προς την καντίνα που βρίσκεται στο μπροστινό μέρος του τραίνου, ενώ ο Γ επιστρέφει κρατώντας μία φιάλη νερό. Αν οι δυο τελευταίοι βαδίζουν με ταχύτητα 5km/h, να βρεθούν οι ταχύτητες των επιβατών Α, Β και Γ ως προς το έδαφος.

Να βρεθεί, επίσης, η ταχύτητα με την οποία οι τρεις επιβάτες βλέπουν να κινούνται τα δέντρα που τυχόν βρίσκονται πλάι στις γραμμές του τραίνου.

Λύση

Ονομάζουμε Σ το Σ_A του εδάφους και Σ' το Σ_A του τραίνου. Αν υποθέσουμε ότι η θετική κατεύθυνση των αντίστοιχων αξόνων x και x' είναι αυτή προς την οποία κινείται το τραίνο, τότε η ταχύτητα του Σ' ως προς το Σ είναι $V = 80\text{km/h}$.

Η ταχύτητα του επιβάτη Α ως προς το Σ' είναι $u_A' = 0$. Συνεπώς, η ταχύτητά του ως προς το Σ_A του εδάφους είναι $u_A = u_A' + V = 80\text{km/h}$. Ανάλογα, $u_B' = 5\text{km/h}$, οπότε $u_B = u_B' + V = 85\text{km/h}$, και $u_\Gamma' = -5\text{km/h}$, οπότε $u_\Gamma = u_\Gamma' + V = 75\text{km/h}$.

Θεωρούμε, τώρα, καθέναν από του επιβάτες Α, Β και Γ, ως ένα σώμα που ορίζει το δικό του Σ_A . Ας ονομάσουμε, λοιπόν, τα Σ_A των επιβατών Σ_A' , Σ_B' και Σ_Γ' , αντίστοιχα. Από τα προηγούμενα έπεται ότι οι ταχύτητες αυτών των Σ_A ως προς το Σ_A του εδάφους είναι $V_A = 80\text{km/h}$, $V_B = 85\text{km/h}$ και $V_\Gamma = 75\text{km/h}$.

Ένα δέντρο που βρίσκεται δίπλα στις γραμμές του τραίνου είναι ακίνητο ως προς το Σ . Άρα η ταχύτητά του είναι $u_\Delta = 0$. Κατά συνέπεια, ως προς το Σ_A' , η ταχύτητα του δέντρου είναι $u_\Delta' = u_\Delta - V_A = -80\text{km/h}$. Η ταχύτητά του ως προς το Σ_B' είναι $u_\Delta' = u_\Delta - V_B = -85\text{km/h}$ και εκείνη ως προς το Σ_Γ' είναι $u_\Delta' = u_\Delta - V_\Gamma = -75\text{km/h}$.

Η σχέση $u' = u - V$ ανάμεσα στην ταχύτητα u ενός σώματιου σ ως προς ένα $\Sigma_A \Sigma$ και την ταχύτητα του ίδιου σώματιου ως προς ένα δεύτερο $\Sigma_A \Sigma'$ που κινείται με σταθερή ταχύτητα V ως προς το πρώτο ισχύει και στη γενικότερη περίπτωση που η u δεν είναι σταθερή. Αυτό συνάγεται αμέσως από τις βασικές σχέσεις (1.1) που συνδέουν τις χωροχρονικές συντεταγμένες (x, t) και (x', t') ενός και του αυτού γεγονότος ως προς τα $\Sigma_A \Sigma$ και Σ' , αντίστοιχα.

Για να το διαπιστώσουμε, ας υποθέσουμε ότι, σύμφωνα με το Σ , η κίνηση του σ περιγράφεται από μια σχέση της μορφής $x = f(t)$, όπου $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ δοσμένη ομαλή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το χρονικό διάστημα I . Τότε η στιγμιαία ταχύτητα u του σ ως προς το ΣΑ Σ δίνεται από τη σχέση $u = \dot{f}(t)$, όπου \dot{f} η παράγωγος της f . Η αντικατάσταση της $x = f(t)$ στη σχέση $x' = x - V t$ μας δίνει την

$$(1.2) \quad x' = g(t) \equiv f(t) - V t$$

Όμως, $t' = t$. Άρα η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί σαν

$$(1.3) \quad x' = g(t') \equiv f(t') - V t'$$

και είναι πλέον η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σ ως προς το ΣΑ Σ' .

Κατά συνέπεια, η ταχύτητα του σ ως προς αυτό το ΣΑ δίνεται από τη σχέση

$$(1.4) \quad u' = \dot{g}(t') = \dot{f}(t') - V = \dot{f}(t) - V.$$

Ισοδύναμα,

$$(1.5) \quad \boxed{u'(t') = u(t) - V}$$

Συνεχίζοντας στον ίδιο δρόμο, μπορούμε να βρούμε και την σχέση ανάμεσα στις στιγμιαίες επιταχύνσεις a και a' του σ ως προς τα ΣΑ Σ και Σ' , αντίστοιχα. Ας θυμηθούμε αρχικά ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της, η επιτάχυνση του σ ως προς το ΣΑ Σ δίνεται από την εξίσωση $a = \ddot{f}(t)$. Ανάλογα, όταν $x' = g(t')$, τότε η επιτάχυνση του σ ως προς το ΣΑ Σ' δίνεται από την εξίσωση $a' = \ddot{g}(t')$.

Τώρα, από την εξ. (1.4) αμέσως έπεται ότι

$$(1.6) \quad \ddot{g}(t') = \ddot{f}(t') = \ddot{f}(t)$$

και άρα

$$(1.7) \quad \boxed{a'(t') = a(t)}$$

4.2 Χωροχρονικά διαγράμματα

Θα σταθούμε για λίγο στις σχέσεις (1.1) για να δούμε το πώς εκφράζονται στο επίπεδο των αντίστοιχων χωροχρονικών διαγραμμάτων και των κοσμικών γραμμών σωματίων.

Αρχικά θα σημειώσουμε ότι η περιγραφή των γεγονότων και κινήσεων γίνεται αυτόνομα από κάθε ΣΑ ξεχωριστά. Συνεπώς, για τα ίδια γεγονότα και κινούμενα σώματα μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρα χωροχρονικά διαγράμματα. Κάθε φορά, όμως, περιοριζόμαστε σ' ένα αντιπροσωπευτικό ζευγάρι ΣΑ που αυθαίρετα ονομάζουμε γ.π. Σ και Σ' και που, στην περίπτωση που μελετάμε τώρα, το ένα κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το άλλο.

Για να γίνουμε πιο σαφείς, ας υποθέσουμε ότι το ΣΑ Σ' κινείται με ταχύτητα 2 cm/sec κατά μήκος και προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x του ΣΑ Σ . Υποθέτουμε ότι οι χωροχρονικές

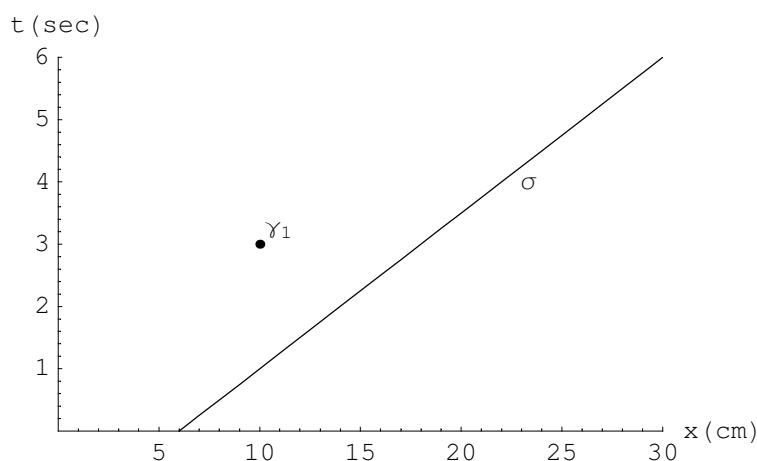
συντεταγμένες του τυχαίου γεγονότος γ ως προς τα Σ και Σ' αντίστοιχα συνδέονται με τις σχέσεις (1. 1) που στην προκείμενη περίπτωση γίνονται

$$(2. 1) \quad x' = x - 2t, \quad , \quad t' = t.$$

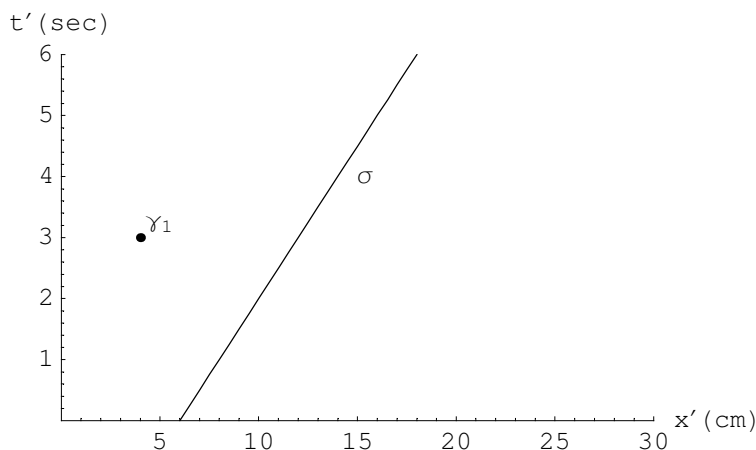
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το γεγονός γ_1 λαβαίνει χώρα τη στιγμή $t_1 = 3 \text{ sec}$ στο σημείο $x_1 = 10 \text{ cm}$, σύμφωνα με το ΣΑ Σ . Από τις σχέσεις (2. 1) έπεται ότι το ίδιο γεγονός συμβαίνει τη στιγμή $t_1' = 3 \text{ sec}$ στο σημείο $x_1' = 4 \text{ cm}$, σύμφωνα με το ΣΑ Σ' .

Ας δούμε τι γίνεται και με την κοσμική γραμμή ενός σωματίου σ που, κατά το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 6 \text{ sec}$, κινείται σύμφωνα με την εξίσωση $x = 6 + 4t$, ως προς το το ΣΑ Σ . Αυτό σημαίνει ότι, ως προς το το ΣΑ Σ' , το σ κινείται σύμφωνα με την εξίσωση $x' = 6 + 2t'$.

Στα αντίστοιχα χωροχρονικά διαγράμματα το γεγονός γ_1 και η κοσμική γραμμή του σ θα εμφανίζονται ως εξής.



Σχ. 2.1



Σχ. 2.2

Αν θέλουμε, μπορούμε να βλέπουμε την εικόνα που δίνει το ΣΑ Σ' , χρησιμοποιώντας μόνο το χωροχρονικό διάγραμμα που κατασκευάζεται με βάση την περιγραφή του Σ . Και αντίστροφα.

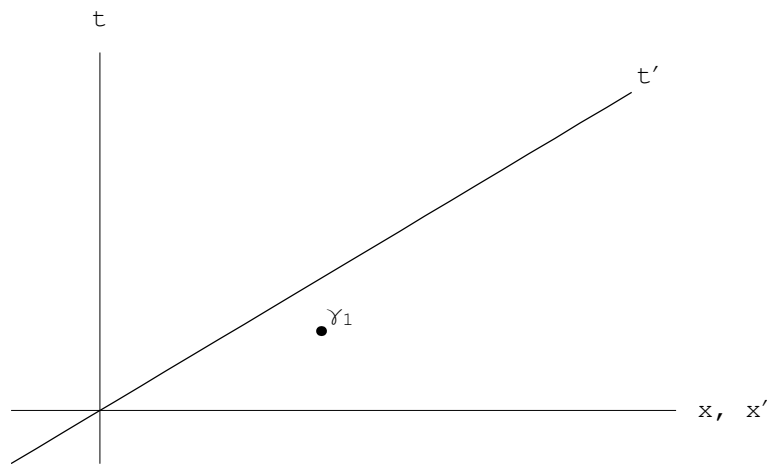
Κάτι τέτοιο απαιτεί να δείχνουμε στο διάγραμμα του Σ και τους άξονες του Σ' , ή στο διάγραμμα του Σ' τους άξονες του Σ . Αυτό όμως είναι απλό.

Πιο συγκεκριμένα, στο διάγραμμα του Σ' , ο άξονας x' αποτελείται από τα σημεία όπου $t' = 0$. Αλλά από τη σχέση $t' = t$ έπεται ότι αυτά τα σημεία αντιστοιχούν σ' εκείνα με $t = 0$ στο Σ , δηλαδή με τον άξονα x .

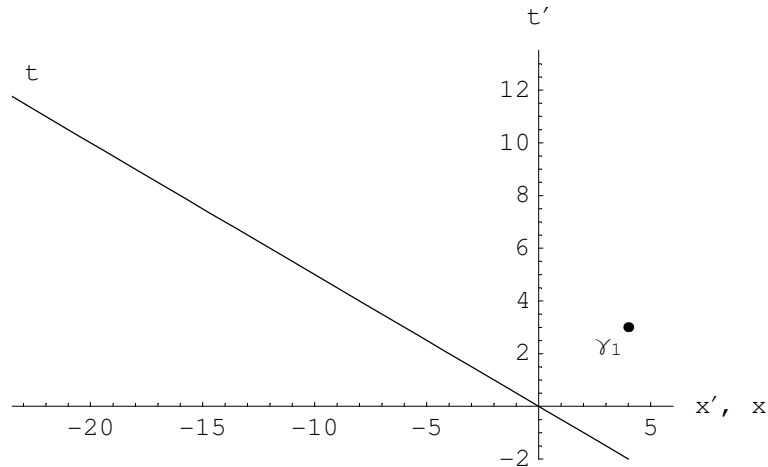
Ανάλογα, ο άξονας t' στο διάγραμμα του Σ' αποτελείται από τα σημεία όπου $x' = 0$. Σύμφωνα με τη σχέση $x' = x - Vt$, αυτά τα σημεία αντιστοιχούν στα σημεία $x = Vt$ του διαγράμματος $x - t$. Με άλλα λόγια ο άξονας t' του διαγράμματος $x' - t'$ αντιστοιχεί στην ευθεία $x = Vt$ του διαγράμματος $x - t$.

Οι σχέσεις $x' = x - Vt$, $t' = t$ εκφράζουν τις συντεταγμένες (x', t') ως συναρτήσεις των (x, t) (και της παραμέτρου V). Μπορούν εύκολα να “αντιστραφούν”, δηλαδή να γραφτούν στη μορφή $x = x' + Vt'$, $t = t'$, έτσι που να εκφράζουν τις συντεταγμένες (x, t) ως συναρτήσεις των (x', t') . Με βάση αυτές τις εκφράσεις, συνάγουμε αμέσως το ακόλουθο συμπέρασμα. Ο άξονας x του διαγράμματος $x - t$, δηλαδή τα σημεία όπου $t = 0$, αντιστοιχεί στον άξονα x' του διαγράμματος $x' - t'$. Ανάλογα, ο άξονας t του διαγράμματος $x - t$, δηλαδή τα σημεία όπου $x = 0$, αντιστοιχεί στην ευθεία $x' = -Vt'$ του διαγράμματος $x' - t'$.

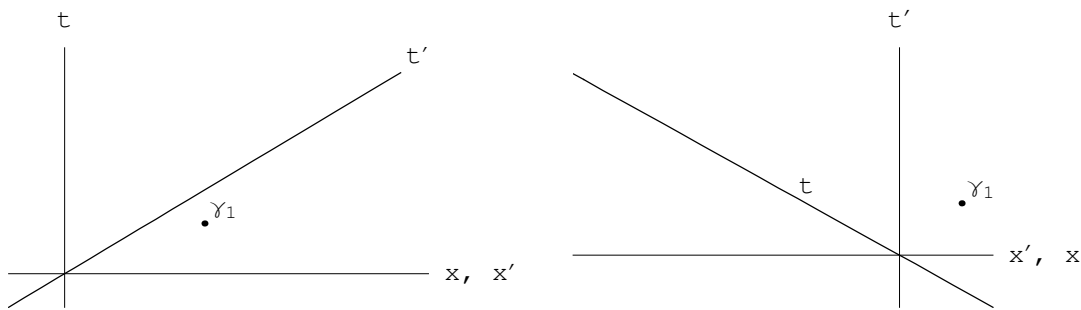
Τα συμπεράσματα της πιο πάνω ανάλυσης διευκρινίζονται από το ακόλουθο ζευγάρι διαγραμμάτων που κατασκευάστηκαν με την υπόθεση ότι $V > 0$.



Σχ. 2.3



Σχ. 2.4

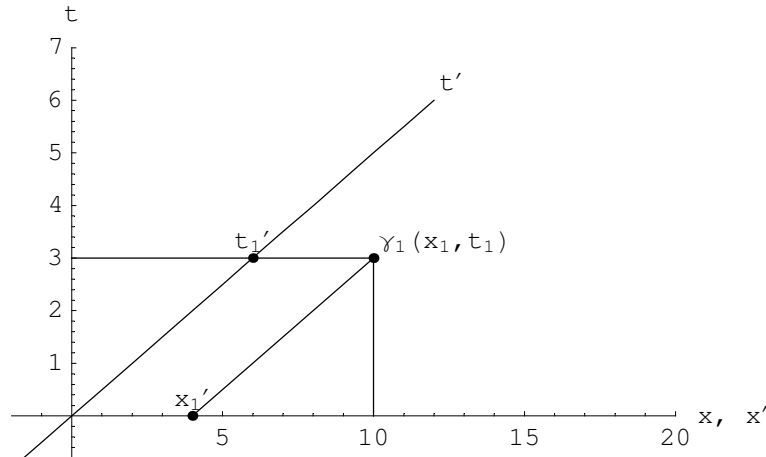


Σχ. 2.5

Δουλεύοντας μόνο με το διάγραμμα $x-t$ στο οποίο έχουμε χαράξει και τα σημεία στα οποία αντιστοιχούν οι άξονες x' και t' , μπορούμε αμέσως να καταλήξουμε σε, ποιοτικά τουλάχιστον, συμπεράσματα για την εικόνα που δίνει το ΣΑ Σ' για γεγονότα και κινήσεις σωμάτων, όταν είναι γνωστή η εικόνα στο σύστημα Σ . Ας γυρίσουμε στο παράδειγμα που ήδη μελετήσαμε.

Το ΣΑ Σ' κινείται με ταχύτητα $V = 2 \text{ cm/sec}$ ως προς το ΣΑ Σ . Σύμφωνα με το ΣΑ Σ , το γεγονός γ_1 λαβαίνει χώρα τη στιγμή $t_1 = 3 \text{ sec}$ στο σημείο $x_1 = 10 \text{ cm}$. Αυτές οι τιμές προσδιορίζουν τη θέση του γ_1 στο διάγραμμα $x-t$, σύμφωνα με τη διαδικασία που έχουμε περιγράψει σε προηγούμενο κεφάλαιο: Από το σημείο x_1 του άξονα x φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα t . Από το σημείο t_1 του άξονα t φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x . Η τομή της με την προηγούμενη προσδιορίζει το σημείο γ_1 .

Έχοντας προσδιορίσει το σημείο (x_1, t_1) στο διάγραμμα $x-t$ με τον παραπάνω τρόπο, βρίσκουμε τις συντεταγμένες (x'_1, t'_1) με την αντίστροφη διαδικασία. Από το σημείο (x_1, t_1) φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα t' . Το σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα x' , που στην περίπτωσή μας ταυτίζεται με τον άξονα x , καθορίζει τη συντεταγμένη x'_1 . Από το ίδιο σημείο (x_1, t_1) φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα x' . Το σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα t' καθορίζει τη συντεταγμένη t'_1 .



Σχ. 2.6

Θα πρέπει να τονιστεί ότι από το διάγραμμα μπορούμε να προσδιορίσουμε αμέσως και την ορθή τιμή της συντεταγμένης x_1' , όχι όμως και της t_1' . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι άξονες x και x' συμπίπτουν ως προς την αρχή και την κλίμακά τους. Αντίθετα, ο άξονας t' στο διάγραμμα $x-t$ δεν έχει την ίδια κλίμακα με τον t . Αυτό συνάγεται από το ίδιο το διάγραμμα, αν ληφθεί υπόψη το ακόλουθο γεγονός.

Σύμφωνα με το διάγραμμα, το σημείο t_1' του άξονα t' έχει συντεταγμένες $(x, t) = (6, 3)$, ενώ το σημείο t_1 του άξονα t έχει συντεταγμένες $(x, t) = (0, 3)$. Μαζί με την αρχή $(x, t) = (0, 0)$ των αξόνων, τα δυο αυτά σημεία ορίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο που έχει για υποτείνουσα το τμήμα του άξονα t' ανάμεσα στο $(0, 0)$ και $(6, 3)$. Συνεπώς, η απόσταση του σημείου t_1' του άξονα t' από την αρχή των αξόνων είναι ίση με $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Από την άλλη μεριά, το σημείο t_1' του άξονα t' αντιπροσωπεύει την τιμή $t_1' = 3$ (sec). Άρα η κλίμακα του άξονα t' είναι ίση με $k = \sqrt{45}/3 = \sqrt{5} \approx 2,236$ - φορές την κλίμακα του άξονα t .

Αν, λοιπόν, βαθμονομήσουμε τον άξονα t' που δείχνουμε στο διάγραμμα $x-t$ λαβαίνοντας υπόψη και τον παραπάνω συντελεστή k , τότε οι συντεταγμένες (x', t') του τυχαίου γεγονότος γ θα καθορίζονται επακριβώς δουλεύοντας αποκλειστικά και μόνο με το διάγραμμα $x-t$.

4.3 Μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η σχέση (1.7) είναι θεμελιώδους σημασίας για την Μηχανική. Προς το παρόν, θα σταθούμε στις βασικές σχέσεις (1.1) για να τις γενικεύσουμε και να εισαγάγουμε κάποια καθιερωμένη ορολογία.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι κάποιο σύστημα αναφοράς Σ έχει ορίσει το Καρτεσιανό σύστημα αξόνων $x y z$ μέσω του οποίου προσδιορίζει τα σημεία στα οποία λαβαίνουν χώρα τα διάφορα γεγονότα του φυσικού κόσμου. Ένα δεύτερο $\Sigma A \Sigma'$ έχει ορίσει το δικό του Καρτεσιανό σύστημα αξόνων $x' y' z'$ μέσω του οποίου προσδιορίζονται τα σημεία όπου λαβαίνουν χώρα τα ίδια

γεγονότα. Αν με τις τετράδες πραγματικών αριθμών (x, y, z, t) και (x', y', z', t') παραστήσουμε τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος γ ως προς τα ΣΑ Σ και Σ' αντίστοιχα, τότε οι σχέσεις

$$(3.1) \quad \boxed{x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t}$$

αναφέρονται ως **ειδικός μετασχηματισμός Γαλιλαίου** και έχουν το ακόλουθο φυσικό νόημα.

(α) Η σταθερή $V \in \mathbb{R}$ και παριστάνει την ταχύτητα με την οποία το ΣΑ Σ' κινείται στην κατεύθυνση του άξονα x του ΣΑ Σ .

(β) Οι χωρικοί άξονες των δύο ΣΑ ταυτίζονται τη στιγμή $t = t' = 0$ και παραμένουν παράλληλοι κάθε άλλη στιγμή $t \in \mathbb{R}$.

Αυτή η ερμηνεία συνάγεται από τις εξής παρατηρήσεις.

(α) Θεωρούμε ένα σώμα σ που μένει ακίνητο στο τυχαίο σημείο $(x', y', z') = (a, b, c)$ του ΣΑ Σ' . Τότε οι συντεταγμένες του σ στο ΣΑ Σ δίνονται από τις σχέσεις $x = a + Vt$, $y = b$, $z = c$. Αλλά, αυτές ακριβώς περιγράφουν ένα σωματίο που κινείται παράλληλα προς τον άξονα x με σταθερή ταχύτητα V .

(β) Την στιγμή $t = t' = 0$ ο ειδικός μετασχηματισμός Γαλιλαίου παίρνει τη μορφή $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$. Άρα, εκείνη την στιγμή, τα δύο συστήματα συμφωνούν απόλυτα για τις τιμές των χωρικών συντεταγμένων κάθε γεγονότος και ειδικότερα για τα σημεία που απαρτίζουν τους άξονες $x y z$ και $x' y' z'$.

Ο χαρακτηρισμός "ειδικός" για το μετασχηματισμό $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$ που ορίζεται από τις εξισώσεις (3.1) αναφέρεται στο γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν γενικότερο μετασχηματισμό των χωροχρονικών συντεταγμένων που αντιστοιχεί στην ίδια φυσική σχέση ανάμεσα στα ΣΑ Σ και Σ' , αλλά είναι πιο περίπλοκος από μαθηματική άποψη.

Όταν λέμε ότι και στη γενικότερη περίπτωση η φυσική σχέση των Σ και Σ' είναι η ίδια εννοούμε ότι το ένα κινείται ως προς το άλλο με σταθερή ταχύτητα. Σύμφωνα όμως με την αρχική επιλογή του Σ για τους άξονες $x y z$, το Σ' μπορεί να μην κινείται παράλληλα προς τον άξονα x , παρά προς κάποια κατεύθυνση που ορίζεται από το διάνυσμα $V = (V_x, V_y, V_z)$. Ωστόσο, μπορεί κανείς αμέσως να σκεφτεί ότι είναι δυνατόν να οριστούν νέοι άξονες $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ στο Σ με τρόπο ώστε η ταχύτητα του Σ' να είναι πλέον στην κατεύθυνση του άξονα \tilde{x} . Αν οι καινούργιοι άξονες του Σ δεν είναι παράλληλοι προς τους άξονες $x' y' z'$ που είχαν οριστεί αρχικά στο ΣΑ Σ' , τότε μπορούμε να ορίσουμε νέους άξονες $\tilde{x}' \tilde{y}' \tilde{z}'$ που να είναι παράλληλοι προς τους $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$, οπότε να καταλήξουμε στη σχέση (3.1) ανάμεσα στις συντεταγμένες $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}', \tilde{t}')$ και $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$.

Σαν ένα διαφορετικό παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το ΣΑ Σ' κινείται στην κατεύθυνση του άξονα x του Σ και οι άξονες $x' y' z'$ είναι παράλληλοι προς τους $x y z$, αλλά οι αρχές τους δεν ταυτίζονται ή/και τα ρολόγια των δύο συστημάτων δεν είναι συγχρονισμένα. Αυτή η περίπτωση καλύπτεται από τους τροποποιημένους μετασχηματισμούς

$$(3.2) \quad \boxed{x' = a + x - Vt, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c, \quad t' = t + d}$$

όπου (a, b, c, d) μια τυχαία τετράδα πραγματικών αριθμών. Είναι τώρα προφανές ότι αρκεί να θέσουμε

$$(3.3) \quad \tilde{x}' = x' - a, \quad \tilde{y}' = y' - b, \quad \tilde{z}' = z' - c, \quad \tilde{t}' = t' - d$$

για να δώσουμε στις σχέσεις (3.2) τη μορφή του ειδικού μετασχηματισμού Γαλιλαίου

$$(3.4) \quad \boxed{\tilde{x}' = x - Vt, \quad \tilde{y}' = y, \quad \tilde{z}' = z, \quad \tilde{t}' = t}$$

Τέλος, επαναλαμβάνοντας τα βήματα που οδήγησαν στις σχέσεις (1.5) και (1.7) για την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός σωμάτιου σ ως προς τα ΣΑ Σ και Σ' , καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις για την περίπτωση της κίνησης στις τρεις διαστάσεις. Αν η κίνηση του σ περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$(3.5) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

όπου f, g, h δοσμένες ομαλές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο χρονικό διάστημα I , τότε οι συνιστώσες της στιγμιαίας ταχύτητας και επιτάχυνσης του σ ως προς τα συστήματα Σ και Σ' συνδέονται με τις σχέσεις

$$(3.6) \quad \boxed{u'_{x'} = u_x - V, \quad u'_{y'} = u_y, \quad u'_{z'} = u_z}$$

και

$$(3.7) \quad \boxed{a'_{x'} = a_x, \quad a'_{y'} = a_y, \quad a'_{z'} = a_z}$$

αντίστοιχα, όπου

$$(3.8) \quad u_x = \dot{f}(t), \quad u_y = \dot{g}(t), \quad u_z = \dot{h}(t)$$

και

$$(3.9) \quad a_x = \ddot{f}(t), \quad a_y = \ddot{g}(t), \quad a_z = \ddot{h}(t).$$

4.4 Νευτωνική μηχανική και μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το σύστημα αναφοράς Σ είναι αδρανειακό, σύμφωνα με το ορισμό που δώσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο κι ο οποίος στηρίζεται στη Νευτωνική Μηχανική. Αυτό σημαίνει ότι στο Σ η δυναμική των σωμάτων περιγράφεται από τους δυο θεμελιακούς νόμους του Νεύτωνα, το 2^ο και τον 3^ο. Έτσι, αν το σωματίο σ υφίσταται συνολική δύναμη \vec{F} από το περιβάλλον του, τότε η επιτάχυνση που θα εμφανίζει ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (ΑΣΑ) Σ θα είναι ίση με

$$(4.1) \quad \vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}.$$

Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, ένα σύστημα αναφοράς Σ' που κινείται ως προς το Σ με σταθερή ταχύτητα V και με τρόπο ώστε η σχέση του με το Σ να περιγράφεται από τον (ειδικό)

μετασχηματισμό του Γαλιλαίου. Τότε, ως προς του Σ' το σώματιο σ θα εμφανίζει επιτάχυνση \vec{a}' , όπου

$$(4.2) \quad \vec{a}' = \vec{a}.$$

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με το Σ' , η δύναμη που ασκείται στο σώματιο σ θα δίνεται από τη διανυσματική ποσότητα \vec{F}' , που θα μπορούσε να είναι διαφορετική από την \vec{F} . Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, θα ήταν αδύνατο να ισχυριστούμε ότι $\vec{a}' = \frac{1}{m} \vec{F}'$ ($\vec{a}' = \frac{1}{m} \vec{F}'$). Με άλλα λόγια, ο 2^{ος} νόμος του Newton δε θα ίσχυε και στο σύστημα αναφοράς Σ' , οπότε το Σ' δε θα ήταν αδρανειακό.

Η πιθανότητα που μόλις αναφέραμε έρχεται σε αντίθεση με την καθημερινή εμπειρία που πρώτος ο Γαλιλαίος περιέγραψε αναλυτικά. Πιο συγκεκριμένα, ο Γαλιλαίος επισήμανε ότι, όταν βρισκόμαστε σε κλειστό χώρο (καμπίνα) ενός πλοίου που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε ήρεμη θάλασσα, δεν είμαστε σε θέση να πούμε αν το πλοίο κινείται ή όχι. Κι αυτό γιατί, για να κινήσουμε τα μέλη του σώματός μας και να μετακινήσουμε αντικείμενα, δεν είμαστε υποχρεωμένοι να καταβάλουμε προσπάθεια διαφορετική από εκείνη που έχουμε συνηθίσει να κάνουμε στη στεριά. Με άλλα λόγια, δε χρειαζόμαστε ειδικές “οδηγίες προς ναυτιλομένους” πριν επιβιβαστούμε σ' ένα καράβι -οδηγίες πού να μας λένε γ.π. τι να κάνουμε όταν ... χρειαστούμε την τουαλέτα.

Από μαθηματική άποψη, μια θεωρία που ενσωματώνει αυτή την παρατήρηση του θα πρέπει να είναι “αναλλοίωτη κατά τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου”. Αυτό σημαίνει ότι οι θεμελιακές της εξισώσεις θα πρέπει να μην αλλάζουν μορφή κατά το μετασχηματισμό $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$ που συνδέει την περιγραφή δύο συστημάτων αναφοράς που κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο. Ειδικότερα για τη Νευτωνική Μηχανική, αυτή η απαίτηση ισοδυναμεί με τη συνθήκη ότι η εξίσωση $\vec{a} = m^{-1} \vec{F}$ θα πρέπει να διατηρεί τη μορφή της και να γίνεται $\vec{a}' = m^{-1} \vec{F}'$, όταν από το σύστημα Σ πάμε στο Σ' . Αλλά από την παρατήρηση ότι, κατά το μετασχηματισμό Γαλιλαίου, η επιτάχυνση δεν αλλάζει έπεται ότι και η δύναμη πρέπει να μείνει ίδια.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η Νευτωνική Μηχανική γίνεται συμβατή με τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου, αν υιοθετηθεί το ακόλουθο αξίωμα.

Αν το Σ είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε και κάθε άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το Σ είναι επίσης αδρανειακό.

Ισοδύναμα, η έκφραση για τη δύναμη \vec{F} είναι τέτοια που σε όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο, η εξίσωση κίνησης έχει την ίδια μορφή, $\vec{a} = m^{-1} \vec{F}$.

Παράδειγμα

Η δύναμη επαναφοράς $F_x = -kx$ στο παράδειγμα του αρμονικού ταλαντωτή δεν ικανοποιεί το πιο πάνω κριτήριο. Κατά το μετασχηματισμό Γαλιλαίου

$$(4.3) \quad (x, t) \rightarrow (x', t') = (x - Vt, t)$$

η εξίσωση κίνησης

$$(4.4) \quad m \ddot{x} = -k x$$

μετατρέπεται στην

$$(4.5) \quad m \ddot{x}' = -k (x' - V t'),$$

αντί για την $m \ddot{x}' = -k x'$.

Παράδειγμα

Τελικά, φαίνεται ότι η μόνη εξίσωση για ένα μόνο σωματίο που είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου είναι η

$$m \ddot{x} = F(t).$$

Απόδειξη

Ο σημειακός μετασχηματισμός

$$(t, x) \rightarrow (t', x') = (t, x + V t)$$

μετατρέπει την

$$m \ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

σε

$$m \ddot{x}' = F(t, x + V t, \dot{x} + V).$$

Συνεπώς, η απαίτηση του αναλλοίωτου ισοδυναμεί με την

$$F(t, x + V t, \dot{x} + V) = F(t, x, \dot{x}), \quad \forall V \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$\partial_x F(t, x, \dot{x}) = \partial_{\dot{x}} F(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Παράδειγμα

Στην περίπτωση των σωματίων σ_1, σ_2 που έχουν προσδεθεί στα άκρα ενός ελατήριου φυσικού του μήκους L , το σύστημα των εξισώσεων κίνησης είναι

$$(4.6) \quad m_1 \ddot{x}_1 = k [x_2 - x_1 - L],$$

$$(4.7) \quad m_2 \ddot{x}_2 = -k [x_2 - x_1 - L].$$

Κατά το μετασχηματισμό Γαλιλαίου

$$(4.7) \quad x_1 \rightarrow x_1' = x_1 - V t, \quad x_2 \rightarrow x_2' = x_2 - V t$$

και άρα

$$(4.9) \quad x_1 - x_2 \rightarrow x_1' - x_2' = (x_1 - V t) - (x_2 - V t) = x_1 - x_2.$$

Συνακόλουθα, οι εξισώσεις κίνησης μετατρέπονται στις

$$(4.10) \quad m_1 \ddot{x}_1' = k [x_2' - x_1' - L],$$

$$(4.11) \quad m_2 \ddot{x}_2' = -k [x_2' - x_1' - L],$$

που έχουν την ίδια ακριβώς μορφή με τις αρχικές.

Παράδειγμα

Όπως είδαμε νωρίτερα η κίνηση δύο σωματίων, σ_1 , σ_2 , υπό την επίδραση την αμοιβαίας βαρυτικής τους έλξης, καθορίζεται από τις εξισώσεις

$$(4.12) \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$(4.13) \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

όπου $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ και οι δυο τελείες δηλώνουν τη δεύτερης τάξης χρονική παράγωγο.

Αν τα παραπάνω ισχύουν στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (ΑΣΑ) Σ , τότε στο ΑΣΑ Σ' θα έχουμε

$$(4.14) \quad \vec{r}_1' = (x_1', y_1', z_1') = (x_1 - V t, y_1, z_1),$$

$$(4.15) \quad \vec{r}_2' = (x_2', y_2', z_2') = (x_2 - V t, y_2, z_2),$$

$$(4.16) \quad \vec{r}_1' - \vec{r}_2' = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Συνεπώς,

$$(4.17) \quad \vec{F}_{12} = \vec{F}'_{12}, \quad \vec{F}_{21} = \vec{F}'_{21}.$$

και, αφού $t' = t$, οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος παραμένουν αναλλοίωτες κατά τον (ειδικό) μετασχηματισμό Γαλιλαίου.

4.5 Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Όπως στο πρώτο παράδειγμα του Εδ. 4.1, ας υποθέσουμε ότι τα σωματίνα σ_1 και σ_2 , ακινητούν στα σημεία $x = 0$ και $x = L$, αντίστοιχα, του άξονα x ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς (ΑΣΑ) Σ . Θεωρούμε ότι τα σ_1 και σ_2 ορίζουν τα άκρα μιας ράβδου μήκους L που καταλαμβάνει το διάστημα $0 \leq x \leq L$ του άξονα x .

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι δύο άλλα σωματίνα, τα σ_1' και σ_2' , κινούνται με σταθερή επιτάχυνση $A > 0$ ως προς το Σ κι ότι τη στιγμή $t = 0$ βρίσκονται δίπλα στα σ_1 και σ_2 , αντίστοιχα, έχοντας μηδενική ταχύτητα. Κατά συνέπεια, η κίνηση του σ_1' περιγράφεται από την εξίσωση $x = \frac{1}{2} A t^2$ κι εκείνη του σ_2' από την εξίσωση $x = L + \frac{1}{2} A t^2$. Συνακόλουθα, ως προς το ΑΣΑ Σ , η απόσταση των σ_1' και σ_2' δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, παρά διατηρεί την

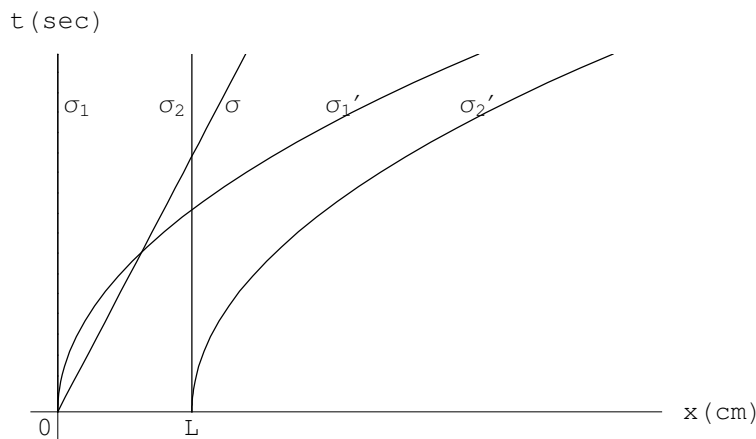
αρχική της τιμή, L . Αυτό σημαίνει ότι, για το ΣΑ Σ , τα σ_1' , σ_2' αποτελούν τα άκρα ενός μονοδιάστατου σώματος (ράβδου) μήκους L . Θα υποθέσουμε ότι αυτό το σώμα ορίζει τον άξονα x' ενός συστήματος αναφοράς Σ' κι ότι το ρολόι του Σ' δείχνει $t' = 0$, όταν τα σ_1' , σ_2' βρίσκονται δίπλα στα σ_1 και σ_2 , αντίστοιχα. Για ευκολία, θεωρούμε ότι το σωματίο σ_1' παραμένει συνεχώς στο σημείο $x' = 0$ και το σ_2' στο σημείο $x' = L$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι τα συστήματα αναφοράς Σ και Σ' καταγράφουν την κίνηση ενός πέμπτου σωματίου, του σ κι ότι η κίνηση του σ ως προς το ΑΣΑ Σ περιγράφεται από την εξίσωση $x = f(t)$. Τότε, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ , την τυχαία στιγμή t η απόσταση του σ από το σ_1' θα είναι ίση με την απόλυτη τιμή του αριθμού $x' = f(t) - \frac{1}{2} A t^2$. Είναι λογικό να θεωρήσουμε αυτό τον αριθμό ως τη χωρική συντεταγμένη του σ ως προς το σύστημα αναφοράς Σ' . Κι αφού $t' = t$, η κίνηση του σ ως προς το Σ' θα περιγράφεται από την εξίσωση $x' = f(t') - \frac{1}{2} A t'^2$. Συνακόλουθα, η ταχύτητα κι επιτάχυνση του σωματίου σ ως προς το Σ' θα δίνονται, αντίστοιχα, από τις εκφράσεις

$$(5.1) \quad v' = \dot{f}(t') - A t',$$

$$(5.2) \quad a' = \ddot{f}(t') - A.$$

Αν γ.π. $f(t) = vt$, πράγμα που σημαίνει ότι το σ κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς το ΑΣΑ Σ , τότε $v' = v - A t'$ και $a' = -A$. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στο επόμενο σχήμα, όπου δείχνουμε τις κοσμικές γραμμές της πεντάδας των σωματίων $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1', \sigma_2', \sigma\}$ για κάποιο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T$, στο χωροχρονικό διάγραμμα του ΑΣΑ Σ .



Σχ. 5.1

Είναι φανερό ότι το ΣΑ Σ' που ορίσαμε παραπάνω δεν είναι αδρανειακό: Το σωματίο σ , μάζας m , που κινείται ελεύθερα (δεν ασκείται πάνω του δύναμη) στο ΑΣΑ Σ , εμφανίζεται να κινείται υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης $F_{\alpha\delta\rho}' = m a' = -m A$ στο ΣΑ Σ' .

Γενικότερα, όταν ένα ΣΑ Σ' δεν κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς κάποιο (από τα άπειρα δυνατά) ΑΣΑ, τότε στο Σ' εμφανίζονται και ψευτοδυνάμεις σαν την παραπάνω $F_{\alpha\delta\rho}'$ που λέγονται **αδρανειακές**.

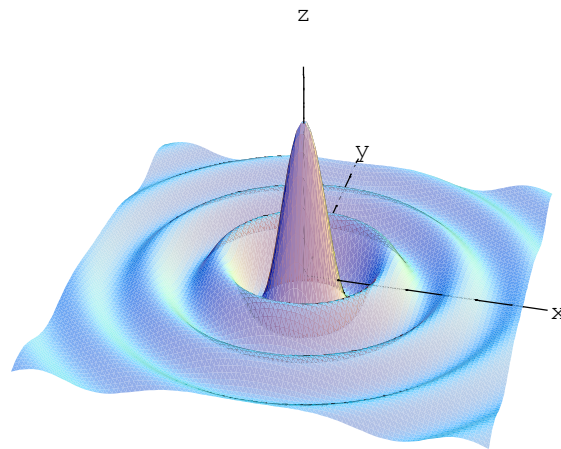
Κυματική διάδοση

5. 1 Κυματική διάδοση

Όλοι μας έχουμε άμεση εμπειρία του ακόλουθου φυσικού φαινομένου. Αν με κάποιο τρόπο διαταράξουμε μια περιοχή ενός σώματος ή ρευστού, τότε σε μικρό χρονικό διάστημα η διαταραχή γίνεται αισθητή και στα υπόλοιπα μέρη του σώματος ή ρευστού.

Τα παραδείγματα είναι πάμπολλα. Με τις κινήσεις των φωνητικών χορδών και του στόματός μας διαταράσσουμε τον αέρα που βρίσκεται μπροστά στο στόμα μας. Αυτή η διαταραχή μεταδίδεται σ' όλα τα υπόλοιπα τμήματα του αέρα που μας περιβάλλει και, τελικά, στο τύμπανο του αυτιού ενός άλλου ατόμου που βρίσκεται στον ίδιο χώρο. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι το άλλο άτομο να ακούει την ομιλία ή ... το τραγούδι μας. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ένα μουσικό όργανο, όταν διεγερθεί από τον οργανοπαίκτη, προκαλεί αναταράξεις του αέρα που βρίσκεται στη γειτονιά του. Αυτές οι αναταράξεις διαδίδονται σ' όλα τα μέρη του υπόλοιπου αέρα και καταλήγουν σε μικρότερη ή μεγαλύτερη διαταραχή των άλλων σωμάτων του περιβάλλοντος, γ.π. των ακουστικών τυμπάνων των ακροατών της μουσικής που παράγεται από το όργανο.

Η διατάραξη μιας περιοχής ενός υγρού μεταδίδεται στα άλλα τμήματά του με τον ίδιο τρόπο. Για παράδειγμα, αν με το δάχτυλό μας πειράξουμε την επιφάνεια μιας λεκάνης με νερό που ηρεμεί, θα δούμε να αναταράσσονται και τα υπόλοιπα τμήματα του νερού. Αν μάλιστα αναταράξουμε ένα σημείο του νερού της λεκάνης με το να αγγίξουμε απλώς της επιφάνεια του νερού ή με το να ρίξουμε από μικρό ύψος ένα μικρό αντικείμενο, θα δούμε τον τρόπο με τον οποίο η διαταραχή διαδίδεται πέρα από το σημείο που “πειράξαμε”. Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε να σχηματίζεται ένας κύκλος με κέντρο το σημείο που διαταράξαμε και ακτίνα που συνεχώς μεγαλώνει. Ο κύκλος αποτελείται από τα στοιχεία του νερού που έχουν ανυψωθεί πάνω από το επίπεδο που ορίζει η υπόλοιπη επιφάνεια του νερού. Η συνεχής διαταραχή του ίδιου σημείου οδηγεί στη συνεχή παραγωγή τέτοιων κύκλων, οπότε μια φωτογραφία της επιφάνειας του νερού μοιάζει με το ακόλουθο σχήμα.



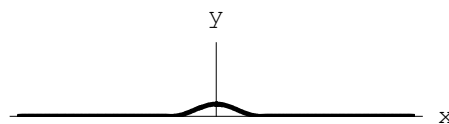
Σχ. 1.1

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, οι κινήσεις του αέρα που βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας προκαλούν αναταράξεις του νερού - αναταράξεις που διαδίδονται με τη μορφή κυμάτων.

Σ' όλες αυτές τις περιπτώσεις δεν έχουμε ολική μετατόπιση των μορίων του μέσου από τη μια περιοχή στην άλλη, ας πούμε από τη γειτονιά του στόματος του ομιλητή στη γειτονιά του αυτιού του ακροατή. Άρα δεν μπορούμε να μιλήσουμε για κίνηση σωματίων από τη θέση του ομιλητή στη θέση του ακροατή. Αν είναι να κάνουμε λόγο για την κίνηση των μορίων του ρευστού, τότε θα πρέπει να μιλήσουμε για τοπικές κινήσεις ή μετατοπίσεις αυτών των μορίων. Με άλλα λόγια, η αρχική διαταραχή προκαλεί την κίνηση των μορίων που βρίσκονται στην περιοχή της διαταραχής και αυτή η κίνηση προκαλεί ανάλογες τοπικές κινήσεις (ταλάντωση) των μορίων της διπλανής περιοχής, εκείνα της επόμενης κ.ο.κ. (και ούτω καθεξής= και πάει λέγοντας).

5. 2 Κύματα σε μια χωρική διάσταση

Με το μάτι μπορούμε να δούμε και τον τρόπο διάδοσης μιας διαταραχής σε ένα μονοδιάστατο μέσο, όπως είναι μια τεντωμένη κλωστή ή χορδή. Μάλιστα, αυτή είναι και η περίπτωση που επιδέχεται απλή μαθηματική αναπαράσταση. Ας υποθέσουμε ότι, στην κατάσταση ηρεμίας η χορδή ορίζει μια ευθεία, την οποία ταυτίζουμε με τον άξονα x του επίπεδου $x y$. Πιάνουμε με τα δάχτυλά μας ένα σημείο της χορδής, το απομακρύνουμε λίγο από την αρχική του θέση και το κρατάμε σταθερά. Τότε η χορδή αποκτάει ένα σχήμα σαν αυτό του παρακάτω διαγράμματος.



Σχ. 2.1

Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα της χορδής που έχει απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας είναι αυτό που αντιστοιχεί στο διάστημα $a \leq x \leq b$ του άξονα x . Για να παραστήσουμε μαθηματικά τη μορφή που έχει αποκτήσει η χορδή με το τράβηγμά μας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση σαν την

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Κι αυτό γιατί το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης, δηλαδή το υποσύνολο $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$, είναι μια καμπύλη του επίπεδου x, y όμοια με αυτήν που δείξαμε στο παραπάνω σχήμα.

Για ευκολία, συχνά υποθέτουμε ότι η χορδή είναι άπειρη, οπότε το σχήμα της μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια ομαλών συναρτήσεων που έχουν ως πεδίο ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία \mathbb{R} . Σαν παράδειγμα αναφέρουμε τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-x^2)$ που έχει παρόμοιο με την προηγούμενη γράφημα.

Ωστόσο, αν πρόκειται να παριστάνουν φυσικές ποσότητες συγκεκριμένων διαστάσεων, συναρτήσεις σαν αυτές που ήδη αναφέραμε θα πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα. Αν γ.π. το x έχει διάσταση μήκους και θέλουμε να ισχύει το ίδιο και για τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$, τότε η έκφραση $f(x) = (x-a)(b-x)$ δεν είναι κατάλληλη, αφού το δεξί της μέλος έχει διάσταση (μήκος)². Θα πρέπει να αντικατασταθεί από την $f(x) = A(x-a)(b-x)$, στην οποία η παράμετρος A έχει διάσταση (μήκος)⁻¹.

Ανάλογα, η συνάρτηση $f(x) = \exp(-x^2)$ πρέπει να τροποποιηθεί με την εισαγωγή κατάλληλων παραμέτρων, αν θέλουμε να μας δίνει σαν αποτέλεσμα έναν αριθμό cm όταν το ίδιο x μετριέται σε cm. Με άλλα λόγια, μια σωστή έκφραση για την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας είναι η $f(x) = A \exp(-x^2/a^2)$, όπου τόσο το A , όσο και το a έχουν διάσταση μήκους.

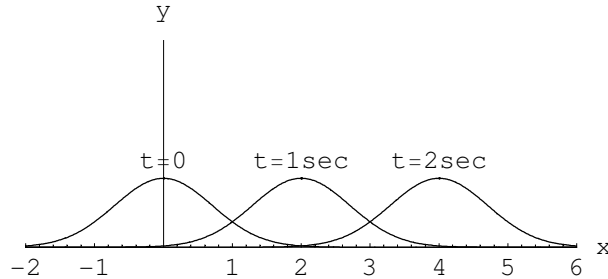
Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = A \exp(-x^2/a^2)$ είναι A και αντιστοιχεί στο $x = 0$. Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε την οικογένεια των συναρτήσεων του x με τύπο $f(x, s) = A \exp[-(x-s)^2/a^2]$, όπου το s παίζει το ρόλο παραμέτρου, τότε το μέγιστο κάθε μέλους αυτής της οικογένειας εξακολουθεί να είναι ίσο με A , αλλά προκύπτει όταν η μεταβλητή x πάρει την τιμή s . Η παράμετρος s έχει διάσταση μήκους, όπως και η μεταβλητή x . Ας τη γράψουμε σαν $s = ct$, όπου το c είναι μια θετική σταθερή με διάσταση ταχύτητας και το t μια παράμετρος με διάσταση χρόνου. Τότε η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x, s)$ γίνεται $f(x, t) = A \exp[-(x-ct)^2/a^2]$ και το μέλος αυτής της οικογένειας που αντιστοιχεί στην τιμή t_1 της παραμέτρου t έχει το μέγιστό του στο σημείο $x_1 = ct_1$.

Για να να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας επιλέξουμε κάποιες τιμές της παραμέτρου t , ας πούμε τις $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ και $t_2 = 2$, κι ας κατασκευάσουμε το γράφημα των αντίστοιχων συναρτήσεων του x , δηλαδή των

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x, t_0) = A \exp(-x^2/a^2) \\ f_1(x) &= f(x, t_1) = A \exp[-(x-c)^2/a^2], \end{aligned}$$

$$f_2(x) = f(x, t_2) = A \exp[-(x - 2c)^2/a^2].$$

Το επόμενο σχήμα παριστάνει τα γραφήματα των παραπάνω συναρτήσεων στο ίδιο διάγραμμα x, y , στην ειδική περίπτωση όπου $A = a = 1$.



Σχ. 2.2

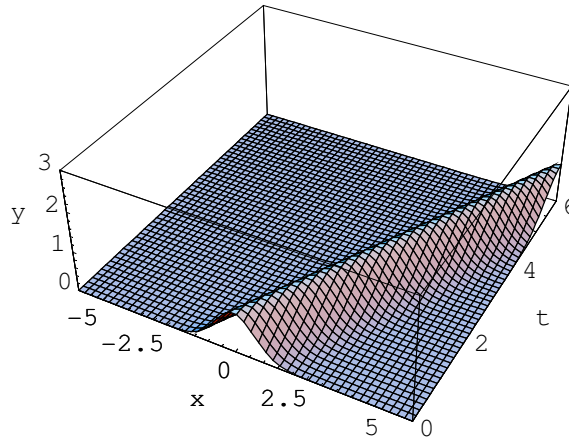
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f_1(x)$ έχει όμοιο με την $f_0(x)$ γράφημα, αλλά μετατοπισμένο έτσι που το μέγιστο να βρίσκεται στο σημείο $x_1 = c t_1 = 2c$. Το ίδιο ισχύει για το γράφημα της $f_2(x)$, της οποίας το μέγιστο βρίσκεται στη θέση $x_2 = c t_2 = 4c$. Γενικότερα, η συνάρτηση $f_t(x) \equiv f(x, t) = A \exp[-(x - ct)^2/a^2]$ έχει το ίδιο ακριβώς γράφημα με την $f_0(x) \equiv f(x, 0) = A \exp(-x^2/a^2)$, αλλά μετατοπισμένο κατά ct . Με άλλα λόγια,

$$(2.1) \quad f_t(x) := A \exp[-(x - ct)^2/a^2] = f_0(x - ct).$$

Συνεπώς, ότι η οικογένεια των συναρτήσεων $f(x, t) = A \exp[-(x - ct)^2/a^2]$ μπορεί να θεωρηθεί πως παριστάνει μια μετατόπιση της χορδής στο σχήμα $y = A \exp(-x^2/a^2)$, η οποία κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα c .

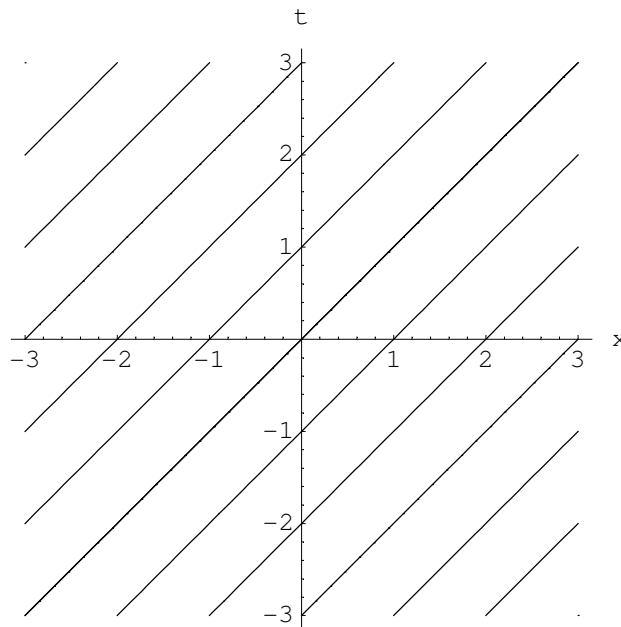
Αν θεωρήσουμε την έκφραση $f(x, t) = A \exp[-(x - ct)^2/a^2]$ σαν τον τύπο μιας συνάρτησης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, των x, t , τότε η προηγούμενη διαπίστωση είναι ταυτόσημη με την εξής: Κατά μήκος κάθε μιας από τις ευθείες του επίπεδου xt οι οποίες ορίζονται από την εξίσωση $x - ct = b = \text{σταθ.}$, η συνάρτηση $f(x, t)$ παραμένει σταθερή και ίση προς $A \exp(-b^2/a^2)$.

Το παραπάνω συμπέρασμα φαίνεται καθαρά και από το γράφημα της συνάρτησης $f(x, t) = A \exp[-(x - ct)^2/a^2]$ που δείχνουμε στο επόμενο σχήμα, όταν $A = c = a = 1$.



Σχ. 2.3

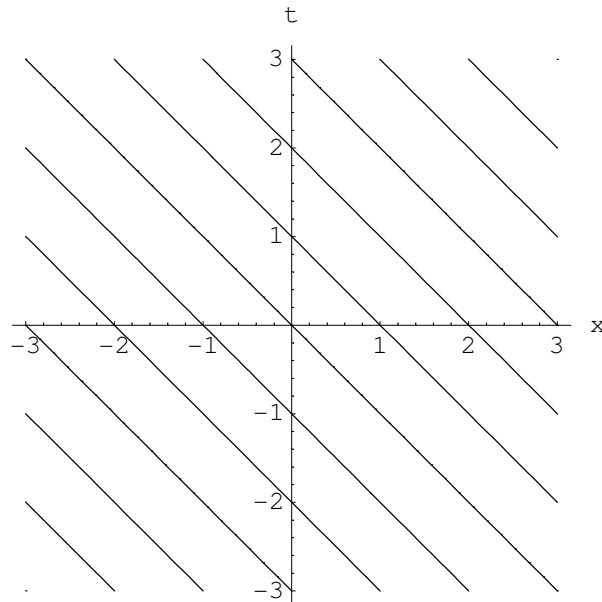
Οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση $x - ct = b$ (μία ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου b) έχουν την ακόλουθη δομή. Αφού $x = b$ όταν $t = 0$, έπεται ότι ο αριθμός b προσδιορίζει το σημείο όπου η ευθεία $x - ct = b$ τέμνει τον άξονα x . Με τη σειρά της, η σταθερή c προσδιορίζει την κλίση κάθε μιας από τις παραπάνω ευθείες ως προς τον άξονα x . Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε ορισμένα μέλη της οικογένειας των ευθειών $x - ct = b$, όταν $c = 1$.



Σχ. 2.4

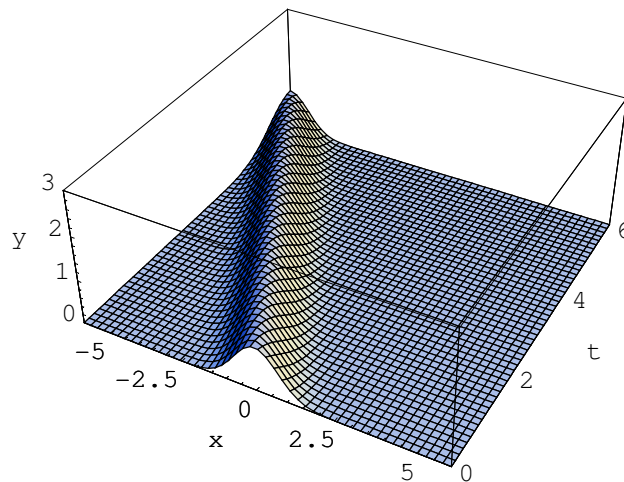
Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $f(x, t) = A \exp[-(x + ct)^2 / a^2]$, όπου και πάλι $c > 0$, διατηρεί την ίδια τιμή κατά μήκος κάθε μιας από τις ευθείες του επίπεδου $x - t$ που ορίζονται από την εξίσωση $x + ct = b$. Αυτές οι είναι όμοιες με εκείνες που ορίζονται από την εξίσωση $x - ct = b$, με τη διαφορά ότι η κλίση τους ως

προς τον άξονα x είναι $-c$. Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε ορισμένα μέλη της οικογένειας των ευθειών $x + ct = b$, όταν $c = 1$.



Σχ. 2.5

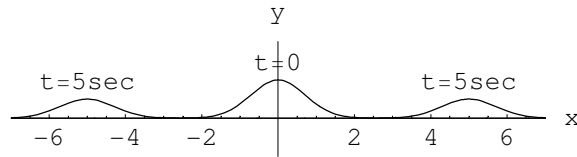
Το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(x, t) = A \exp[-(x + ct)^2 / a^2]$ κρατάει την ίδια τιμή, $A \exp(-b^2 / a^2)$, κατά μήκος της ευθείας $x + ct = b$ και άρα μπορεί να θεωρηθεί ότι παριστάνει μια μετατόπιση της χορδής που έχει το σχήμα του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = A \exp(-x^2 / a^2)$ και κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα c φαίνεται καθαρά και από το επόμενο σχήμα.



Σχ. 2.6

Εκείνο που πραγματικά συμβαίνει όταν αφήσουμε ελεύθερη την χορδή, της οποίας το αρχικό σχήμα δινόταν από το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = A \exp(-x^2 / a^2)$, είναι το εξής:

Το "βουναλάκι", με κορυφή ύψους A στο σημείο $x = 0$, σπάει σε δύο, ίδιου σχήματος με το αρχικό αλλά με το μισό ύψος, τα οποία κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

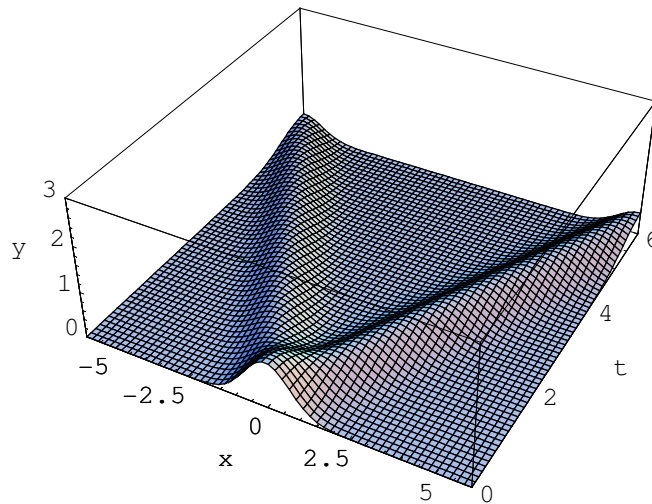


Σχ. 2.7

Η διάσπαση του αρχικού λόφου σε δυο μικρότερους που κινούνται προς τη θετική και αρνητική κατεύθυνση του άξονα x , αντίστοιχα, περιγράφεται από τη συνάρτηση

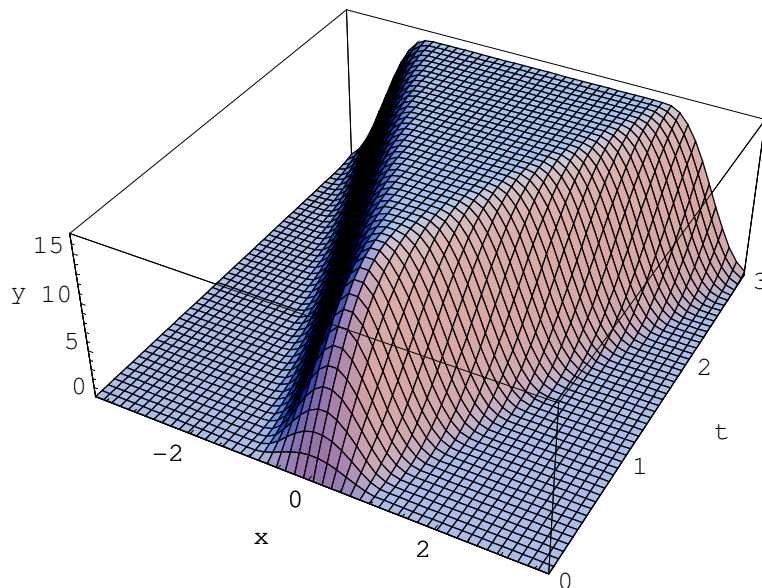
$$(2.2) \quad f(x, t) = \frac{1}{2} A \exp[-(x - ct)^2 / a^2] + \frac{1}{2} A \exp[-(x + ct)^2 / a^2]$$

Το γράφημα αυτής της συνάρτησης δίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχ. 2.8

Στην περίπτωση που, αντί να τραβήξουμε και μετά ν' αφήσουμε τη χορδή, τη χτυπάμε όπως τη χτυπάει με την πένα του ένας οργανοπαίκτης, δε σχηματίζονται δύο λόφοι που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Εκείνο που παρατηρούμε να συμβαίνει είναι ότι, διαδοχικά, όλα τα στοιχεία της χορδής μετατοπίζονται προς την κατεύθυνση που την χτυπήσαμε. Ωστόσο, μετά από χρόνο t έχουν μετακινηθεί μόνο τα στοιχεία που βρίσκονται σε απόσταση $s = ct$ από το σημείο στο οποίο η χορδή δέχτηκε το πλήγμα. Αυτή η συμπεριφορά αναδειχνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 2.9

Η διαφορά ανάμεσα στους παλμούς που σχηματίζονται ανάλογα με τις “αρχικές συνθήκες” της χορδής έχει να κάνει με την διαφορική εξίσωση η οποία καθορίζει τον τρόπο διάδοσης μιας διαταραχής κατά μήκος ενός μονοδιάστατου μέσου. Η μελέτη αυτής της εξίσωσης παρουσιάζεται στο επόμενο εδάφιο, όπου γίνεται σαφέστερη και η έννοια των αρχικών συνθηκών.

Στο μεταξύ, σημειώνουμε ότι υπάρχουν άπειρες άλλες συναρτήσεις των συνδυασμών $x - ct$ και $x + ct$ τις οποίες μπορούμε να ερμηνεύσουμε ως κύματα που διαδίδονται κατά μήκος του άξονα x , με ταχύτητα c και $-c$, αντίστοιχα. Δύο συναρτήσεις αυτού του είδους οι οποίες χρησιμοποιούνται πολύ συχνά είναι οι $A \sin[k(x \pm ct)]$ και $A \cos[k(x \pm ct)]$. Σ’ αυτές, το k είναι μια παράμετρος με διάσταση cm^{-1} .

Είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις $\sin \xi$ και $\cos \xi$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π . Αυτό σημαίνει ότι παίρνουν την ίδια τιμή σε οποιαδήποτε σημεία ξ_1 και ξ_2 τα οποία απέχουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του (άρρητου) αριθμού 2π . Με άλλα λόγια, αν $\xi_2 = \xi_1 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, τότε $\sin \xi_2 = \sin \xi_1$ και $\cos \xi_2 = \cos \xi_1$.

Η περιοδικότητα του ημιτόνου συνεπάγεται ότι

$$(2.3) \quad \sin[k(x - ct) + 2n\pi] = \sin[k(x - ct)], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Άρα η τιμή της συνάρτησης $\sin[k(x - ct)]$ δεν αλλάζει όταν η παράμετρος t μένει σταθερή αλλά η τιμή της μεταβλητής x αλλάζει κατά $2n\pi/k$. Ισοδύναμα, για κάθε συγκεκριμένη τιμή του t , η $\sin[k(x - ct)]$ είναι περιοδική συνάρτηση του x , με περίοδο

$$(2.4) \quad \lambda := 2\pi/|k|.$$

Η παράμετρος λ , η οποία αναγκαστικά έχει διάσταση μήκους, ονομάζεται **μήκος του κύματος**.

Με ανάλογο τρόπο διαπιστώνουμε και το εξής: Για σταθερό x , η τιμή της συνάρτησης $\sin[k(x - ct)]$ παραμένει ίδια, όταν η μεταβλητή t αλλάξει κατά T , όπου

$$(2.5) \quad T := 2\pi / c |k| = \lambda / c.$$

Η παράμετρος T , που έχει διάσταση χρόνου, ονομάζεται **περίοδος του κύματος**.

Στην περιγραφή των τριγωνομετρικών κυμάτων χρησιμοποιούνται συχνά και οι ποσότητες

$$(2.6) \quad f := T^{-1}, \quad \omega := 2\pi f$$

Η πρώτη ονομάζεται **συχνότητα** και η δεύτερη **γωνιακή συχνότητα** του κύματος.

Από τους παραπάνω ορισμούς αμέσως προκύπτει και η βασική σχέση

$$(2.7) \quad f \lambda = c$$

ανάμεσα στη συχνότητα, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης ενός τριγωνομετρικού κύματος. Με την αντικατάσταση της συχνότητας από τη γωνιακή συχνότητα και του μήκους κύματος από τον **κυματάρθρο**, k , αυτή η σχέση παίρνει τη μορφή

$$(2.8) \quad \omega = c |k|.$$

Συνοψίζοντας, τονίζουμε ότι οι συναρτήσεις

$$A \sin[k(x \pm ct)], \quad A \sin[2\pi(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T})], \quad A \sin(kx + \omega t)$$

αποτελούν ισοδύναμες αναπαραστάσεις ημιτονοειδών κυμάτων που διαδίδονται κατά μήκος του άξονα x . Αν γ.π. $k < 0$, τότε

$$\begin{aligned} A \sin(kx + \omega t) &= A \sin(-|k|x + \omega t) = -A \sin(|k|x - \omega t) \\ &= -A \sin[|k|(x - ct)] = A \sin[k(x - ct)] = A \sin[2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T})] \end{aligned}$$

Φαινόμενα συμβολής

Ας υποθέσουμε ότι ένας κυματικός παλμός κινείται με ταχύτητα c προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Αν το μέγιστο του παλμού βρίσκεται το σημείο $x = 0$ τη στιγμή $t = 0$, τότε θα φτάσει στο σημείο $x = L$ τη στιγμή $t = L/c$.

Θεωρούμε, τώρα, ένα δεύτερο παλμό, πανομοιότυπο με τον πρώτο, που επίσης κινείται με ταχύτητα c προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Υποθέτουμε, ωστόσο, ότι το μέγιστο του δεύτερου παλμού βρίσκεται στη θέση $x = x_1 \neq 0$ τη στιγμή $t = 0$. Άρα, τη στιγμή $t = L/c$ το μέγιστο του δεύτερου παλμού θα έχει φτάσει στο σημείο $x_2 = x_1 + c(L/c) = x_1 + L \neq L$. Ισοδύναμα, τη στιγμή $t = L/c$ θα έχει φτάσει στο σημείο $x = L$ όχι το μέγιστο του παλμού, αλλά η τιμή που είχε στο σημείο $x = 0$. Συνεπώς, τη στιγμή $t = L/c$ θα έχουμε στο σημείο $x = L$ την υπέρθεση του μέγιστου του πρώτου παλμού με την τιμή $u_2(0) = u_1(-x_1)$. Δηλαδή

$$(2.9) \quad u = u_1(0) + u_2(0) = u_1(0) + u_1(-x_1)$$

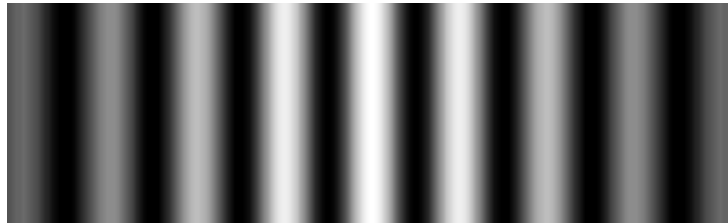
Αν γ.π. $u_1(x, t) = A \cos[k(x - ct)]$, τότε

$$(2.10) \quad \begin{aligned} u &= u_1(0) + u_1(-x_1) = A \cos(0) + A \cos(-k x_1) \\ &= A [1 + \cos(k x_1)] = 2 A \cos^2(k x_1 / 2) \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν $k x_1 / 2 = n\pi$, τότε θα έχουμε πλήρη **θετική συμβολή**, ενώ όταν $k x_1 / 2 = (2n + 1)(\pi/2)$ θα έχουμε **αναίρεση** του ενός παλμού από τον άλλο. Η δεύτερη συνθήκη ισοδυναμεί με

$$(2\pi/\lambda)x_1 = (2n + 1)\pi \Leftrightarrow x_1 = (2n + 1)(\lambda/2)$$

Το παράδειγμα που μόλις παρουσιάσαμε οδηγεί στο γενικότερο συμπέρασμα ότι, αν τα κύματα που παράγονται από δύο συντονισμένες πηγές φτάνουν στο ίδιο σημείο του χώρου αφού έχουν διανύσει μονοπάτια με διαφορά μήκους ΔL , τότε παρουσιάζουν διαφορά φάσης ίση προς $(2\pi/\lambda)\Delta L$. Αυτή η διαφορά φάσης είναι η αιτία αυτών που ονομάζουμε φαινόμενα συμβολής. Το πιο γνωστό παράδειγμα αποτελούν οι κροσσοί της οπτικής, όπου φωτεινές ζώνες εναλλάσσονται με σκοτεινές:



Σχ. 2.10

5.3 Η κυματική εξίσωση

Θεωρούμε μια συνάρτηση των μεταβλητών x, t της μορφής

$$(3.1) \quad u(x, t) = F(x - ct),$$

όπου $F(\xi)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση της μεταβλητής ξ . Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η $F(\xi)$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερης, τουλάχιστον, τάξης. Για κάθε συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής t , ας πούμε για $t = t_1$, η $u(x, t) = F(x - ct)$ είναι συνάρτηση μόνο του x , η $\varphi(x) = u(x, t_1) = F(x - ct_1)$. Η παράγωγος της $\varphi(x)$ υπάρχει και είναι ίση με $\varphi'(x) = F'(x - ct_1)$, όπου $F'(\xi)$ η πρώτη παράγωγος της $F(\xi)$. Η $\varphi'(x)$ ονομάζεται μερική παράγωγος της $u(x, t)$ ως προς τη μεταβλητή x και συμβολίζεται με $\partial_x u(x, t_1)$ ή με $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t_1)$. Θεωρώντας την τιμή t_1 τυχαία, καταλήγουμε στη σχέση

$$(3.2) \quad \partial_x u(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = F'(x - ct).$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η δεύτερης τάξης παράγωγος της $\varphi(x)$ υπάρχει και είναι ίση με $\varphi''(x) = F''(x - ct_1)$, όπου $F''(\xi)$ η δεύτερης παράγωγος της $F(\xi)$. Η $\varphi''(x)$ ονομάζεται μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της $u(x, t)$ ως προς τη μεταβλητή x και συμβολίζεται με $\partial_x^2 u(x, t_1)$ ή με $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t_1)$. Συνεπώς,

$$(3.3) \quad \partial_x^2 u(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = F''(x - ct).$$

Ανάλογα, για κάθε συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής x , ας πούμε για $x = x_1$, η $u(x, t) = F(x - ct)$ είναι συνάρτηση μόνο του t , η $\psi(t) = u(x_1, t) = F(x_1 - ct)$. Η παράγωγος της $\psi(t)$ υπάρχει και είναι ίση με $\psi'(t) = -cF'(x_1 - ct)$. Η $\psi'(t)$ ονομάζεται μερική παράγωγος της $u(x, t)$ ως προς τη μεταβλητή t και συμβολίζεται με $\partial_t u(x_1, t)$ ή με $\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t)$. Έτσι, για τυχαίο x , καταλήγουμε στην σχέση

$$(3.4) \quad \partial_t u(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = -cF'(x - ct).$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η δεύτερης τάξης παράγωγος της $\psi(t)$ υπάρχει και είναι ίση με $\psi''(t) = c^2 F''(x_1 - ct)$. Η $\psi''(t)$ λέγεται μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της $u(x, t)$ ως προς τη μεταβλητή t και συμβολίζεται με $\partial_t^2 u(x_1, t)$ ή με $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, t)$. Έτσι,

$$(3.5) \quad \partial_t^2 u(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 F''(x - ct).$$

Συνεπώς, κάθε συνάρτηση της μορφής $u(x, t) = F(x - ct)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$(3.6) \quad \boxed{c^2 \partial_x^2 u(x, t) = \partial_t^2 u(x, t) \Leftrightarrow c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)}$$

Αυτή είναι η περίφημη *κυματική εξίσωση* (σε μία χωρική διάσταση). Πρόκειται για διαφορική εξίσωση που αφορά συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών και άρα περιέχει μερικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης. Γι' αυτό ονομάζεται *μερική διαφορική εξίσωση*.

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, είναι πανεύκολο να ελεγχθεί η αλήθεια της ακόλουθης πρότασης.

Αν οι $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$ είναι τυχαίες ομαλές συναρτήσεις της μεταβλητής ξ , τότε η συνάρτηση

$$(3.7) \quad \boxed{u(x, t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct)}$$

αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης. Μπορεί επίσης να αποδειχτεί ότι αυτή είναι και η *γενική λύση της κυματικής εξίσωσης*, με την έννοια ότι, κάθε ομαλή λύση της είναι της παραπάνω μορφής.

Ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί μια λύση της κυματικής εξίσωσης, γ.π. η $u(x, t) = A \exp[-(x - ct)^2 / a^2]$, κι ότι αυτή παριστάνει την κίνηση των στοιχείων μιας χορδής. Τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την αρχική μορφή της χορδής, γιατί η τελευταία ορίζεται από τη σχέση $y = F(x)$, όπου $F(x) := u(x, 0)$. Άρα, στο παράδειγμά μας,

$$(3.8) \quad F(x) = A \exp(-x^2 / a^2).$$

Η στιγμιαία ταχύτητα του στοιχείου της χορδής που αντιστοιχεί στο σημείο $x = x_1$ του άξονα x είναι ίση με $\partial_t u(x_1, t)$. Άρα η αρχική ταχύτητα των στοιχείων της χορδής προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $G(x) := \partial_t u(x, 0)$. Στην ειδική περίπτωση όπου $u(x, t) = A \exp[-(x - ct)^2 / a^2]$, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$(3.9) \quad G(x) = 0.$$

Αντίστροφα, αν έχουμε προσδιορίσει εκ των προτέρων τη θέση και την ταχύτητα κάθε στοιχείου της χορδής τη στιγμή $t = 0$, αν δηλαδή έχουμε επιλέξει τις συναρτήσεις $F(x) := u(x, 0)$ και $G(x) := \partial_t u(x, 0)$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε την συνάρτηση $u(x, t)$ που περιγράφει την κίνηση της χορδής κάθε μετέπειτα στιγμή, δηλαδή για κάθε $t > 0$.

Πιο συγκεκριμένα, από τον τύπο (3. 7) για τη γενική λύση της κυματικής εξίσωσης έπεται ότι

$$(3. 10) \quad u(x, 0) = \Phi(x) + \Psi(x),$$

$$(3. 11) \quad \partial_t u(x, 0) = c \Phi'(x) - c \Psi'(x).$$

Συνεπώς, τα δεξιά μέλη των εξισώσεων (3. 10) και (3. 11) πρέπει να είναι ίσα προς $F(x)$ και $G(x)$, αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$(3. 12) \quad \Phi(x) + \Psi(x) = F(x),$$

$$(3. 13) \quad c \Phi'(x) - c \Psi'(x) = G(x).$$

Παραγωγίζοντας την (3. 12), παίρνουμε τη σχέση

$$(3. 14) \quad \Phi'(x) + \Psi'(x) = F'(x)$$

Από τον συνδυασμό των (3. 13) και (3.14) αμέσως έπεται ότι

$$(3. 15) \quad \Phi'(x) = \frac{1}{2} \{F'(x) + \frac{1}{c} G(x)\},$$

$$(3. 16) \quad \Psi'(x) = \frac{1}{2} \{F'(x) - \frac{1}{c} G(x)\}.$$

Συνακόλουθα,

$$(3. 17) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} \{F(x) + \frac{1}{c} \int_a^x G(s) ds\},$$

$$(3. 18) \quad \Psi(x) = \frac{1}{2} \{F(x) - \frac{1}{c} \int_a^x G(s) ds\},$$

και άρα

$$\begin{aligned} \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct) &= \frac{1}{2} \left\{ F(x + ct) + \frac{1}{c} \int_a^{x+ct} G(s) ds \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ F(x - ct) - \frac{1}{c} \int_a^{x-ct} G(s) ds \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ F(x + ct) + F(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds \right\}. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η λύση $u(x, t)$ της κυματικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$(3. 19) \quad u(x, 0) = F(x), \quad \partial_t u(x, 0) = G(x),$$

δίνεται από τον τύπο

$$(3. 20) \quad \boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ F(x + ct) + F(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds \right\}}$$

5. 4 Η κυματική εξίσωση στον \mathbb{R}^3

Ας υποθέσουμε ότι οι x , y , z είναι Καρτεσιανές συντεταγμένες του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου \mathbb{R}^3 και t η συντεταγμένη του χρόνου. Τότε με τον όρο *κυματική εξίσωση* θα εννοούμε τη μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ)

$$(4. 1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u = u(x, y, z, t).$$

Με τον άλλο συμβολισμό των μερικών παραγώγων η παραπάνω εξίσωση γράφεται σαν

$$(4. 2) \quad \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0.$$

Επίπεδα κύματα

Είναι πάρα πολύ εύκολο να βρούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης που εξαρτιώνται από μία μόνο χωρική συντεταγμένη. Αν γ.π. υποθέσουμε ότι η συνάρτηση u είναι ανεξάρτητη από τις χωρικές μεταβλητές y και z , αν δηλαδή

$$(4. 3) \quad \partial_y u = \partial_z u = 0$$

τότε η (4. 2) γίνεται

$$(4. 4) \quad \partial_x^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0.$$

Αλλά ήδη γνωρίζουμε ότι οι λύσεις της τελευταίας ΜΔΕ είναι της μορφής

$$(4. 5) \quad u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

όπου F , G τυχαίες συναρτήσεις.

Οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο (4. 1) που έχουν τη μορφή (4. 5) ονομάζονται *επίπεδα κύματα* που διαδίδονται στην κατεύθυνση του άξονα x . Και λέγονται επίπεδα, γιατί κάθε χρονική στιγμή η τιμή της συνάρτησης u είναι ίδια σε όλο το επίπεδο $x = \text{σταθ. του } \mathbb{R}^3$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$(4. 6) \quad u = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right] \equiv A \cos[k(x - ct)]$$

παριστάνει ένα τριγωνικό ή αρμονικό επίπεδο κύμα που διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα c .

Ανάλογα, η συνάρτηση

$$(4. 7) \quad u = A \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y + ct)\right] \equiv A \cos[k(y + ct)]$$

παριστάνει ένα τριγωνικό επίπεδο κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα y .

Γενικεύοντας, μιλάμε για *επίπεδα κύματα* που κινούνται με ταχύτητα (μέτρου) c στην κατεύθυνση \vec{k} του (τρισεδιάστατου Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3). Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε τα διανύσματα

$$(4.8) \quad \vec{k} = (k_x, k_y, k_z), \quad \vec{x} = (x, y, z),$$

Η συνθήκη

$$(4.9) \quad \vec{k} \cdot \vec{x} \equiv k_x x + k_y y + k_z z = a$$

ορίζει ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 που βρίσκεται σε απόσταση $|a|/|k|$ στην κατεύθυνση του διανύσματος \vec{k} , από την αρχή των αξόνων. Το διάνυσμα \vec{k} είναι κάθετο σ' αυτό το επίπεδο.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τη συνθήκη

$$(4.10) \quad \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = 0, \quad \omega > 0.$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, τη στιγμή $t = t_1$ η συνθήκη (4.10) ορίζει ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα \vec{k} που βρίσκεται σε απόσταση $\omega t_1/|k|$ από την αρχή των αξόνων. Ανάλογα, τη στιγμή $t = t_2 > t_1$ η συνθήκη (5.10) ορίζει ένα δεύτερο επίπεδο που είναι επίσης κάθετο στο διάνυσμα \vec{k} και βρίσκεται σε απόσταση $\omega t_2/|k|$ από την αρχή των αξόνων. Άρα τα δυο αυτά επίπεδα είναι παράλληλα και απέχουν μεταξύ τους κατά $\omega(t_2 - t_1)/|k|$.

Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$(4.11) \quad u(\vec{x}, t) \equiv A \exp \left[- \left(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t \right)^2 \right]$$

που παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = 0$, τότε μπορούμε να πούμε ότι, κατά το χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$, το μέγιστο της $u(\vec{x}, t)$ μετατοπίστηκε κατά $\omega(t_2 - t_1)/|k|$. Συνεπώς, η ταχύτητα με την οποία κινήθηκε το μέγιστο αυτής της συνάρτησης είναι

$$(4.12) \quad c := \omega/|k|$$

Από την άλλη μεριά, εύκολα διαπιστώνεται ότι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(4.13) \quad u(\vec{x}, t) \equiv F(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

είναι λύση της κυματικής εξίσωσης. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, οι συναρτήσεις αυτής της μορφής αποτελούν τη μαθηματική αναπαράσταση των επίπεδων κυμάτων στα οποία αναφερθήκαμε νωρίτερα.

Αν γ.π. $F(\xi) = A \exp(i\xi)$ τότε η (4.13) συγκεκριμενοποιείται στην

$$(4.14) \quad u(\vec{x}, t) = A \exp i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

οπότε μιλάμε για τριγωνομετρικά επίπεδα κύματα. Σ' αυτή την περίπτωση η ποσότητα $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ ονομάζεται *φάση του κύματος*. Τα επίπεδα που ορίζονται από τη συνθήκη $\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{σταθ.}$ ονομάζονται και *μέτωπα του κύματος*.

Σφαιρικά κύματα

Το ίδιο εύκολο είναι να κατασκευάσουμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης στον \mathbb{R}^3 οι οποίες χαρακτηρίζονται από σφαιρική συμμετρία. Ενοούμε λύσεις που, ως προς τις χωρικές μεταβλητές, εξαρτώνται μόνο από το συνδυασμό

$$(4.15) \quad r(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

των Καρτεσιανών συντεταγμένων x, y, z .

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$(4.16) \quad \partial_x r = \frac{x}{r}, \quad \partial_y r = \frac{y}{r}, \quad \partial_z r = \frac{z}{r}$$

και άρα

$$(4.17) \quad \partial_x^2 r = \frac{r^2 - x^2}{r^3}, \quad \partial_y^2 r = \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \quad \partial_z^2 r = \frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

Συνεπώς, όταν

$$(4.18) \quad f(x, y, z) = h(r(x, y, z)) \equiv (h \circ r)(x, y, z),$$

τότε

$$(4.19) \quad \partial_x f = \frac{x}{r} h'$$

$$(4.20) \quad \partial_x^2 f = \frac{r^2 - x^2}{r^3} h' + \frac{x^2}{r^2} h'',$$

$$(4.21) \quad \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = \frac{2}{r} h' + h''.$$

Άρα, αν υποθεθεί ότι η λύση της κυματικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$(4.22) \quad u(x, y, z, t) = h(r(x, y, z), t)$$

τότε η (4.1 ή 2) ανάγεται στην

$$(4.23) \quad c^2 [\partial_r^2 h + \frac{2}{r} \partial_r h] = \partial_t^2 h.$$

Τώρα αρκεί να θέσουμε

$$(4.24) \quad h(r, t) = g(r, t)/r,$$

για να μετατρέψουμε την τελευταία εξίσωση στην

$$(4.25) \quad c^2 \partial_r^2 g = \partial_t^2 g.$$

Αλλά αυτή δεν είναι άλλη από κυματική εξίσωση σε μια χωρική διάσταση. Η γενική της λύση μας είναι γνωστή και δίνεται από την έκφραση

$$(4.26) \quad g(r, t) = F(r - ct) + G(r + ct),$$

όπου F, G τυχαίες ομαλές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Άρα οι αντίστοιχες λύσεις της κυματικής εξίσωσης (4.1 ή 2) είναι της μορφής

$$(4.27) \quad u(x, y, z, t) = \frac{1}{r} [F(r - ct) + G(r + ct)], \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Οι λύσεις αυτής της μορφής ονομάζονται **σφαιρικά κύματα**. Ειδικότερα, οι λύσεις της μορφής

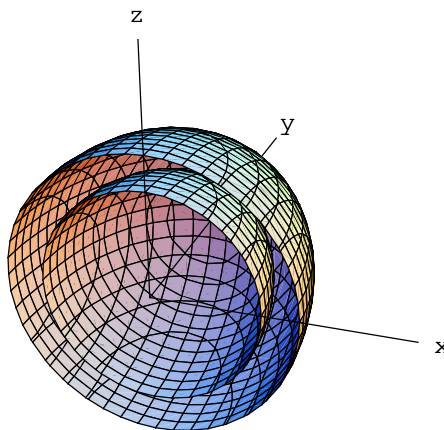
$$(4.28) \quad u(x, y, z, t) = \frac{1}{r} G(r + ct)$$

ονομάζονται **εισερχόμενα** κι εκείνα της μορφής

$$(4.29) \quad u(x, y, z, t) = \frac{1}{r} F(r - ct)$$

εξερχόμενα σφαιρικά κύματα.

Είναι φανερό ότι η συνθήκη $r - ct = 0$ ορίζει μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας ct με κέντρο την αρχή $(0, 0, 0)$ των αξόνων $x - y - z$. Κατά συνέπεια, μια κυματική διαταραχή που περιγράφεται από μια λύση της μορφής (4.29) και, τη στιγμή t_1 , εντοπίζεται στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας $r = ct_1$ θα εντοπίζεται στα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας $r = ct_2$ τη στιγμή $t_2 > t_1$. Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε το μισό δυο σφαιρικών επιφανειών που αντιστοιχούν στη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε.



Σχ. 5.1

5. 5 Κώννοι ήχου και φωτός

Είναι φανερό πως δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε σε μια επίπεδη επιφάνεια το γράφημα μιας συνάρτησης τριών ή και περισσότερων μεταβλητών, σαν αυτή που περιγράφει τα ηχητικά και άλλα κύματα στο επίπεδο και στον τρισδιάστατο χώρο. Γι αυτό οι γραφικές παραστάσεις τέτοιων συναρτήσεων είναι, σε τελική ανάλυση, καθαρά ποιοτικές. Η παρουσίαση που ακολουθεί κινείται στο πλαίσιο αυτής της παρατήρησης.

Ας υποθέσουμε γ.π. ότι θέλουμε να μελετήσουμε γραφικά το εξερχόμενο σφαιρικό κύμα που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$(5.1) \quad u(x, y, z, t) = \frac{1}{r} F(r - ct) = \frac{1}{r} A \sin [k(r - ct)]$$

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Για να καταλήξουμε σε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, μπορούμε να δουλέψουμε, εναλλακτικά, με έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

(i) Επιλέγουμε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ας πούμε την $t = 0$, και θεωρούμε τη συνάρτηση

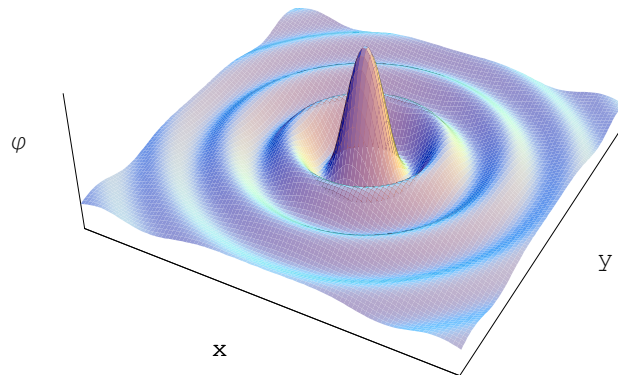
$$(5.2) \quad U(x, y, z) := u(x, y, z, 0)$$

$$= \frac{1}{r} F(r) = \frac{1}{r} A \sin (k r)$$

Προφανώς, η τιμή αυτής της συνάρτησης εξαρτιέται μόνο από την απόσταση r του σημείου (x, y, z) από την αρχή των Καρτεσιανών αξόνων $x - y - z$. Ισοδύναμα, η συνάρτηση τριών μεταβλητών $U(x, y, z)$ έχει την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας $r = a$. Η τελευταία τέμνει το επίπεδο $z = 0$ του \mathbb{R}^3 κατά μήκος του κύκλου $\sqrt{x^2 + y^2} = a$. Αν, λοιπόν, περιοριστούμε στο επίπεδο $z = 0$, τότε η συνάρτηση $U(x, y, z)$ ανάγεται στην

$$(5.3) \quad \varphi(x, y) := U(x, y, 0) = \frac{1}{\rho} A \sin (k \rho), \quad \rho := \sqrt{x^2 + y^2}$$

που, ως συνάρτηση δύο μόνο ανεξάρτητων μεταβλητών, επιτρέπει την κατασκευή γραφήματος. Το αντίστοιχο σχήμα μας δίνει σαφή εικόνα του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλεται η τιμή της $\varphi(x, y)$ καθώς μεταβάλλεται η απόσταση ρ του σημείου (x, y) του \mathbb{R}^2 από την αρχή των αξόνων x, y και, έμμεσα, του τρόπου με τον οποίο αλλάζει η τιμή της $U(x, y, z)$ καθώς μεγαλώνει η απόσταση r του σημείου (x, y, z) του \mathbb{R}^3 από την αρχή των Καρτεσιανών αξόνων $x - y - z$.

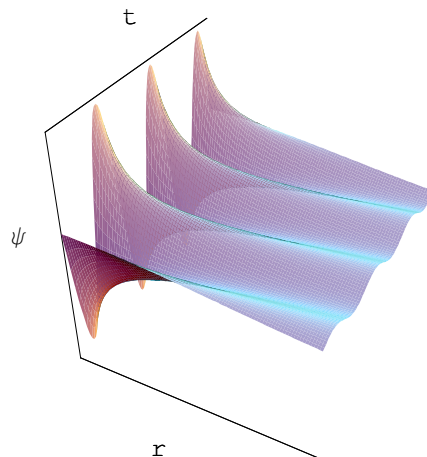


Σχ. 5.1

(ii) Θεωρούμε τις r, t ως ανεξάρτητες μεταβλητές και κατασκευάζουμε το γράφημα της συνάρτησης

$$(5.4) \quad \psi(r, t) := \frac{1}{r} A \sin [k(r - ct)], \quad r \geq 0, t \in \mathbb{R},$$

για κάποιο τμήμα του ημιεπίπεδου $r - t$ που αποτελεί το πεδίο ορισμού της. Αυτή η συνάρτηση μας δίνει σαφή εικόνα του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλεται τόσο χωρικά όσο και χρονικά η αρχική $u(x, y, z, t)$. Ωστόσο, θα πρέπει να μην ξεχνάμε ότι ένα σημείο (r, t) του αντίστοιχου σχήματος αντιπροσωπεύει όλα τα σημεία της σφαιρικής επιφάνειας $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ του \mathbb{R}^3 τη χρονική στιγμή t .



Σχ. 5.2

Μπορούμε επίσης να σταθούμε στα υποσύνολα του χωροχρονικού διαγράμματος τα οποία είναι χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς της συνάρτησης $u(x, y, z, t)$ που δίνεται από την (5.1). Για παράδειγμα, τα υποσύνολα του χώρου \mathbb{R}^4 των μεταβλητών x, y, z και t που ορίζονται από τη συνθήκη

$$(5.5) \quad r - ct = b = \text{σταθ.}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

είναι σημαντικά για την παραπάνω συνάρτηση. Και τούτο γιατί ο παράγοντας $F(r - ct) = A \sin[k(r - ct)]$ διατηρεί την ίδια τιμή, $F(b)$, σε όλα τους τα σημεία. Αλλά και πάλι είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε ένα σχήμα που να δίνει πιστή αναπαράσταση των υποσυνόλων $r - ct = b$ του \mathbb{R}^4 . Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να κατασκευάσουμε σχήματα που παριστάνουν υποσύνολα του \mathbb{R}^3 τα οποία ορίζονται από εξισώσεις της μορφής $f(x, y, z) = \text{σταθ.}$, δηλαδή επιφάνειες.

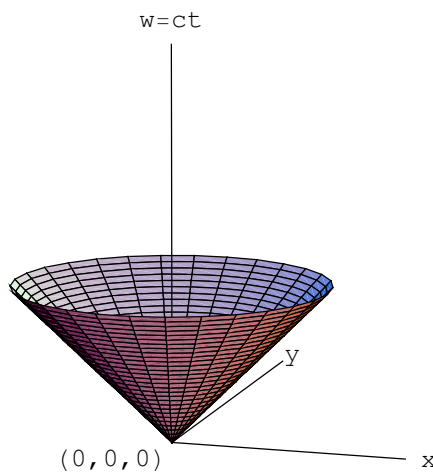
Η κατάλληλη “αναγωγή” επιτυγχάνεται και πάλι με το να θεωρήσουμε τους κύκλους $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ του επίπεδου $z = 0$ του \mathbb{R}^3 ως αντιπροσωπευτικούς των σφαιρών $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a$ του \mathbb{R}^3 . Έτσι, αντικαθιστούμε την (5.5) από την

$$(5.6) \quad \rho - ct = b = \text{σταθ.}, \quad \rho := \sqrt{x^2 + y^2},$$

δηλαδή παραλείπουμε τη συντεταγμένη z , οπότε καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής

$$(5.7) \quad f(x, y, t) \equiv \rho - ct = b = \text{σταθ.}$$

Αυτή η εξίσωση ορίζει μια οικογένεια κώνων που έχουν την κορυφή τους πάνω στον άξονα t και “άνοιγμα” ίσο με θ , όπου $\tan \theta = c$. Αν θέσουμε $ct = w$, τότε ως προς τον άξονα w οι παραπάνω κώνοι έχουν άνοιγμα 45° . Στο σχήμα δείχνουμε τον κώνο που αντιστοιχεί στην τιμή $b = 0$. Αυτός έχει την κορυφή του στην αρχή $(0, 0, 0)$ των αξόνων $x - y - w$.



Σχ. 5.3

Σημειώστε ότι ένα επίπεδο το οποίο περιέχει τον άξονα w τέμνει την επιφάνεια του κώνου $\rho - ct = 0$ κατά μήκος δύο ημιευθειών που ξεκινάνε από το σημείο $(0, 0, 0)$. Αυτού του είδους οι ημιευθείες ονομάζονται **γεννήτριες του κώνου** και μπορούν να εκφραστούν και με τον ακόλουθο τρόπο. Θέτουμε

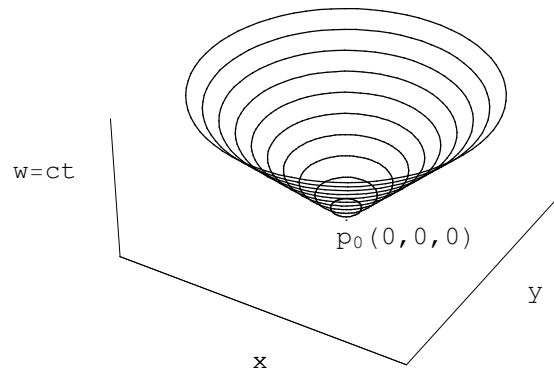
$$(5.8) \quad x = \lambda \cos \varphi, \quad y = \lambda \sin \varphi, \quad \lambda \geq 0,$$

οπότε η συνθήκη $\rho - ct = 0$ γίνεται

$$(5.9) \quad w \equiv ct = \lambda.$$

Προφανώς, η παράμετρος φ αντιπροσωπεύει τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x η προβολή της γεννήτριας στο επίπεδο $x y$.

Από την άλλη μεριά, ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $x - y$ τέμνει τον κώνο $\rho - ct = 0$ κατά μήκος ενός κύκλου. Αν λοιπόν θεωρήσουμε διαφορετικές τιμές της παραμέτρου $d > 0$, τότε οι τομές των επιπέδων $w \equiv ct = d$ με την επιφάνεια του κώνου θα μας δώσουν μια οικογένεια κύκλων που έχουν το κέντρο τους πάνω στον άξονα w , σαν αυτούς του σχήματος:



Σχ. 5.4

Αν θέσουμε $b = ct_0$ στην (5. 5), τότε αυτή θα γίνει

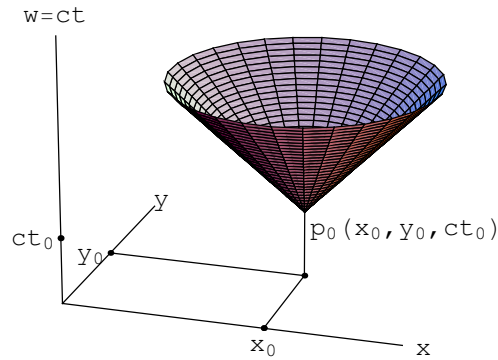
$$(5.10) \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c(t - t_0).$$

Παρόλο που η τελευταία εξίσωση ορίζει ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^4 , αυτό το υποσύνολο ονομάζεται επίσης κώνος, λόγω της αναλογίας με την (5. 7). Ακριβέστερα, ονομάζεται **μελλοντικός κώνος με κορυφή το χωροχρονικό σημείο** $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, t_0)$. Η κορυφή αυτού του κώνου μπορεί να μετατεθεί εύκολα από την αρχή των αξόνων $x - y - z$ στο χωρικό σημείο (x_0, y_0, z_0) . Αρκεί να αντικαταστήσουμε την (5. 10) από την

$$(5.11) \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = c(t - t_0).$$

Βέβαια, όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε μια γραφική παράσταση του κώνου που ορίζει η (5. 11), θα πρέπει να παραλείψουμε μια χωρική διάσταση. Αν γ.π. παραλείψουμε τη συντεταγμένη z , τότε οδηγούμαστε στην εικόνα του επόμενου σχήματος, το οποίο, στην πραγματικότητα, παριστάνει τον κώνο

$$(5.12) \quad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = c(t - t_0).$$



Σχ. 5.5

Η έννοια της σημειακής πηγής κυμάτων

Οι κώνοι που περιγράψαμε πιο πάνω επιδέχονται την ακόλουθη φυσική ερμηνεία. Συνήθως, το φυσικό αντικείμενο που παράγει ηχητικά, ηλεκτρομαγνητικά και άλλου είδους κύματα είναι πάρα πολύ μικρό σε σύγκριση με τον χώρο στον οποίο διαδίδονται τα κύματα. Ο όγκος του στόματός μας γ.π. είναι πολύ μικρότερος από τον όγκο του δωματίου στο οποίο τυχόν βρισκόμαστε και μιλάμε. Το ίδιο ισχύει και για το ηχείο ενός μικρού ραδιοφώνου από το οποίο ακούμε μουσική ή για ένα βιολί σε μια αίθουσα συναυλιών.

Ανάλογα, η κεραία ενός ραδιοφωνικού ή τηλεοπτικού σταθμού έχει αμελητέες διαστάσεις σε σύγκριση με τον περιβάλλοντα χώρο στον οποίο διαδίδονται τα ηλεκτρο-μαγνητικά κύματα που η κεραία παράγει. Από πρακτική άποψη αυτός ο χώρος είναι άπειρος και το ίδιο ισχύει για το φως που εκπέμπει ένα αστέρι.

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να θεωρούμε συχνά την **πηγή των κυμάτων**, δηλαδή το αντικείμενο που τα παράγει, ως ένα υλικό σημείο. Τότε μιλάμε για μια **σημειακή πηγή**. Το παράδειγμα των αστεριών που αναφέραμε παραπάνω αποτελεί την καθαρότερη εικόνα της σημειακής πηγής. Γιατί, αν εξαιρέσουμε τον ήλιο, όλα τα άλλα αστέρια τα βλέπουμε τη νύχτα σαν φωτεινά στίγματα του ουρανού.

Τα κύματα που εκπέμπει μια σημειακή πηγή είναι υποχρεωτικά σφαιρικά. Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι μια σημειακή πηγή βρίσκεται στην αρχή των Καρτεσιανών αξόνων $x - y - z$ και ενεργοποιείται (ανάβει) τη χρονική στιγμή $t = 0$ και παύει (σβήνει) μετά από T sec, τότε θα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα. Το κύμα που παράγεται από την πηγή αρχίζει να διαδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις και, μέσα σε χρόνο $t_1 > 0$ φτάνει σε απόσταση $r = c t_1$ από την αρχή των αξόνων.

Αν θεωρήσουμε όλες τις ενδιάμεσες χρονικές στιγμές στο διάστημα $0 \leq t \leq t_1$ τότε η σχέση $r = c t$ που μας λέει που είχε φτάσει το “μέτωπο” του κύματος τη στιγμή t , είναι ακριβώς εκείνη που ορίζει τον μελλοντικό κώνο με κορυφή το χωροχρονικό σημείο $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$.

Το τελευταίο μέρος του κύματος που εκπέμπει η πηγή παράγεται τη στιγμή $t = T$. Άρα, αν $t_1 > T$, τότε τη στιγμή $t = t_1$ η “ουρά” του κύματος θα έχει φτάσει σε απόσταση $r = c(t_1 - T)$ από την αρχή των αξόνων. Συνεπώς, η σχέση $r = c(t - T)$, $T \leq t \leq t_1$, μας λέει σε ποια απόσταση γίνεται αισθητή η παύση της πηγής τη στιγμή t . Όμως, η $r = c(t - T)$ είναι η σχέση που ορίζει τον μελλοντικό κώνο με κορυφή το χωροχρονικό σημείο $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, T)$.

Αυτές οι παρατηρήσεις μας δίνουν σαφή εικόνα της φυσικής σημασίας των χωροχρονικών κώνων και της μεταξύ τους περιοχής. Η τελευταία είναι η χωροχρονική ζώνη όπου υπάρχει το κύμα. Αν υποθέσουμε ότι το T τείνει στο μηδέν, τότε αυτή η ζώνη γίνεται όλο και πιο λεπτή έως ότου ταυτιστεί με τον αρχικό κώνο $r = c t$. Μ’ αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε μια άλλη φυσική ερμηνεία του κώνου με κορυφή το χωροχρονικό σημείο $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ και γενικότερα του $(x, y, z, t) = (x_0, y_0, z_0, t_0)$: Παριστάνει το σφαιρικό κύμα το οποίο εκπέμπει μια σημειακή πηγή που είναι ενεργή για ένα απειροελάχιστο διάστημα γύρω από τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

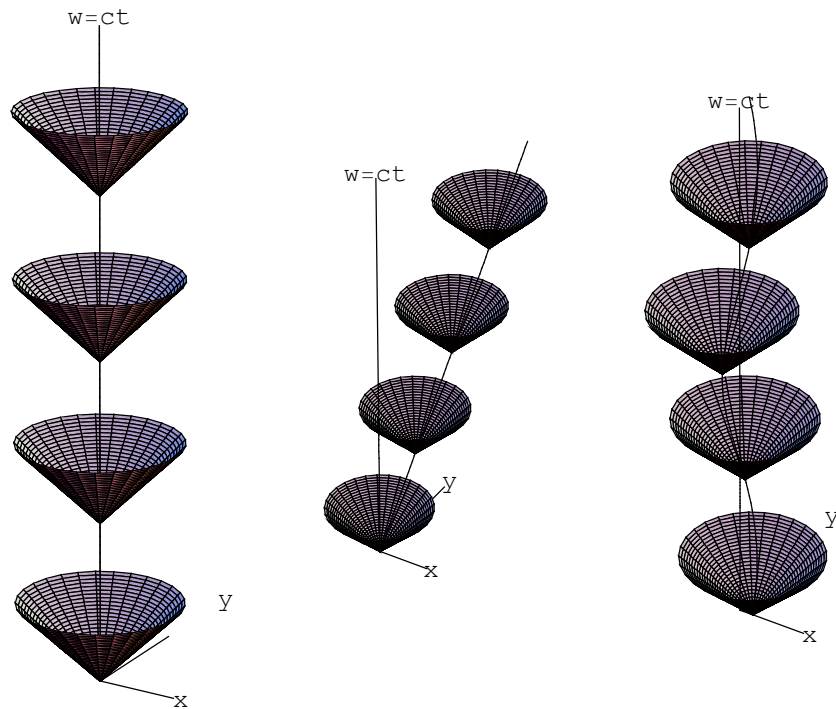
Ανάλογα, τώρα, με το είδος των κυμάτων που εκπέμπει η σημειακή πηγή, ο κώνος με κορυφή το τυχαίο σημείο (x_0, y_0, z_0, t_0) ονομάζεται *κώνος φωτός*, *κώνος ήχου* κ.λπ.

Παράδειγμα

Θεωρούμε μια πυγολαμπίδα (κωλοφωτιά) που στέκεται στην αρχή των Καρτεσιανών αξόνων $x - y - z$ ενός συστήματος αναφοράς Σ . Υποθέτουμε ότι η το σύστημα παραγωγής φωτός που διαθέτει η κωλοφωτιά ενεργοποιείται κάθε T sec και σβήνει αμέσως. Αν θεωρήσουμε την πυγολαμπίδα ως σημειακή πηγή, τότε το γρήγορο αναβόσβημά της μας επιτρέπει να παραστήσουμε τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που εκπέμπει σαν κώνους φωτός με κορυφή τα χωροχρονικά σημεία $\{(0, 0, 0, t_0 + nT)\}$, όπου $n=0, 1, 2, \dots$. Για τους λόγους που αναφέραμε πιο πάνω, η γραφική παράσταση της εκπομπής φωτεινών σημάτων από την ακίνητη πυγολαμπίδα είναι αδύνατη αν δεν παραλείψουμε μία χωρική διάσταση. Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στο πρώτο της επόμενης σειράς σχημάτων.

Το δεύτερο σχήμα της σειράς προκύπτει όταν η πυγολαμπίδα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Στο τρίτο η πυγολαμπίδα διαγράφει κύκλους γύρω από την αρχή των χωρικών αξόνων.

Σημειώστε ότι, στην πραγματικότητα οι μελλοντικοί κώνοι φωτός εκτείνονται ως το άπειρο. Κατά συνέπεια, σ’ ένα πιο ρεαλιστικό σχήμα ο ένας κώνος θα έκρυβε τον άλλο. Γι’ αυτό περιοριζόμαστε στο να δείχνουμε μόνο ένα τμήμα καθενός κώνου φωτός -εκείνο που περιέχει την κορυφή του (\equiv το γεγονός εκπομπής).



Σχ. 5.6

5. 6 Φωνόνια, φωτόνια και άλλες ασώματες ... κεφαλές

Πολλά φυσικά φαινόμενα που εξηγούνται με την έννοια της κυματικής διάδοσης, όπως είναι ο ήχος και το φως, περιγράφονται ικανοποιητικά και με την έννοια της κίνησης άμαζων σωματίων. Από αυτή τη σκοπιά, η παραγωγή ηχητικών κυμάτων από κάποιο αντικείμενο ισοδυναμεί με την εκτόξευση σωματίων μηδενικής μάζας που κινούνται με την ταχύτητα του ήχου. Αυτά τα σωματίνα αναφέρονται σαν **φωνόνια** (phonons) (από τη λέξη φωνή). Ανάλογα, τα σωματίνα που αντιστοιχούν σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα ονομάζονται **φωτόνια** (photons) (από τη λέξη φως) και άρα μπορούμε να μιλάμε γενικά για τα **κυματόνια** (kycmatons), εννοώντας τα άμαζα σωματίνα που συνδέουμε με κάποια φυσική διαδικασία στην οποία ορμή κι ενέργεια μεταδίδονται από μια περιοχή σε άλλη με τη μορφή κυμάτων.

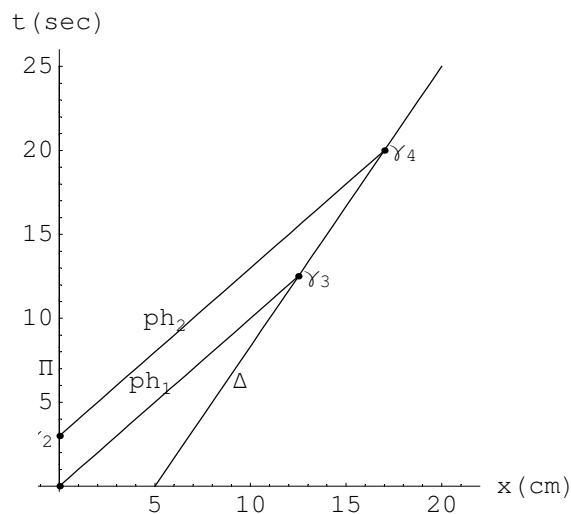
Το πρώτο ερώτημα που ανακύπτει όταν υιοθετηθεί η σωματιακή εικόνα για φαινόμενα σαν τον ήχο και το φως είναι το πώς εκφράζονται τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που ονομάσαμε περίοδο και συχνότητα. Η λύση αυτού του ζητήματος δεν είναι δύσκολη. Αν γ.π. έχουμε να κάνουμε με μια σημειακή πηγή φωτός που εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά κύματα συχνότητας f , τότε θεωρούμε ότι η δοσμένη πηγή εκτοξεύει ένα φωτόνιο κάθε T sec, όπου $T = 1/f$. Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τη συχνότητα της συγκεκριμένης ακτινοβολίας που καταγράφει κάποιος κινητός ή ακίνητος δέκτης που βρίσκεται μακριά από την πηγή. Η ακριβής διαδικασία περιγράφεται στο ακόλουθο παράδειγμα, στο οποίο δίνεται μια “σωματιακή” εξήγηση του φαινομένου Doppler.

Παράδειγμα

Μια σημειακή πηγή φωτός, Π , ακινητεί στην αρχή των Καρτεσιανών αξόνων $x y z$ ενός συστήματος αναφοράς Σ . Αν η συχνότητα του φωτός που εκπέμπει η Π είναι f , ζητείται η συχνότητα του “βλέπει” ένας δέκτης, Δ , ο οποίος κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα V , τέτοια που $|V| < c$.

Σύμφωνα με την παραπάνω υπόδειξη για τη σωματιακή περιγραφή της εκπομπής και διάδοσης του φωτός, υποθέτουμε ότι η πηγή Π εκπέμπει ένα φωτόνιο προς την κατεύθυνση του δέκτη Δ τη στιγμή $t_1 = 0$ κι ένα δεύτερο τη στιγμή $t_2 = T = (1/f)$. Για ευκολία, θεωρούμε και τον δέκτη σαν ένα σωματίο (υλικό σημείο) και υποθέτουμε ότι βρίσκεται στην ίδια πλευρά του άξονα x καθ' όλο το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_4$, όπου t_4 η στιγμή που το δεύτερο φωτόνιο φτάνει στον δέκτη.

Αν υποθέσουμε ότι δέκτης παραμένει στη θετική πλευρά του άξονα x κατά την εκπομπή και λήψη των φωτονίων, τότε η κίνησή του περιγράφεται από την εξίσωση $x = a + Vt$, με τη δέσμευση ότι $x > 0$ για κάθε $t \in [0, t_4]$. Αντίστοιχα, η κίνηση του πρώτου φωτονίου περιγράφεται από την εξίσωση $x = ct$ και του δεύτερου από την $x = c(t - T)$, όπου $t \geq T$. (Θυμίζουμε ότι η σταθερή c παριστάνει έναν θετικό αριθμό.)



Σχ. 6.1

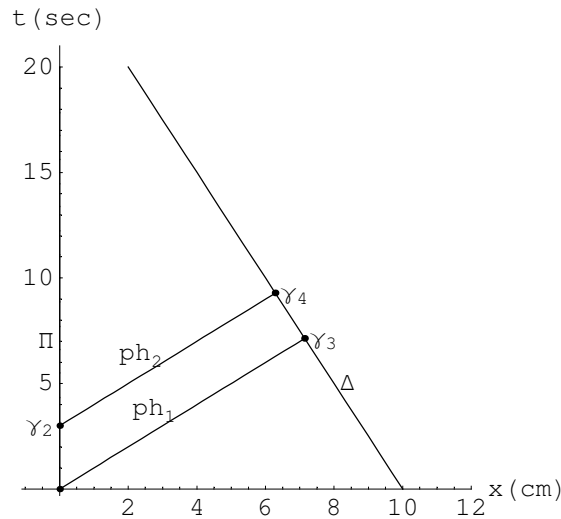
Έτσι, λοιπόν, το πρώτο φωτόνιο θα φτάσει στον δέκτη τη στιγμή t_3 κατά την οποία $ct_3 = a + Vt_3$ (Γεγονός γ_3 , του παρακάτω σχήματος). Συνεπώς, $t_3 = a/(c - V)$. Ανάλογα, το δεύτερο φωτόνιο φτάνει στον δέκτη (γεγονός γ_4) τη στιγμή t_4 που καθορίζεται από την ισότητα $c(t_4 - T) = a + Vt_4$. Από αυτήν έπεται ότι $t_4 = (a + cT)/(c - V)$. Άρα τα φωτόνια φτάνουν στον δέκτη Δ με διαφορά χρόνου T' , όπου

$$(6.1) \quad T' := t_4 - t_3 = \frac{a+cT}{c-V} - \frac{a}{c-V} = \frac{cT}{c-V} = \frac{1}{1-(V/c)} T.$$

Συνακόλουθα,

$$(6.2) \quad f' := \frac{1}{T'} = [1 - (V/c)] \frac{1}{T} = [1 - (V/c)] f.$$

Αντίθετα, αν ο δέκτης βρίσκεται στην αρνητική πλευρά του άξονα x , τότε η κίνησή του περιγράφεται από την ίδια εξίσωση $x = a + V t$, αλλά με τη δέσμευση ότι $x < 0$ για κάθε $t \in [0, t_4]$, ενώ η κίνηση των δύο φωτονίων περιγράφεται από τις εξισώσεις $x = -c t$ και $x = -c(t - T)$, αντίστοιχα.



Σχ. 6.1

Άρα, σ' αυτή την περίπτωση, το πρώτο φωτόνιο θα φτάσει στον δέκτη τη στιγμή t_3 κατά την οποία $-c t_3 = a + V t_3$. Συνεπώς, $t_3 = -a/(c + V)$. Ανάλογα, το δεύτερο φωτόνιο θα συναντήσει τον δέκτη τη στιγμή t_4 κατά την οποία $-c(t_4 - T) = a + V t_4$. Από αυτήν έπεται ότι $t_4 = (-a + cT)/(c + V)$ και άρα

$$(6.3) \quad T' := t_4 - t_3 = \frac{-a+cT}{c+V} + \frac{a}{c-V} = \frac{cT}{c+V} = \frac{1}{1+(V/c)} T.$$

Συνακόλουθα,

$$(6.4) \quad f' := \frac{1}{T'} = [1 + (V/c)] \frac{1}{T} = [1 + (V/c)] f.$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο δέκτης απομακρύνεται από την πηγή, αν, κατά το χρονικό διάστημα που λαμβάνει τα διαδοχικά φωτόνια, είτε βρίσκεται στη θετική πλευρά του άξονα x και $V > 0$, ή βρίσκεται στην αρνητική πλευρά του άξονα x και $V < 0$. Αντίστροφα, ο δέκτης κινείται προς την πηγή αν βρίσκεται στη θετική πλευρά του άξονα x και $V < 0$, ή βρίσκεται στην αρνητική πλευρά του άξονα x και $V > 0$. Από τις σχέσεις (6.2) και (6.4) έπεται ότι στην πρώτη περίπτωση η συχνότητα του φωτός f' που καταγράφει ο δέκτης είναι μικρότερη από τη συχνότητα εκπομπής, f . Αντίθετα, όταν πλησιάζει προς την πηγή $f' > f$. Αυτό είναι το λεγόμενο **φαινόμενο Doppler**.

Το δεύτερο ζήτημα που προκύπτει με την εικόνα των άμαζων ή ασώματων σωματίων που ονομάσαμε κυματόνια είναι αυτό της αναπαράστασης της ορμής και της ενέργειάς τους. Είναι φανερό ότι αυτές οι φυσικές ποσότητες δεν μπορούν να κατασκευαστούν παρά μόνο με τη χρήση

των δυο βασικών χαρακτηριστικών των αντίστοιχων κυμάτων που είναι η ταχύτητα διάδοσης, c , και η συχνότητά τους, f .

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι, στο πλαίσιο της Νευτωνικής μηχανικής, η ορμή mv ενός έμμαζου σωματίου έχει διάσταση (μάζα)·(ταχύτητα)=gr·cm/sec, ενώ η κινητική του ενέργεια $(1/2)mv^2$ έχει διάσταση (μάζα)·(ταχύτητα)²=gr·(cm/sec)² ≡ erg. Συνεπώς, είναι αδύνατο να κατασκευαστούν μεγέθη με αυτές τις διαστάσεις χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο τις ποσότητες c και f που έχουν διάσταση cm/sec και 1/sec, αντίστοιχα.

Ωστόσο, το 1900, η μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τη μεριά του Max Planck είχε φέρει στο προσκήνιο μια νέα φυσική σταθερή, την h , που είχε τη διάσταση της φυσικής ποσότητας που ονομάζουμε **δράση**, δηλαδή ergs·sec = gr·cm²/sec. Ο Einstein, την ίδια χρονιά που διατύπωσε τη θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας, δηλαδή το 1905, παρατήρησε ότι το γινόμενο $h(f/c)$ έχει τη διάσταση της ορμής και το γινόμενο hf τη διάσταση της ενέργειας. Υιοθέτησε, λοιπόν, αυτές τις εκφράσεις για την ορμή και ενέργεια των φωτονίων και μ' αυτό τον τρόπο έδωσε ικανοποιητική εξήγηση στο λεγόμενο **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο**, το οποίο απαχολούσε την κοινότητα των φυσικών εκείνη την περίοδο. Η ιδέα του Einstein έχει πλέον καθιερωθεί και θα την υιοθετήσουμε κι εμείς ως την ορθή λύση του ζητήματος που αναφέραμε νωρίτερα. (Το 1921 ο Einstein τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου - και όχι για τη θεωρία της Σχετικότητας, όπως θα νόμιζε κανείς).

Θυμίζουμε ότι η ποσότητα $\omega = 2\pi f$ ονομάζεται γωνιακή συχνότητα το κύματος. Έτσι το γινόμενο $h f$ γράφεται σαν $\hbar\omega$ όπου

$$(6.5) \quad \hbar := h/2\pi = 1,05457 \cdot 10^{-27} \text{ ergs} \cdot \text{sec} (= \text{gr cm}^2/\text{sec}).$$

Συνεπώς, ως **ενέργεια ενός φωτόνιου** που αντιστοιχεί σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα συχνότητας f ορίζουμε την ποσότητα

$$(6.6) \quad E := \hbar\omega = hf.$$

Αν το φωτόνιο κινείται στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, το οποίο επιλέγουμε να έχει μέτρο

$$(6.7) \quad |\vec{k}| = 2\pi f/c = \omega/c,$$

τότε ως **ορμή του φωτόνιου** ορίζουμε το διάνυσμα

$$(6.8) \quad \vec{p} := \hbar \vec{k}.$$

Σημειώστε ότι από τις (6.6-8) έπεται ότι

$$(6.9) \quad E = c|\vec{p}|.$$

5. 7 Κυματική εξίσωση και μετασχηματισμοί Γαλιλαίου

Όπως έχουμε διαπιστώσει, μια συνάρτηση των μεταβλητών x, t της μορφής $u(x, t) = F(x - ct)$, όπου $F(\xi)$ μια ομαλή συνάρτηση της μεταβλητής ξ και $c > 0$, παριστάνει ένα κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα c προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x σ' ένα μονοδιάστατο μέσο (χορδή).

Ανάλογα, μια συνάρτηση της μορφής $u(x, y, z, t) = F(x - ct)$ παριστάνει ένα επίπεδο κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα c προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x σ' ένα τρισδιάστατο μέσο (αέρα), σύμφωνα με ένα σύστημα αναφοράς Σ στο οποίο οι x, y, z είναι Καρτεσιανές συντεταγμένες του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύστημα αναφοράς Σ' κινείται με ταχύτητα V ως προς το Σ , παράλληλα προς τον άξονα x . Αν η σχέση των χωροχρονικών προσδιορισμών που δίνουν τα συστήματα αναφοράς (Σ) Σ και Σ' εκφράζεται από τον (ειδικό) μετασχηματισμό του Γαλιλαίου, τότε θα έχουμε

$$(7.1) \quad \boxed{x' = x - V t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t}$$

και, αντίστροφα,

$$(7.2) \quad \boxed{x = x' + V t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'}$$

Η αντικατάσταση των τελευταίων σχέσεων στην $u(x, y, z, t) = F(x - ct)$ δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

$$(7.3) \quad \varphi(x', y', z', t') := u(x' + V t', y', z', t') = F(x' + V t' - ct')$$

Ισοδύναμα, στο Σ Σ' το δοσμένο επίπεδο κύμα θα περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$(7.4) \quad \varphi(x', y', z', t') = F[x' - (c - V) t']$$

Αυτό σημαίνει ότι στο Σ' το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα

$$(7.5) \quad c' = c - V.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι θα είχαμε καταλήξει στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, αν είχαμε θεωρήσει το επίπεδο κύμα σαν μια δέσμη φωτονίων που κινούνται παράλληλα προς των άξονα x .

Αν, τώρα, το κύμα είναι τριγωνομετρικό, τότε το Σ' θα το βλέπει να έχει το ίδιο μήκος κύματος αλλά διαφορετική συχνότητα. Αν γ.π.

$$(7.6) \quad F(x - ct) = A \sin[k(x - ct)], \quad k > 0,$$

τότε

$$(7.7) \quad \varphi(x', y', z', t') = A \sin[k(x' - (c - V) t')]$$

$$(7.8) \quad \varphi(x', y', z', t') = A \sin[k(x' - c' t')], \quad c' := c - V$$

και άρα

$$(7.9) \quad \lambda' := 2\pi/|k| = \lambda.$$

Συνακόλουθα,

$$(7.10) \quad T' := \frac{2\pi}{c'|k|} = \frac{\lambda}{c'} = \frac{\lambda}{c-V} = \frac{T}{(1-\frac{V}{c})},$$

και

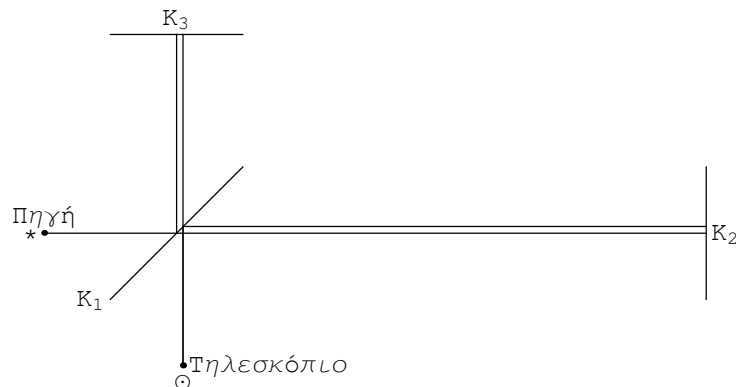
$$(7.11) \quad f' := \frac{1}{T'} = \frac{c-V}{\lambda} = (1 - \frac{V}{c}) f.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο μ' εκείνο που βρήκαμε από τη “σωματιακή” ανάλυση του φαινομένου Doppler (βλ. εξ. (6.2)).

5.8 Το πείραμα Michelson-Morley

Το 1881 ο αμερικανός φυσικός Michelson εκτέλεσε ένα σημαντικό πείραμα, που επανέλαβε το 1887 συνεργαζόμενος με τον Morley, με σκοπό να μετρήσει την ταχύτητα της γης ως προς τον αιθέρα. Θυμίζουμε πως αιθέρα ονόμαζαν οι φυσικοί του 19^{ου} αιώνα το διάφανο ρευστό που υπέθεταν ότι περιβάλλει όλα τα υλικά σώματα και αποτελεί το μέσο διάδοσης των διαταραχών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, συνεπώς και του φωτός. Ο υπολογισμός της ταχύτητας της γης θα στηριζόταν στον τύπο (7.5) και στα φαινόμενα συμβολής που περιγράψαμε παραπάνω.

Το όργανο μεγάλης ακρίβειας που επινόησε για τους σκοπούς του πειράματός του ο Michelson ονομάστηκε **συμβολόμετρο Michelson** και τα βασικά στοιχεία της δομής του φαίνονται στο επόμενο σχήμα. Πιο συγκεκριμένα, πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια (τραπέζι) τοποθετείται μια πηγή μονοχρωματικού φωτός και τρεις καθρέφτες, K_1 , K_2 και K_3 , στη διάταξη του σχήματος. Οι επιφάνειες των καθρεφτών είναι κατακόρυφες (κάθετες στο επίπεδο του τραπεζιού) και ο K_1 είναι ημιδιαφανής -αντανακλά ένα μέρος του φωτός που πέφτει επάνω του και αφήνει το υπόλοιπο να τον διαπεράσει.



Σχ. 8.1

Στη σύγχρονη έκδοση του πειράματος Michelson - Morley ως πηγή μονοχρωματικού φωτός χρησιμοποιείται μια συσκευή Laser (λείζερ). Αυτή η συσκευή τοποθετείται στο τραπέζι με τρόπο ώστε η ακτίνα φωτός (δέσμη φωτονίων) που εκπέμπει να είναι κάθετη στην επιφάνεια του

καθρέφτη K_2 και να σχηματίζει γωνία 45° με την επιφάνεια του ημιδιαφανούς καθρέφτη K_1 που παρεμβάλλεται. Σαν αποτέλεσμα, το τμήμα της δέσμης που αντανακλάται από τον K_1 κατευθύνεται στον καθρέφτη K_3 .

Το φως που φτάνει στους καθρέφτες K_2 και K_3 υφίσταται αντανάκλαση και επιστρέφει στον K_1 . Εκεί, ένα μέρος αυτού που προέρχεται από τον K_2 αντανακλάται και φτάνει στο τηλεσκόπιο που κυττάει προς τον καθρέφτη K_3 . Ένα μέρος αυτού που προέρχεται από τον K_3 διαπερνάει τον K_1 και φτάνει επίσης στο τηλεσκόπιο. Αν οι επιφάνειες των καθρεφτών K_2 και K_3 δεν είναι ακριβώς κάθετες ή μια στην άλλη, τότε το φως που προέρχεται από τον K_2 μ' εκείνο που προέρχεται από τον K_3 είναι σαν να πηγάζουν από δύο σημεία που βρίσκονται το ένα πολύ κοντά στο άλλο. Σαν αποτέλεσμα, κυττάζοντας μέσα από το τηλεσκόπιο (ή πάνω σε κατάλληλη επιφάνεια, αν πρόκειται για ακτίνες laser) βλέπουμε κροσσούς συμβολής.

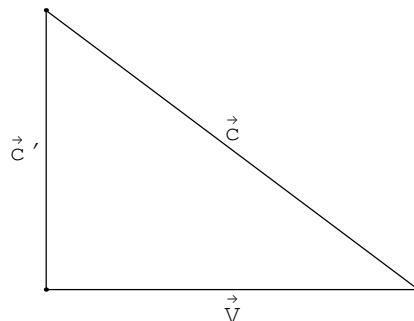
Ας υποθέσουμε τώρα ότι η απόσταση των καθρεφτών K_1 και K_2 είναι L_2 , ενώ εκείνη των K_1 και K_3 είναι L_3 . Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι το τραπέζι με τα όργανα που περιγράψαμε κινείται με ταχύτητα μέτρου V στην κατεύθυνση της ακτίνας που εκπέμπει η πηγή ως προς το σύστημα αναφοράς Σ στο οποίο ο αιθέρας ακινητεί. Θεωρούμε ότι η ταχύτητα του φωτός ως προς το Σ έχει μέτρο c . Συνεπώς, ως προς το σύστημα αναφοράς Σ' του τραπεζιού η ταχύτητα του φωτός θα είναι ίση με

$$(8.1) \quad \vec{c}' = \vec{c} - \vec{V}$$

Αναλυτικότερα, ένα φωτόνιο που κατευθύνεται από τον καθρέφτη K_1 προς τον K_2 κινείται με ταχύτητα $c' = c - V$. Κατά την επιστροφή του κινείται με ταχύτητα $c' = c + V$. Συνακόλουθα, αυτό το φωτόνιο καλύπτει τη συνολική διαδρομή του σε χρόνο

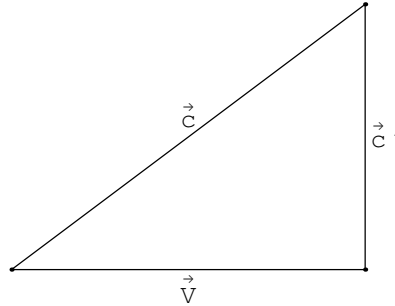
$$(8.2) \quad T_2 = \frac{L_2}{c-V} + \frac{L_2}{c+V} = \frac{2cL_2}{c^2-V^2}$$

Από την άλλη, ένα φωτόνιο που κατευθύνεται από τον καθρέφτη K_1 προς τον K_3 κινείται με ταχύτητα μέτρου $c' = \sqrt{c^2 - V^2}$. Κι αυτό γιατί τα διανύσματα \vec{c} , \vec{c}' και \vec{V} σχηματίζουν το ορθογώνιο τρίγωνο του επόμενου σχήματος.



Σχ. 8.2

Το ίδιο ισχύει και κατά την επιστροφή αυτού του φωτόνιου στον καθρέφτη K_1 , με μόνη διαφορά ότι το προηγούμενο σχήμα αντικαθίσταται από το αμέσως επόμενο.



Σχ. 8.3

Συνακόλουθα, αυτό το φωτόνιο καλύπτει τη συνολική διαδρομή του σε χρόνο

$$(8.3) \quad T_3 = \frac{L_3}{\sqrt{c^2 - V^2}} + \frac{L_3}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L_3}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

Άρα, η χρονική διαφορά ανάμεσα στις δυο παραπάνω διαδρομές είναι ίση με

$$(8.4) \quad T_2 - T_3 = \frac{2cL_2}{c^2 - V^2} - \frac{2L_3}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

Όταν ο λόγος V/c είναι πολύ μικρότερος από τη μονάδα, τότε

$$(8.5) \quad \frac{2cL_2}{c^2 - V^2} \simeq 2 \frac{L_2}{c} \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right), \quad \frac{2L_3}{\sqrt{c^2 - V^2}} \simeq 2 \frac{L_3}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right)$$

και άρα

$$(8.6) \quad T_2 - T_3 \simeq 2 \frac{L_2 - L_3}{c} + \frac{2L_2 - L_3}{c} \frac{V^2}{c^2}.$$

Ειδικότερα στην περίπτωση που

$$(8.7) \quad L_2 = L_3 = L,$$

η χρονική διαφορά των διαδρομών γίνεται

$$(8.8) \quad T_2 - T_3 \simeq \frac{L}{c} \frac{V^2}{c^2}.$$

Αυτή η χρονική διαφορά συνεπάγεται διαφορά φάσης ίση με

$$(8.9) \quad \varphi = 2\pi \frac{T_2 - T_3}{T} = 2\pi \frac{L}{cT} \frac{V^2}{c^2},$$

όπου T η περίοδος του φωτός που εκπέμπει η μονοχρωματική πηγή. Η συχνότητα του φωτός είναι τότε ίση με $f = 1/T$, ενώ, όπως γνωρίζουμε,

$$(8.10) \quad f\lambda = \frac{\lambda}{T} = c,$$

όπου λ το μήκος κύματος. Άρα η (8. 9) γράφεται σαν

$$(8. 11) \quad \varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda} \frac{V^2}{c^2}.$$

Η διαφορά φάσης καθορίζει τη διάταξη των κροσσών συμβολής. Η τελευταία αλλάζει, όταν η πειραματική συσκευή στραφεί κατά 90° γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Πιο συγκεκριμένα, η περιστροφή της συσκευής έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της διαφοράς φάσης κατά $\delta\varphi = 2\varphi$ και τη μετατόπιση της αρχικής σειράς των κροσσών κατά

$$(8. 12) \quad \delta N = \frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{2L}{\lambda} \frac{V^2}{c^2}$$

κροσσούς.

Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα V της συσκευής Michelson - Morley ως προς τον αιθέρα είναι της τάξης της ταχύτητας με την οποία η γη περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο, τότε $V \simeq 30 \text{ km/sec}$ και άρα $V/c \simeq 10^{-4}$. Με $L \simeq 11 \text{ m}$ και $\lambda \simeq 5,9 \times 10^{-7} \text{ m}$, όπως στο πείραμα που εκτέλεσαν οι Michelson - Morley, ο τύπος (8. 12) δίνει μετατόπιση $\delta N \simeq 0,4$. Αυτός ο αριθμός είναι πολύ μεγαλύτερος από την αβεβαιότητα των πειραματικών μετρήσεων. Συνεπώς, η προβλεπόμενη μετατόπιση των κροσσών συμβολής θα καταγραφόταν πολύ εύκολα. Παρ' όλ' αυτά, τόσο στα πειράματα των ίδιων των Michelson και Morley, όσο και στις μετέπειτα επαναλήψεις τους από άλλους ερευνητές, δεν παρατηρήθηκε καμία μετατόπιση. Το μόνο λογικό συμπέρασμα από αυτό το μηδενικό αποτέλεσμα ήταν ότι η γη δεν κινείται ως προς τον αιθέρα, παρά την τεράστια ταχύτητά της των 30 km/sec ως προς το ηλιακό σύστημα.

Με άλλα λόγια, το πείραμα Michelson - Morley φαινόταν να δείχνει ότι η γη συμπαρασύρει κατά την κίνησή της ένα μέρος του αιθέρα, με αποτέλεσμα η συσκευή του πειράματος να είναι τελικά ακίνητη ως προς τον αιθέρα. Έτσι, η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια και ίση με c προς κάθε κατεύθυνση μέσα στο εργαστήριο. Ωστόσο, αυτό το συμπέρασμα ερχόταν σε αντίθεση με άλλες παρατηρήσεις που έδειχναν ακριβώς το αντίθετο. Μια απ' αυτές έχει να κάνει με το φαινόμενο της αποπλάνησης των αστεριών: Το τηλεσκόπιο ενός αστεροσκοπείου, για να βλέπει ένα μακρινό αστέρι σ' όλη τη διάρκεια ενός έτους, πρέπει ν' αλλάζει συνεχώς προσανατολισμό, εξαιτίας της συνεχούς αλλαγής που υφίσταται το διάνυσμα της ταχύτητας της γης, \vec{V} , ως προς το ηλιακό σύστημα.

Συνακόλουθα, μια ικανοποιητική εξήγηση του αποτελέσματος που έδωσε το πείραμα Michelson - Morley θα έπρεπε να αναζητηθεί σε άλλη κατεύθυνση και όχι στην υπόθεση ότι η γη συμπαρασύρει τον αιθέρα. Η λύση του προβλήματος που μέχρι σήμερα θεωρείται ικανοποιητική δόθηκε το 1905, από τον τότε 26χρονο Albert Einstein και παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

6 Θεωρία σχετικότητας του Einstein

6.1 Μετασχηματισμοί Lorentz

Όπως είδαμε στα προηγούμενα εδάφια ο λεγόμενος ειδικός μετασχηματισμός Γαλιλαίου

$$(1.1) \quad G: (x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$$

ορίζεται από τους τύπους

$$(1.2) \quad \boxed{x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t}$$

Η φυσική σημασία αυτού του μετασχηματισμού είναι η ακόλουθη: Υποθέτουμε ότι το ΑΣΑ Σ' κινείται με σταθερή ταχύτητα V στην κατεύθυνση του άξονα x ως προς το ΑΣΑ Σ . Αν οι χωροχρονικές συντεταγμένες του γεγονότος γ ως προς το Σ είναι (x, y, z, t) , τότε οι συντεταγμένες του ίδιου γεγονότος γ ως προς το Σ' είναι οι αριθμοί (x', y', z', t') που δίνονται από τους τύπους (1.2).

Είδαμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου οδηγεί αμέσως στο συμπέρασμα ότι οι ταχύτητες u και u' ενός σωματίου σ ως προς τα ΑΣΑ Σ και Σ' , αντίστοιχα, συνδέονται με τις σχέσεις

$$(1.3) \quad \boxed{u'_{x'} = u_x - V, \quad u'_{y'} = u_y, \quad u'_{z'} = u_z}$$

Συνακόλουθα, είναι αδύνατο για ένα σωματίο να έχει την ίδια ταχύτητα και στα δύο ΑΣΑ Σ και Σ' . Το ίδιο μάλιστα ισχύει και για την ταχύτητα διάδοσης των κυματικών διαταραχών σε ρευστά μέσα, ειδικότερα για τη διάδοση του φωτός στον αιθέρα.

Ωστόσο, τα πειράματα που είχαν πραγματοποιηθεί μέχρι και την αρχή του 20^{ου} αιώνα έδιναν αποτελέσματα που δεν ταίριαζαν με όσα αναμενόταν από τις σχέσεις (1.3). Η εξήγηση που έδωσε ο Einstein το 1905 στηρίχθηκε στην ακόλουθη υπόθεση (φυσικό αξίωμα):

Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι ίδια σε όλα ανεξαιρέτως τα ΑΣΑ.

Παρατήρηση

Αν δεχτούμε αυτή την υπόθεση, τότε θα πρέπει να υιοθετήσουμε και μια διαφορετική εικόνα για την κατηγορία των συστημάτων αναφοράς που ονομάζουμε αδρανειακά. Κι αυτό γιατί μια κατηγορία νοητικών αντικειμένων, όπως είναι αυτή των ΑΣΑ, καθορίζεται από τη σχέση ανάμεσα σε δυο τυχαία μέλη της. Αν, λοιπόν, δεχτούμε ότι η σχέση δύο τυχαίων ΑΣΑ εκφράζεται από το μετασχηματισμό Γαλιλαίου, τότε είναι αδύνατο να ευσταθεί η υπόθεση Einstein.

Θα προσπαθήσουμε να δούμε αν υπάρχει η δυνατότητα μιας μικρής τροποποίησης του μετασχηματισμού Γαλιλαίου που να καλύπτει το αίτημα του Einstein. Για το σκοπό αυτό θα περιοριστούμε στο τμήμα $x-t$ αυτού του μετασχηματισμού, μια και από τους τύπους (1.2) είναι φανερό πως αυτό το κομμάτι συνδέεται ουσιαστικά με την κίνηση του ενός συστήματος ως προς το άλλο (που πάντα υποθέτουμε ότι γίνεται στην κατεύθυνση x).

Μια μικρή αλλαγή, λοιπόν, του μέρους $x-t$ του μετασχηματισμού Γαλιλαίου θα ήταν η ακόλουθη

$$(1.4) \quad x' = \beta(V)(x - Vt), \quad t' = \gamma(V)t$$

όπου β, γ κάποιες συναρτήσεις του V που μένει να προσδιοριστούν.

Ωστόσο, δεν αργεί κανείς να διαπιστώσει ότι, οι σχέσεις (1.4) έχουν την εξής συνέπεια: Ένα σώμα που κινείται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα u ως προς το ΑΣΑ Σ θα κινείται με ταχύτητα

$$(1.5) \quad u' = \frac{\beta(V)}{\gamma(V)}(u - V)$$

ως προς το ΑΣΑ Σ' .

Αυτή η σχέση θα πρέπει να ισχύει ειδικότερα για ένα σώμα που είναι ακίνητο στο Σ , δηλαδή για $u = 0$, και να δίνει ως αποτέλεσμα $u' = -V$. Κι αυτό γιατί, η πρόταση

“Το Σ' κινείται με ταχύτητα V ως προς το Σ ”

είναι, από φυσική άποψη, ταυτόσημη με την πρόταση

“Το Σ κινείται με ταχύτητα $-V$ ως προς το Σ' ”.

Όμως, για $u = 0$, η (1.5) γίνεται $u' = -(\beta/\gamma)V$. Άρα οι συναρτήσεις β και γ θα πρέπει να είναι ίδιες.

Τότε, όμως, οι σχέσεις (1.4) γίνονται

$$(1.6) \quad x' = \gamma(V)(x - Vt), \quad t' = \gamma(V)t$$

και η σχέση των ταχυτήτων (1.5) ανάγεται και πάλι στην

$$(1.7) \quad u' = u - V.$$

Το εγχείρημα απέτυχε! Συγκεκριμένα, η υπόθεση ότι οι χωροχρονικές συντεταγμένες (x, t) και (x', t') ενός γεγονότος ως προς τα ΑΣΑ Σ και Σ' , αντίστοιχα, συνδέονται με τις σχέσεις (1.4) οδηγεί στη Γαλιλαϊκή σχέση των ταχυτήτων. Αλλά η τελευταία δεν επιτρέπει να ισχύει η ισότητα $u' = u$, παρά μόνο στην περίπτωση όπου $V = 0$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση προς το αξίωμα του Einstein.

Μια κάπως ριζικότερη αλλαγή είναι αυτή που κάνει την δεύτερη από τις (1.6) όμοια με την πρώτη:

$$(1.8) \quad x' = \gamma(V)(x - Vt), \quad t' = \gamma(V)[t - \delta(V)x]$$

Με άλλα λόγια, τόσο η x' όσο και η t' προκύπτουν από έναν γραμμικό συνδυασμό των x και t .

Από αυτή την υπόθεση αμέσως συνάγεται το ακόλουθο συμπέρασμα: Αν, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ , οι χωρικές συντεταγμένες δύο γεγονότων διαφέρουν κατά Δx και οι χρονικές κατά Δt , τότε στο Σ' θα διαφέρουν κατά $\Delta x'$ και $\Delta t'$, αντίστοιχα, όπου

$$(1.9) \quad \Delta x' = \gamma(V) (\Delta x - V \Delta t) \quad \Delta t' = \gamma(V) [\Delta t - \delta(V) \Delta x]$$

Ένα σωματίο σ , που στο χρονικό διάστημα Δt κινείται με σταθερή ταχύτητα u κατά μήκος του άξονα x , καλύπτει το χωρικό διάστημα

$$(1.10) \quad \Delta x = u \Delta t.$$

Η αντικατάσταση της (1.10) στις (1.9) δίνει τις

$$(1.11) \quad \Delta x' = \gamma(V) (u - V) \Delta t \quad \Delta t' = \gamma(V) [1 - \delta(V) u] \Delta t.$$

Συνακόλουθα,

$$(1.12) \quad \Delta x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \Delta t' = \frac{u - V}{1 - \delta(V) u} \Delta t'.$$

Αυτή η σχέση γράφεται και στη μορφή

$$(1.13) \quad \Delta x' = u' \Delta t',$$

όπου

$$(1.14) \quad u' = \frac{u - V}{1 - \delta(V) u}$$

Με άλλα λόγια, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ' , το σωματίο σ κινήθηκε για ένα χρονικό διάστημα $\Delta t'$ και κάλυψε το χωρικό διάστημα $\Delta x' = u' \Delta t'$. Συνεπώς, η ποσότητα u' παριστάνει την ταχύτητα του σ ως προς το Σ' .

Παρατήρηση

Καταλήξαμε στην σχέση (1.14) έχοντας υποθέσει ότι η ταχύτητα του σ είναι σταθερή. Ωστόσο, ο ίδιος τύπος ισχύει ακόμα και όταν η ταχύτητα του σ ως προς το Σ δεν είναι σταθερή. Αρκεί να θεωρούμε ότι η u παριστάνει τη στιγμιαία ταχύτητα $u(t)$ του σ .

Ας εξετάσουμε, τώρα, τη δυνατότητα να ικανοποιείται πλέον το αίτημα του Einstein. Για τον σκοπό αυτό, θέτουμε $u = c$ στην εξίσωση (1.14) και επιβάλλουμε τη συνθήκη να είναι και η u' ίση με c . Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(1.15) \quad c = \frac{c - V}{1 - \delta(V) c}$$

που λύνεται εύκολα ως προς την $\delta(V)$ για να δώσει

$$(1.16) \quad \delta(V) = \frac{V}{c^2}$$

Αυτό σημαίνει ότι το αίτημα του Einstein μπορεί να ικανοποιηθεί. Αρκεί η συνάρτηση $\delta(V)$ στο μετασχηματισμό (1.8) να επιλεγεί ίση με V/c^2 . Με αυτή την επιλογή, η σχέση (1.14) που συνδέει τις ταχύτητες γίνεται

$$(1.17) \quad \boxed{u' = \frac{u-V}{1-\frac{uV}{c^2}}}$$

Αντίστοιχα, ο μετασχηματισμός (1.8) παίρνει τη μορφή

$$(1.18) \quad x' = \gamma(V)(x - Vt), \quad t' = \gamma(V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right).$$

Άρα μένει να προσδιοριστεί και η συνάρτηση $\gamma(V)$ για να ολοκληρωθεί και η σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες (x', t') και (x, t) . Για το σκοπό αυτό, στηρίζομαστε στο εξής επιχείρημα. Θεωρούμε ένα τρίτο ΑΣΑ, το Σ'' , το οποίο κινείται με ταχύτητα U ως προς το Σ' . Τότε, σύμφωνα με την (1.18), οι συντεταγμένες (x'', t'') καθορίζονται από τις (x', t') με βάση τους τύπους

$$(1.19) \quad x'' = \gamma(U)(x' - Ut'), \quad t'' = \gamma(U)\left(t' - \frac{U}{c^2}x'\right).$$

Ας εξετάσουμε ειδικότερα την περίπτωση όπου $U = -V$. Σ' αυτή την περίπτωση το ΑΣΑ Σ'' κινείται με ταχύτητα $-V$ ως προς το Σ' και άρα ταυτίζεται με το Σ . Συνεπώς, όταν $U = -V$, οι σχέσεις (1.19) γίνονται

$$(1.20) \quad x = \gamma(-V)(x' + Vt'), \quad t = \gamma(-V)\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right).$$

Με βάση τις (1.18), οι (1.20) γράφονται και ως εξής:

$$(1.21) \quad x = \gamma(-V)\gamma(V)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)x, \quad t = \gamma(-V)\gamma(V)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)t.$$

Συνεπώς,

$$(1.22) \quad \gamma(-V)\gamma(V) = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Επιπλέον, η συνάρτηση $\gamma(V)$ πρέπει να σέβεται τις ακόλουθες συνθήκες:

$$(1.23) \quad \gamma(0) = 1, \quad \gamma(-V) = \gamma(V).$$

Η πρώτη συνάγεται από την εξής παρατήρηση: Όταν $V = 0$, το ΑΣΑ Σ' ταυτίζεται με το Σ . Άρα, για $V = 0$, ο μετασχηματισμός (1.18) πρέπει να καταλήγει στον ταυτοτικό $x' = x$, $t' = t$. Αλλά, όταν $V = 0$, οι σχέσεις (1.18) γίνονται

$$(1.24) \quad x' = \gamma(0)x, \quad t' = \gamma(0)t.$$

Συνεπώς, $\gamma(0) = 1$.

Η δεύτερη από τις συνθήκες (1.23) δηλώνει ότι η συνάρτηση $\gamma(V)$ πρέπει να είναι άρτια. Για να αποδείξουμε την αναγκαιότητά της, ξεκινάμε από την εξής παρατήρηση. Η αντικατάσταση $(x, x', V) \rightarrow (-x, -x', -V)$ θα πρέπει να μην αλλάζει τις σχέσεις (1.18). Κι αυτό γιατί, το ποια κατεύθυνση των αξόνων x και x' ονομάζουμε θετική και ποια αρνητική είναι, από φυσική άποψη, αδιάφορο. Με άλλα λόγια, η επιλογή της θετικής και της αρνητικής κατεύθυνσης των αξόνων δεν

επιβάλλεται από κάποια εγγενή ιδιότητα του χώρου, παρά είναι καθαρά θέμα σύμβασης. Αν όμως, με βάση την αρχική μας επιλογή της θετικής φοράς αυτών των αξόνων, το ΑΣΑ Σ' κινείται με ταχύτητα, ας πούμε, 12 m/sec ως προς το Σ (οπότε το Σ κινείται με ταχύτητα -12 m/sec ως προς το Σ'), τότε, μετά την αντιστροφή της φοράς των αξόνων, το Σ' θα κινείται με ταχύτητα -12 m/sec ως προς το Σ (και το Σ με ταχύτητα 12 m/sec ως προς το Σ').

Η αντικατάσταση $(x, x', V) \rightarrow (-x, -x', -V)$ μετατρέπει τις σχέσεις (1.18) στις

$$(1.25) \quad -x' = \gamma(-V)(-x + Vt), \quad t' = \gamma(-V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

που γράφονται και σαν

$$(1.26) \quad x' = \gamma(-V)(x - Vt), \quad t' = \gamma(-V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right).$$

Προφανώς, οι τελευταίες θα είναι ταυτόσημες με τις (1.18) εάν και μόνο όταν τηρείται η συνθήκη $\gamma(-V) = \gamma(V)$.

Από τις συνθήκες (1.23) των οποίων την αναγκαιότητα μόλις αποδείξαμε έπεται ότι η σχέση (1.22) είναι ισοδύναμη με την

$$(1.27) \quad \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

και άρα οι σχέσεις (1.14) γίνονται τελικά

$$(1.28) \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}(x - Vt), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)$$

Παρατήρηση. Εδώ ουσιαστικά περιγράφουμε την ισοτροπία του χώρου. Το επιχείρημα διατυπώνεται και ως εξής. Αρχικά θεωρούμε για ευκολία ότι $V > 0$ και κάνουμε την αντικατάσταση $V \rightarrow -V$. Αυτό σημαίνει ότι το ΑΣΑ Σ' κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x . Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός δίνει

$$x' = \gamma(-V)(x + Vt), \quad t' = \gamma(-V)\left(t + \frac{V}{c^2}x\right).$$

Στη συνέχεια στρίβουμε στο σύστημα $x - y - z$ κατά 180° γύρω από τον άξονα z . Το αποτέλεσμα είναι ο μετασχηματισμός των αξόνων $x - y$ σε $\tilde{x} - \tilde{y}$, όπου

$$\tilde{x} = -x, \quad \tilde{y} = -y.$$

Το ίδιο γίνεται και με τους άξονες $x' - y'$. Συνακόλουθα, ο προηγούμενος μετασχηματισμός γίνεται

$$-\tilde{x}' = \gamma(-V)(-\tilde{x} + V\tilde{t}), \quad \tilde{t}' = \gamma(-V)\left(\tilde{t} - \frac{V}{c^2}\tilde{x}\right).$$

Ισοδύναμα,

$$\tilde{x}' = \gamma(-V)(\tilde{x} - V\tilde{t}), \quad \tilde{t}' = \gamma(-V)\left(\tilde{t} - \frac{V}{c^2}\tilde{x}\right).$$

Αλλά η φυσική σχέση των $\tilde{\Sigma}$ και $\tilde{\Sigma}'$ είναι ίδια με εκείνη των Σ και Σ' . Άρα, ο προηγούμενος μετασχηματισμός πρέπει να είναι ταυτόσημος με τον

$$\tilde{x}' = \gamma(V)(\tilde{x} - V\tilde{t}), \quad \tilde{t}' = \gamma(V)\left(\tilde{t} - \frac{V}{c^2}\tilde{x}\right).$$

Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται εάν και μόνο όταν

$$\gamma(-V) = \gamma(V)$$

■

Η φυσική σημασία και οι συνέπειες των σχέσεων (1.28) θα αναλυθούν διεξοδικά στο υπόλοιπο αυτών των σημειώσεων. Γι' αυτό, προσωρινά θα σταθούμε σε θέματα ορολογίας και συμβολισμού. Αρχικά θα σημειώσουμε ότι, όπως στον μετασχηματισμό Γαλιλαίου, οι σχέσεις (1.28) διευρύνονται για να καλύψουν και τις υπόλοιπες συντεταγμένες y και z , στην ακόλουθη μορφή:

$$(1.29) \quad \boxed{x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x - V t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (t - \frac{V}{c^2} x)}$$

Η απεικόνιση

$$(1.30) \quad L: (x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$$

που ορίζεται από τους τύπους (1.29) ονομάζεται **ειδικός μετασχηματισμός Lorentz** και αποτελεί τον πυρήνα της θεωρίας του Einstein που καθιερώθηκε με το όνομα **Ειδική Σχετικότητα**.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το επίθετο ειδικός-ή δεν έχει την ίδια σημασία στις δυο τελευταίες φράσεις. Ο μετασχηματισμός που ορίζεται από τις σχέσεις (1.26) λέγεται ειδικός για τους ίδιους ακριβώς λόγους που ονομάζεται ειδικός ο μετασχηματισμός Γαλιλαίου που ορίζεται από τις σχέσεις (1. 2). Πρώτα, γιατί οι αρχές των χωροχρονικών αξόνων $x y z t$ και $x' y' z' t'$ ταυτίζονται. Με άλλα λόγια, όταν $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ τότε $(x', y', z', t') = (0, 0, 0, 0)$ και αντίστροφα. Έπειτα, τη στιγμή $t = 0$, οι χωρικοί άξονες $x y z$ του ΑΣΑ Σ είναι παράλληλοι προς τους $x' y' z'$ του Σ' . Αργότερα θα έχουμε την ευκαιρία να μελετήσουμε τον γενικότερο μετασχηματισμό Lorentz. Ωστόσο, μπορούμε από τώρα να σημειώσουμε ότι, ο τελευταίος διαφέρει από τον ειδικό μόνο ως προς τη μορφή και όχι ως προς την ουσία της σχέσης των συστημάτων Σ και Σ' , την οποία περιγράφει.

Από την άλλη μεριά, η θεωρία που έχει ως θεμέλιο τις σχέσεις (1.29) ονομάζεται **Ειδική Σχετικότητα**, έτσι ώστε να διακρίνεται από την θεωρία που διατύπωσε ο Einstein το 1915. Αυτή απέβλεπε στο να εκφράσει τη σχέση δύο συστημάτων αναφοράς που το ένα κινείται ως προς το άλλο με μεταβαλλόμενη, γενικά, ταχύτητα. Τελικά, η προσπάθεια του Einstein να γενικεύσει τα αποτελέσματα της Ειδικής Σχετικότητας οδήγησε σε μια επαναστατική εικόνα για τη σχέση του πεδίου βαρύτητας με τη δομή του χωρόχρονου, η οποία καθιερώθηκε αργότερα με την επωνυμία **Γενική Σχετικότητα**.

6. 2 Πρώτες συνέπειες του μετασχηματισμού Lorentz

Οι μετασχηματισμοί του Lorentz διαφέρουν ριζικά από εκείνους του Γαλιλαίου, παρόλο που, από μαθηματική άποψη, ανήκουν στην ίδια κατηγορία: Είναι ομογενείς γραμμικοί.

Συγκεκριμένα, σε αντίθεση προς εκείνους του Γαλιλαίου, οι μετασχηματισμοί του Lorentz

- (i) Περιέχουν μια "παγκόσμια σταθερή" με διάσταση ταχύτητας, το c .
- (ii) Δεν έχουν νόημα για κάθε τιμή της παραμέτρου V , που εκφράζει την ταχύτητα του ΑΣΑ Σ' ως προς το ΑΣΑ Σ : Ο παράγοντας $(1 - \frac{V^2}{c^2})^{-1/2}$ επιβάλλει τον περιορισμό

$$(2.1) \quad -c < V < c \quad \Leftrightarrow \quad |V| < c.$$

Ο περιορισμός (2.1) οδηγεί αυτόματα και σε ένα πολύ σημαντικό φυσικό αποτέλεσμα:

Στον βαθμό που ο μετασχηματισμός Lorentz μας δίνει τη σωστή σχέση δυο ΑΣΑ,

με άλλα λόγια, αν η Ειδική Σχετικότητα είναι ορθή ως φυσική θεωρία, τότε

ένα σωματίο δεν μπορεί να αποκτήσει ταχύτητα ίση ή μεγαλύτερη από εκείνη του φωτός στο κενό!

Αυτό το συμπέρασμα συνάγεται αμέσως από την ακόλουθη παρατήρηση. Ας υποθέσουμε ότι το σωματίο σ κινείται με ταχύτητα u παράλληλα προς τον άξονα x , ως προς το ΑΣΑ Σ . Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ΑΣΑ Σ' που κινείται με ταχύτητα $V = u$ ως προς το Σ (οπότε το σ εμφανίζεται ακίνητο στο Σ'). Αφού, λοιπόν η ταχύτητα V του Σ' ως προς το Σ δεν επιτρέπεται να φτάσει (πολύ περισσότερο να ξεπεράσει) σε απόλυτη τιμή την ταχύτητα του φωτός c , το ίδιο ισχύει και για την ταχύτητα του σ .

Η δεύτερη αξιωματική συνέπεια του μετασχηματισμού Lorentz, είναι ότι

Ο χαρακτηρισμός δύο ή και περισσότερων γεγονότων ως ταυτόχρονων γίνεται πλέον σχετικός, δηλαδή εξαρτιέται από το ΑΣΑ που καταγράφει αυτά τα γεγονότα.

Για να το διαπιστώσουμε, ας θεωρήσουμε τα τυχαία γεγονότα γ_1 και γ_2 που, σύμφωνα με κάποιο ΑΣΑ Σ , συμβαίνουν ταυτόχρονα στα σημεία x_1 και $x_2 \neq x_1$ του άξονα x . Αυτό σημαίνει ότι $t(\gamma_1) = t(\gamma_2)$, ή, απλούστερα, $t_1 = t_2$. Ισοδύναμα,

$$(2.2) \quad \Delta t := t_2 - t_1 = 0.$$

Όμως, από τη γραμμικότητα των σχέσεων (1.29) αμέσως έπεται ότι γενικά

$$(2.3) \quad \boxed{\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (\Delta x - V \Delta t), \\ \Delta y' &= \Delta y, \\ \Delta z' &= \Delta z, \\ \Delta t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x) \end{aligned}}$$

όπου $\Delta x := x_2 - x_1$, $\Delta x' := x_2' - x_1'$ κ.λ.π. Άρα, στην περίπτωση που $\Delta t = 0$, θα έχουμε

$$(2.4) \quad \Delta t' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{V}{c^2} \Delta x.$$

Αφού $\Delta x \neq 0$, η (2.4) συνεπάγεται ότι και $\Delta t' \neq 0$, πράγμα που σημαίνει ότι τα γεγονότα γ_1 και γ_2 **δεν** είναι ταυτόχρονα από τη σκοπιά του ΑΣΑ Σ' .

Από πρακτική άποψη, ο μετασχηματισμός Lorentz σπάνια διαφέρει από εκείνον του Γαλιλαίου. Αυτή η παρατήρηση έχει την ακόλουθη έννοια. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι πάρα πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα με την οποία συνήθως κινούνται τα σώματα, άρα κι ένα τυχαίο ΑΣΑ ως προς κάποιο άλλο. Κι αυτό γιατί, η απόλυτη τιμή της ταχύτητας του φωτός στο κενό δίνεται, με πολύ μεγάλη ακρίβεια, από τον αριθμό

$$(2.5) \quad c = 300.000 \text{ km/sec} = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

Από την άλλη

(α) Ένα σύγχρονο τρένο κινείται με ταχύτητα που η απόλυτη τιμή της είναι της τάξης $|V| = 360 \text{ km/h} = 0,1 \text{ km/sec}$.

(β) Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι περίπου $v_s = 340 \text{ m/sec} = 0,34 \text{ km/sec}$ (σε απόλυτη τιμή).

(γ) Ένα σύγχρονο επιβατικό υπερηχητικό αεροπλάνο (σαν το Concorde) κινείται με ταχύτητα διπλάσια εκείνης του ήχου στον αέρα (2 Mach).

(δ) Η ταχύτητα του ήχου στα στερεά σώματα είναι της τάξης των 3 km/sec.

Άρα η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι περίπου 100.000 φορές μεγαλύτερη από τη μεγαλύτερη από τις τέσσερες ταχύτητες που αναφέραμε πιο πάνω! Γενικότερα, στις περισσότερες περιπτώσεις ο λόγος

$$(2.6) \quad \beta := \frac{V}{c}$$

είναι, σε απόλυτη τιμή, πάρα πολύ μικρότερος από τη μονάδα. Συνακόλουθα, ο συντελεστής

$$(2.7) \quad \gamma \equiv \gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

που εμφανίζεται στις εξισώσεις (1.29) και (2.3), δε διαφέρει παρά ελάχιστα από τη μονάδα. Για τον ίδιο λόγο, ο όρος $\frac{V}{c^2} \Delta x$ στην τέταρτη από τις εξισώσεις (2.3), για παράδειγμα, είναι συνήθως αμελητέος. Αν σταθούμε στην περίπτωση των σύγχρονων γεγονότων γ_1 και γ_2 που εξετάσαμε παραπάνω και υποθέσουμε ότι $\beta = 0,1$, τότε ο όρος $\frac{V}{c^2} \Delta x$ θα γίνει ίσος με 1sec αν η χωρική απόσταση των γ_1 και γ_2 είναι ίση $\Delta x = \frac{c}{\beta} \cdot 1 \text{ sec} = 3.000.000 \text{ km}$!

Η τελευταία παρατήρηση, ότι δηλαδή ο μετασχηματισμός Lorentz δεν διαφέρει ουσιαστικά από το μετασχηματισμό Γαλιλαίου όταν η ταχύτητα του ΑΣΑ Σ' ως προς το ΑΣΑ Σ είναι μικρή σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, δεν πρέπει να μας παρασύρει στο να συμπεράνουμε ότι ανάμεσα στις αντίστοιχες θεωρίες για τη δομή του χώρου και του χρόνου υπάρχει απλώς μια ποσοτική διαφορά. Γιατί συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο. Αν ονομάσουμε την πρώτη “θεωρία των

Galilei-Newton” και τη δεύτερη ”θεωρία των Einstein-Minkowski”, τότε αυτές οι δυο θεωρίες είναι θεμελιακά διαφορετικές.

Έχουμε ήδη επισημάνει ορισμένες από τις διαμετρικά αντίθετες συνέπειές τους, όπως το γεγονός ότι η θεωρία των Einstein-Minkowski προβλέπει ένα πάνω φράγμα στις ταχύτητες όλων ανεξαιρέτως των σωμάτων, ενώ η θεωρία των Galilei-Newton επιτρέπει στα σώματα να αποκτήσουν οσοδήποτε μεγάλες ταχύτητες. Εδώ περιοριζόμαστε στο να αναφέρουμε ότι μια άλλη έκφανση της θεμελιακής διαφοράς των δύο θεωριών είναι ότι, στο πλαίσιο της θεωρίας των Einstein-Minkowski, ο χώρος και ο χρόνος συναποτελούν έναν τετραδιάστατο γεωμετρικό χώρο στον οποίο αποκτά νόημα η χωρο-χρονική απόσταση δύο τυχαίων γεγονότων, πράγμα που δεν ισχύει στη θεωρία των Galilei-Newton. Η αναλυτική παρουσίαση της δομής του κατά Einstein-Minkowski χωρόχρονου θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο.

6.3 Χωροχρονικά διαγράμματα

Η ανάλυση των διαφορετικών εικόνων που μας δίνουν δύο διαφορετικά ΑΣΑ για τα ίδια γεγονότα ή την κίνηση ενός σώματος διευκολύνεται με την κατασκευή αντίστοιχων χωροχρονικών διαγραμμάτων. Σ' αυτό το εδάφιο θα περιοριστούμε στην κατασκευή τέτοιων διαγραμμάτων που αντιστοιχούν σε μία μόνο χωρική διάσταση - αυτή που συνδέεται με την κατεύθυνση της σχετικής κίνησης των δύο ΑΣΑ.

Για να γίνει αισθητή η διαφορά από τα αντίστοιχα διαγράμματα που κατασκευάσαμε σε σχέση με το μετασχηματισμό Γαλιλαίου, θα εισαγάγουμε τον ακόλουθο νεωτερισμό. Θα αντικαταστήσουμε τη χρονική συντεταγμένη t από την $w = ct$, οπότε στα αντίστοιχα διαγράμματα οι άξονες θα είναι οι x , w και x' , w' .

Σημειώστε, αρχικά, ότι

(i) Η διάσταση της συντεταγμένης w είναι ίδια μ' εκείνη της x . Κι αυτό γιατί, αν γ.π. $t = 1 \text{ sec}$, τότε $w = 3 \cdot 10^{10} \text{ (cm/sec)} \cdot 1 \text{ sec} = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}$. Παρ' όλ' αυτά, ένα διάγραμμα $x - w$ θα το λέμε χωροχρονικό.

(ii) Με την εισαγωγή της μεταβλητής w , οι δυο βασικές σχέσεις

$$(3.1) \quad x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (x - V t), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)$$

γίνονται

$$(3.2) \quad x' = \gamma(x - \beta w), \quad w' = \gamma(w - \beta x)$$

όπου, βέβαια,

$$(3.3) \quad \beta := \frac{V}{c}, \quad \gamma \equiv \gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Αξίζει να παρατηρήσετε ότι οι εξισώσεις που ορίζουν το μετασχηματισμό Lorentz $L: (x, w) \rightarrow (x', w')$, δηλαδή οι (3.3), είναι τελείως συμμετρικές ως προς τις συντεταγμένες x και w . Το ίδιο ισχύει και για τις εξισώσεις

$$(3.4) \quad \boxed{x = \gamma(x' + \beta w'), \quad w = \gamma(w' + \beta x')}$$

που εκφράζουν τον αντίστροφο μετασχηματισμό $L^{-1}: (x', w') \rightarrow (x, w)$.

Παράδειγμα

Ας δούμε αναλυτικότερα ένα παράδειγμα όπου του ΑΣΑ Σ' κινείται με ταχύτητα $V = 0,6c$ ως προς το ΑΣΑ Σ . Σ' αυτή την περίπτωση

$$\beta = 0,6 = \frac{3}{5}, \quad \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8 = \frac{4}{5}, \quad \gamma = \frac{5}{4} = 1,25$$

και άρα οι εξισώσεις (3.2) και (3.4) γίνονται

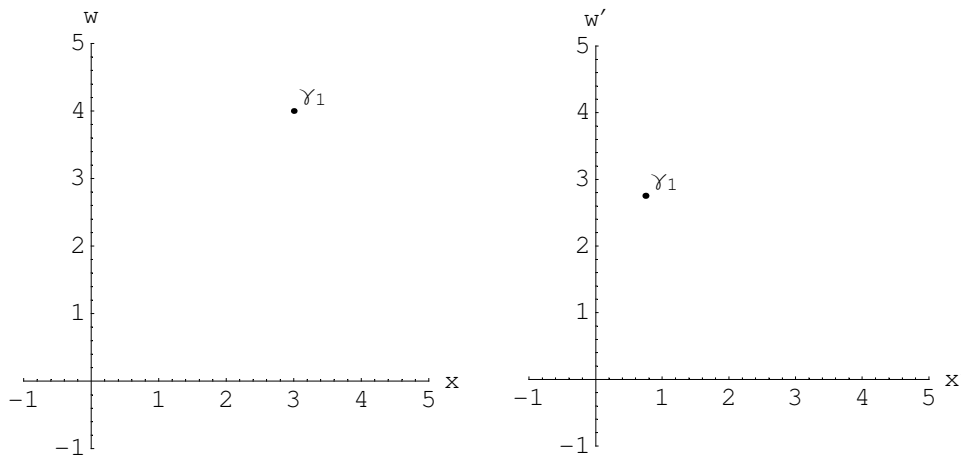
$$(3.5) \quad \boxed{x' = \frac{5}{4} \left(x - \frac{3}{5} w\right), \quad w' = \frac{5}{4} \left(w - \frac{3}{5} x\right)}$$

και

$$(3.6) \quad \boxed{x = \frac{5}{4} \left(x' + \frac{3}{5} w'\right), \quad w = \frac{5}{4} \left(w' + \frac{3}{5} x'\right)}$$

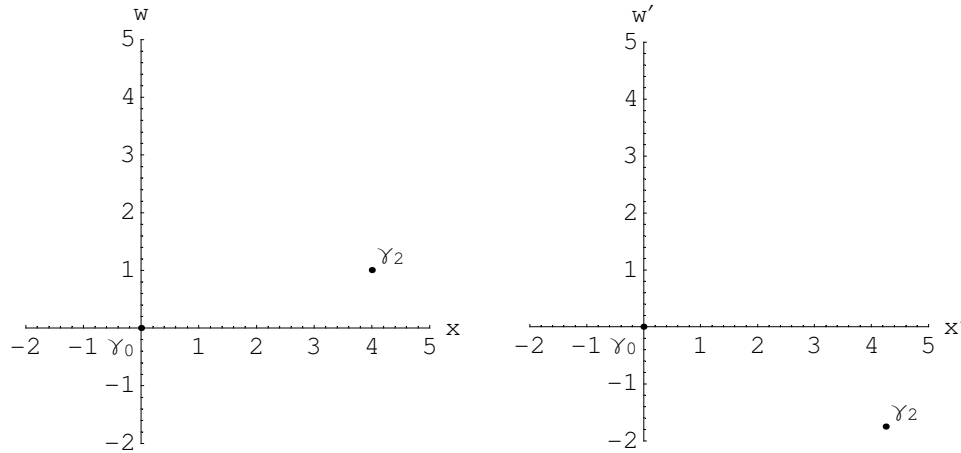
αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το γεγονός γ_1 έχει συντεταγμένες $(x_1, w_1) = (3, 4)$, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ . Τότε οι συντεταγμένες του γ_1 στο ΑΣΑ Σ' , θα είναι $(x'_1, w'_1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right) = (0,75, 2,75)$. Παρατηρούμε ότι, τα δυο ΑΣΑ διαφωνούν σημαντικά τόσο για χωρική όσο και για τη χρονική συντεταγμένη του δοσμένου γεγονότος. Αυτή η διαφωνία φαίνεται καθαρά και στα αντίστοιχα διαγράμματα:



Σχ. 3.1

Η διαφωνία γίνεται πολύ πιο εντυπωσιακή στην περίπτωση του γεγονότος γ_2 με συντεταγμένες $(x_2, w_2) = (4, 1)$. Γιατί τότε $(x_2', w_2') = (\frac{17}{4}, -\frac{7}{4}) = (4, 25, -1, 75)$. Για να συνειδητοποιήσουμε τη σημασία αυτού του αποτελέσματος, καλό είναι να θεωρήσουμε κι ένα άλλο γεγονός, το γ_0 , του οποίου οι συντεταγμένες είναι $(x_0, w_0) = (0, 0)$. Προφανώς, $(x_0', w_0') = (0, 0)$.



Σχ. 3.2

Σύμφωνα, λοιπόν, με το ΑΣΑ Σ το γεγονός γ_2 έλαβε χώρα μετά το γ_0 , αφού $w_2 > w_0$ και άρα και $t_2 > t_0$. Αντίθετα, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ' το γεγονός γ_2 προηγήθηκε του γ_0 , αφού $w_2' < w_0'$ και άρα και $t_2' < t_0'$!

Αυτή η αντιστροφή της χρονικής σειράς με την οποία έλαβαν χώρα δύο γεγονότα θα πρέπει να μας βάλει σε μεγάλη ανησυχία. Κι αυτό γιατί δημιουργεί το ενδεχόμενο της κατάλυσης της αιτιότητας, μιας από της βασικότερες έννοιες με τις οποίες καταλαβαίνουμε το φυσικό, αλλά και το βιολογικό, κοινωνικό κ.λ.π γίνεσθαι. Πιο συγκεκριμένα, όταν θεωρούμε ότι κάποιο γεγονός γ_1 προκαλεί ή παράγει το γ_2 , τότε πιστεύουμε ότι το γ_1 προηγείται χρονικά του γ_2 . Με άλλα λόγια, η αιτία προηγείται του αποτελέσματος. Ισοδύναμα, η σχέση αίτιο-αιτιατό (=αποτέλεσμα) έχει ως αναγκαία συνθήκη το αιτιατό να έπεται του αποτελέσματος. Αν, λοιπόν, στο πιο πάνω παράδειγμα το γεγονός γ_0 ήταν και η αιτία να συμβεί το γ_2 , τότε στο ΑΣΑ Σ η χρονική σειρά των γ_0 και γ_2 θα ήταν φυσιολογική, ενώ στο Σ' θα ήταν η ανάποδη - το αποτέλεσμα (γ_2) θα εμφανιζόταν πριν από το το γεγονός που το προκάλεσε (γ_0).

Είναι πλέον σαφές ότι η εικόνα που μας δίνει η Ειδική Σχετικότητα για τις χωροχρονικές σχέσεις των γεγονότων που λαβαίνουν χώρα στο φυσικό μας περιβάλλον είναι κυριολεκτικά ανατρεπτική. Θα πρέπει, λοιπόν, να μελετήσουμε αυτή την εικόνα διεξοδικότερα για να δούμε αν, παρά την αρχική της παραδοξότητα, μας δίνει τελικά ένα αποτελεσματικό ερμηνευτικό πλαίσιο για τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου.

Βέβαια, οι τιμές των συντεταγμένων που δώσαμε για το γεγονός γ_1 δε συνοδεύονταν από τη μονάδα μέτρησης και άρα δεν μπορούμε να πάρουμε και μια αίσθηση της ποσοτικής τους διαφοράς. Αν γ.π. οι πραγματικές τιμές ήταν $(x_1, w_1) = (3 \text{ cm}, 4 \text{ cm})$ τότε η χρονική συντεγμένη του γ_1 στο ΑΣΑ Σ θα ήταν

$$t_1 = w_1 / c = 4 \text{ cm} / (3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}) = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ sec}$$

και στο ΑΣΑ Σ'

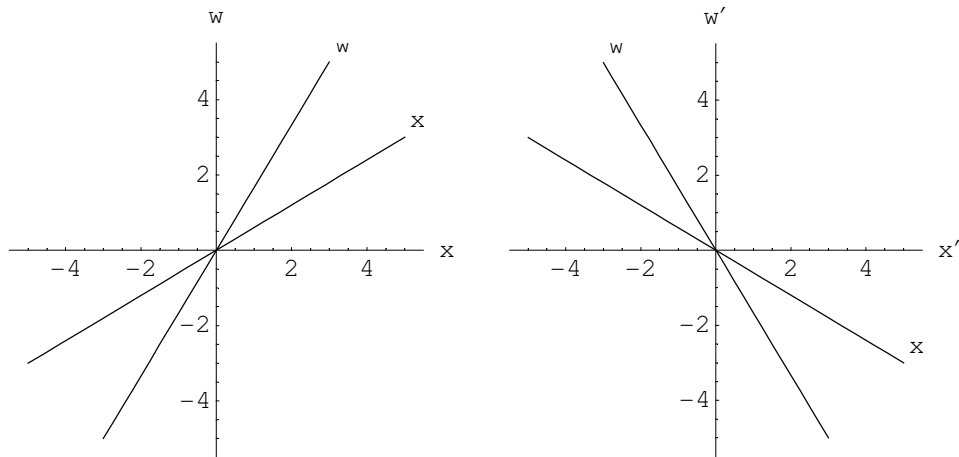
$$t_1' = w_1' / c = 2,75 \text{ cm} / (3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}) \approx 0,92 \cdot 10^{-10} \text{ sec}$$

Συνεχίζοντας τη μελέτη της σχέσης των χωροχρονικών συντεταγμένων που δίνουν δύο διαφορετικά ΑΣΑ για τα ίδια φυσικά γεγονότα, στρεφόμαστε στο ερώτημα του πως εμφανίζονται οι άξονες x' και w' στο διάγραμμα $x - w$. Όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού του Γαλιλαίου, ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι ο άξονας x' αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $w' \equiv ct' = 0$. Σύμφωνα με τη δεύτερη από τις εξισώσεις (3.2), η συνθήκη $w' = 0$ ισοδυναμεί με την $w - \beta x = 0$. Συνεπώς, τα σημεία του άξονα x' αντιστοιχούν στα σημεία που στο διάγραμμα $x - w$ αποτελούν την ευθεία $w = \beta x$. Προφανώς, αυτή η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση β ως προς τον άξονα x .

Ανάλογα, τα σημεία του άξονα w' χαρακτηρίζονται από τη συνθήκη $x' = 0$, η οποία, σύμφωνα με την πρώτη από τις εξισώσεις (3.2), ισοδυναμεί με την $x - \beta w = 0$. Η τελευταία περιγράφει την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων x, w και έχει κλίση β ως προς τον άξονα w .

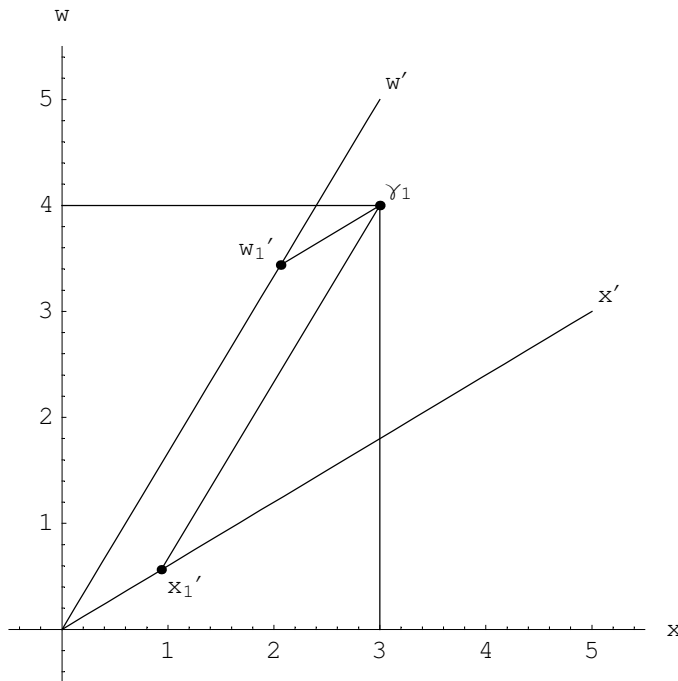
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε και τις εικόνες των αξόνων x και w στο διάγραμμα $x' - w'$. Συγκεκριμένα, τα σημεία του άξονα x είναι αυτά για τα οποία $w = 0$. Από τη δεύτερη των εξισώσεων (3.4) έπεται ότι η συνθήκη $w = 0$ είναι ίδια με την $w' + \beta x' = 0$. Συνεπώς, ο άξονας x αντιστοιχεί στην ευθεία $w' = -\beta x'$ του διαγράμματος $x' - w'$. Αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $-\beta$ ως προς τον άξονα x' . Ανάλογα, τα σημεία του άξονα w χαρακτηρίζονται από τη συνθήκη $x = 0$, η οποία γράφεται και σαν $x' + \beta w' = 0$, λόγω της πρώτης από τις σχέσεις (3.4). Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία του άξονα w απεικονίζονται στην ευθεία $x' = -\beta w'$ του διαγράμματος $x' - w'$. Αυτή, πάλι, διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση $-\beta$ ως προς τον άξονα w' .

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις εικόνες των αξόνων x' και w' στο διάγραμμα $x - w$, καθώς και τις εικόνες των αξόνων x και w στο διάγραμμα $x' - w'$, για την περίπτωση όπου $\beta = 3/5$, όπως στο παράδειγμα με το οποίο ξεκινήσαμε.



Σχ. 3.3

Με βάση τις παραπάνω κατασκευές, μπορούμε πλέον να βλέπουμε την εικόνα που δίνει το ΑΣΑ Σ' δουλεύοντας μόνο στο διάγραμμα $x - w$ του ΑΣΑ Σ. Ας πάρουμε γ.π. το γεγονός γ_1 του οποίου οι συντεταγμένες στο ΑΣΑ Σ είναι $(x_1, w_1) = (3, 4)$. Αφού κατασκευάσουμε την εικόνα των αξόνων x' και w' στο διάγραμμα $x - w$ με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, ξεκινάμε από το σημείο $(3, 4)$ και φέρνουμε παράλληλη πρώτα προς τον άξονα w' κι έπειτα προς τον άξονα x' . Το σημείο στο οποίο η πρώτη ευθεία τέμνει τον άξονα x' μας δίνει τη συντεταγμένη x_1' του γεγονότος γ_1 . Ανάλογα, το σημείο στο οποίο η δεύτερη ευθεία τέμνει τον άξονα w' μας δίνει τη συντεταγμένη w_1' του γ_1 (βλ. σχήμα).



Σχ. 3.4

Βέβαια, ο προσδιορισμός των συντεταγμένων x_1' , w_1' του γ_1 με τον τρόπο που μόλις περιγράψαμε είναι κατ' αρχήν ποιοτικός. Αυτό φαίνεται καθαρά από το προηγούμενο σχήμα, αν παρατηρήσουμε τα εξής. Με βάση τους τύπους του μετασχηματισμού Lorentz, βρήκαμε ότι οι ακριβείς τιμές των συντεταγμένων x_1' και w_1' είναι 0,75 και 2,75 μονάδες μήκους, αντί-στοιχα. Αντίθετα, σύμφωνα με το σχήμα, η απόσταση του σημείου x_1' από την αρχή των αξόνων φαίνεται να είναι ξεπερνάει τη μονάδα μήκους και το σημείο w_1' φαίνεται να απέχει από την αρχή των αξόνων πολύ περισσότερο από 2,75 μονάδες.

Ωστόσο, η παραπάνω ασυμφωνία ανάμεσα στο αριθμητικό αποτέλεσμα που δίνουν οι τύποι του μετασχηματισμού Lorentz και τις τιμές των συντεταγμένων που φαίνεται να προκύπτουν από το αντίστοιχο σχήμα οφείλεται απλώς και μόνο σε μία παρανόηση. Οι κλίμακες των αξόνων x' και w' δεν είναι ίδιες με εκείνες των x και w . Συνεπώς, δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε τις

μονάδες των αξόνων x και w στις οποίες στηρίζεται το σχήμα για να υπολογίζουμε αποστάσεις σημείων στην κλίμακα του χωρικού άξονα x' και του χρονικού w' .

Πάντως, δεν είναι δύσκολο να καταστήσουμε την παραπάνω διαδικασία υπολογισμού των συντεταγμένων x' και w' μέσω του διαγράμματος $x-w$ και ποσοτικά ακριβή. Αρκεί να στηριχτούμε στους ίδιους τους μετασχηματισμούς Lorentz για βρούμε τη σχέση της κλίμακας των αξόνων x' και w' προς εκείνη των x και w , αντίστοιχα, και να λάβουμε υπόψη μας αυτή τη σχέση στην κατασκευή του σχήματος.

Άσκηση

Να βρεθεί η μέθοδος κατασκευής της κλίμακας που υπαινίσσεται η προηγούμενη παράγραφος.

Λύση

Τα γεγονότα που έχουν χωρική συντεταγμένη $x' = 1$ είναι εκείνα για τα οποία

$$x = \gamma(x' + \beta w') = \gamma(1 + \beta w'), \quad w = \gamma(w' + \beta x') = \gamma(w' + \beta).$$

Άρα το γεγονός με $x' = 1$ που βρίσκεται πάνω στον άξονα x' (και άρα χαρακτηρίζεται από τη συνθήκη $w' = 0$) έχει συντεταγμένες

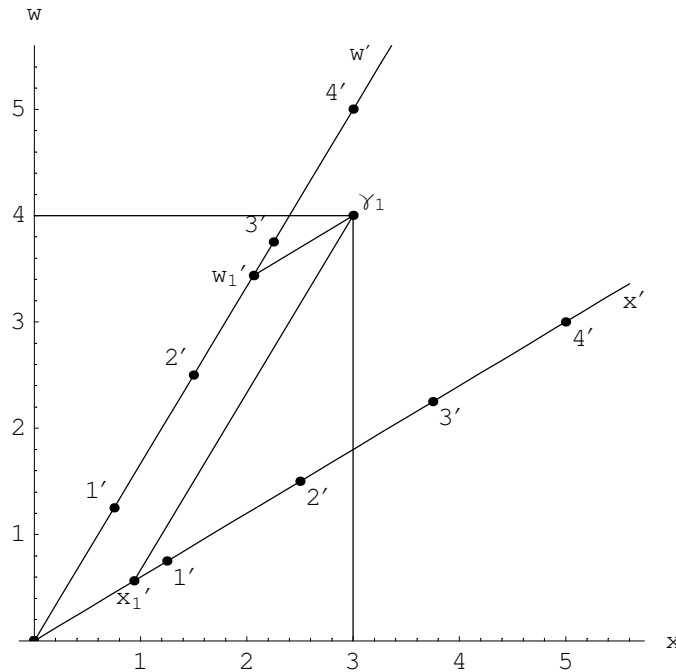
$$x = \gamma x' = \gamma \quad w = \gamma \beta x' = \gamma \beta.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο διαχωρισμός του άξονα x' πρέπει να γίνει με βάση τα σημεία

$$(x, w) = \gamma \kappa(1, \beta), \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατήρηση

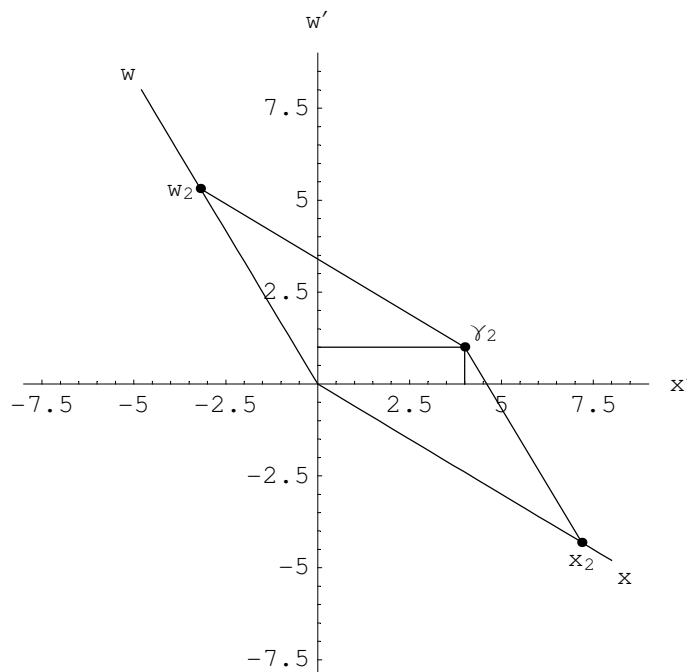
Το επόμενο σχήμα ενσωματώνει το αποτέλεσμα που μόλις βρήκαμε.



Σχ. 3.5

Προφανώς, τα ΑΣΑ Σ και Σ' είναι τελείως ισότιμα από την άποψη της περιγραφής όλων των γεγονότων του φυσικού κόσμου. Συνακόλουθα, μπορούμε να χρησιμοποιούμε αποκλειστικά και μόνο το χωροχρονικό διάγραμμα του Σ' και να συνάγουμε από αυτό το διάγραμμα την εικόνα που δίνει το ΑΣΑ Σ για απλά γεγονότα και την κίνηση σωμάτων. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να κατασκευάσουμε αρχικά και την εικόνα των αξόνων x και w στο διάγραμμα $x' - w'$, με τον τρόπο που υποδείξαμε παραπάνω.

Ας μείνουμε στο παράδειγμα όπου $\beta=3/5$ κι ας θεωρήσουμε το γεγονός γ_2 με συντεταγμένες $(x_2', w_2') = (4, 1)$. Από το σημείο $(4, 1)$ του διαγράμματος $x' - w'$ φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες w και x , αντίστοιχα, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Η πρώτη τέμνει τον άξονα x στο σημείο που δηλώνουμε με x_2 , ενώ η δεύτερη τέμνει τον άξονα w στο σημείο w_2 .

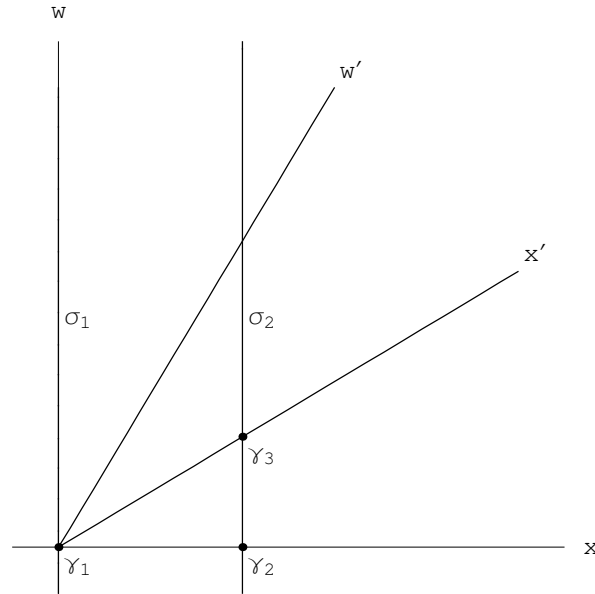


Σχ. 3.6

Γι άλλη μια φορά, σημειώνουμε ότι, στο βαθμό που οι άξονες x και w δε φέρουν τη δική τους κλίμακα, το προηγούμενο σχήμα δίνει μόνο μια ποιοτική εικόνα για το πως έχουν τα πράγματα από τη σκοπιά του ΑΣΑ Σ. Για να υπολογίσουμε ακριβώς τις συντεταγμένες (x_2, w_2) του γεγονότος γ_2 θα πρέπει είτε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (3.6), είτε να βρούμε τη σωστή κλίμακα των αξόνων x και w στο διάγραμμα $x' - w'$. Ωστόσο, η ποιοτική εικόνα που προκύπτει από τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε είναι πολύτιμη για την ανάλυση και κατανόηση των πορισμάτων της Ειδικής Σχετικότητας. Αυτό θα φανεί καθαρά στα επόμενα εδάφια.

6.4 Συστολή μήκους

Ας θεωρήσουμε μία ράβδο μήκους L που ακινητεί πάνω στον άξονα x ενός ΑΣΑ Σ. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ράβδος καταλαμβάνει το διάστημα $0 \leq x \leq L$. Στο αντίστοιχο χωροχρονικό διάγραμμα $x - w$, η κοσμική γραμμή κάθε στοιχείου της ράβδου είναι μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα w . Αυτό ισχύει ειδικότερα για τα στοιχεία των δύο άκρων της ράβδου, που μπορούμε να τα ταυτίζουμε, αντίστοιχα, με ένα σωματίο, σ_1 , που ακινητεί στη θέση $x = 0$ κι ένα δεύτερο, το σ_2 , που ακινητεί στη θέση $x = L$. Προφανώς, η κοσμική γραμμή του σ_1 ταυτίζεται με τον άξονα w και η κοσμική γραμμή του σ_2 με την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $(L, 0)$ του διαγράμματος $x - w$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα w (βλ. επόμενο σχήμα).



Σχ. 4.1

Προφανώς, μια στιγμή της “ζωής” της ράβδου στο ΑΣΑ Σ αντιστοιχεί σ’ ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο προς τον άξονα x που έχει τα άκρα του πάνω στις κοσμικές γραμμές των σ_1 και σ_2 , σαν αυτό που ενώνει τα γεγονότα γ_1 και γ_2 του σχήματος. Ανάλογα, μια στιγμή της ζωής της ράβδου στο ΑΣΑ Σ' αντιστοιχεί σ’ ένα ευθύγραμμο τμήμα που επίσης, έχει τα άκρα του πάνω στις κοσμικές γραμμές των σ_1 και σ_2 , αλλά είναι παράλληλο προς τον άξονα x' . Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα είναι αυτό που ενώνει τα γεγονότα γ_1 και γ_3 του σχήματος. Το τελευταίο αντιστοιχεί στη στιγμή $t' = 0$. Αρκεί, λοιπόν, να υπολογίσουμε τη χωρική απόσταση των γεγονότων γ_1 και γ_3 στο ΑΣΑ Σ' για να μάθουμε το μήκος της ράβδου σ’ αυτό το σύστημα.

Με άλλα λόγια, ως **μήκος ενός μονοδιάστατου αντικείμενου** (μιας ράβδου) σε κάποιο ΑΣΑ ορίζεται η χωρική απόσταση δύο ταυτόχρονων, από τη σκοπιά του δοσμένου ΑΣΑ, γεγονότων που λαβαίνουν χώρα στα άκρα του αντικείμενου.

Τώρα, το γεγονός γ_1 έχει συντεταγμένες $(x_1, w_1) = (0, 0)$ στο ΑΣΑ Σ και $(x'_1, w'_1) = (0, 0)$ στο Σ' . Για το γ_3 γνωρίζουμε ότι $x_3 = L$, αφού βρίσκεται πάνω στην κοσμική γραμμή του σ_2 , αλλά δε γνωρίζουμε τη συντεταγμένη του w_3 . Από την άλλη μεριά, το γεγονός ότι το γ_3 βρίσκεται πάνω στον άξονα x' (και άρα είναι ταυτόχρονο με το γ_1 , σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ') σημαίνει ότι $w'_3 = 0$. Ωστόσο, αυτές οι πληροφορίες αρκούν για να υπολογίσουμε τη συντεταγμένη x'_3 .

Συγκεκριμένα, από τη δεύτερη των εξισώσεων (3.4) έπεται ότι $w'_3 = 0 \Leftrightarrow w_3 = \beta x_3$. Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για τη συντεταγμένη w_3 στην πρώτη των εξισώσεων (3.4) οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα

$$(4.1) \quad x'_3 = \gamma(x_3 - \beta^2 x_3) = \gamma(1 - \beta^2) x_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 - \beta^2) x_3 = \sqrt{1 - \beta^2} x_3$$

Όμως, στην προκειμένη περίπτωση, η συντεταγμένη x_3' παριστάνει και το μήκος L' της ράβδου ως προς το ΑΣΑ Σ' . Άρα η σχέση (4.1) γράφεται και σαν

$$(4.2) \quad \boxed{L' = \sqrt{1 - \beta^2} L}$$

Είναι φανερό ότι ο συντελεστής $\sqrt{1 - \beta^2}$ είναι πάντα μικρότερος από τη μονάδα. Συνεπώς, η τελευταία σχέση σημαίνει ότι, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ' , το μήκος της δοσμένης ράβδου είναι μικρότερο από L .

Τονίζουμε ότι το αποτέλεσμα στο οποίο μόλις καταλήξαμε δεν έχει τίποτα να κάνει με το ποιο ΑΣΑ ονομάσαμε Σ και ποιο Σ' . Ισχύει γενικά και δηλώνει ότι, αν το μήκος ενός αντικείμενου στο ΑΣΑ όπου το αντικείμενο ακινητεί είναι L_0 , τότε σε κάθε άλλο ΑΣΑ το μήκος του ίδιου αντικείμενου είναι μικρότερο από L_0 . Για παράδειγμα, αν κανείς θεωρήσει μίαν άλλη ράβδο που ακινητεί στο ΑΣΑ που ονομάσαμε Σ' και, σύμφωνα με αυτό το σύστημα, έχει μήκος M , τότε στο ΑΣΑ Σ η ράβδος θα εμφανίζεται να έχει μήκος $\mu = \sqrt{1 - \beta^2} M$. Γι αυτό, το φυσικό φαινόμενο το οποίο περιγράφεται συνοπτικά από τον τύπο (4.2) ονομάζεται **συστολή μήκους**.

Άσκηση

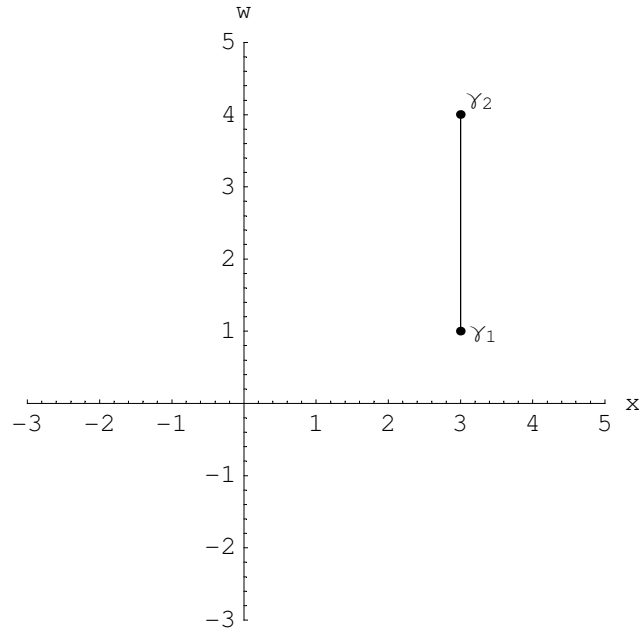
Θεωρείστε τα ΑΣΑ Σ και Σ' του εδάφιου 6.4 και μια ράβδο που ακινητεί κατά μήκος του άξονα x' του ΑΣΑ Σ' .

α) Υποθέτοντας ότι η ράβδος καταλαμβάνει το διάστημα $0 \leq x' \leq M$ του άξονα x' , δείχτε τις κοσμικές γραμμές των άκρων της στο σχήμα του εδάφιου 6.4. Στη συνέχεια, επιλέξτε δύο γεγονότα -ένα από κάθε μία από αυτές τις κοσμικές γραμμές- τα οποία είναι ταυτόχρονα από τη σκοπιά του Σ . Δείχτε ότι η χωρική απόσταση αυτών των γεγονότων είναι ίση με $\Delta x = \sqrt{1 - \beta^2} M$.

β) Υποθέστε ότι το γεγονός γ_3 του σχήματος περιέχεται στην κοσμική γραμμή του άκρου $x' = M$ της ράβδου. Δείχτε ότι $M = \sqrt{1 - \beta^2} L$ και ότι, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ , το μήκος της ράβδου είναι $(1 - \beta^2)L$.

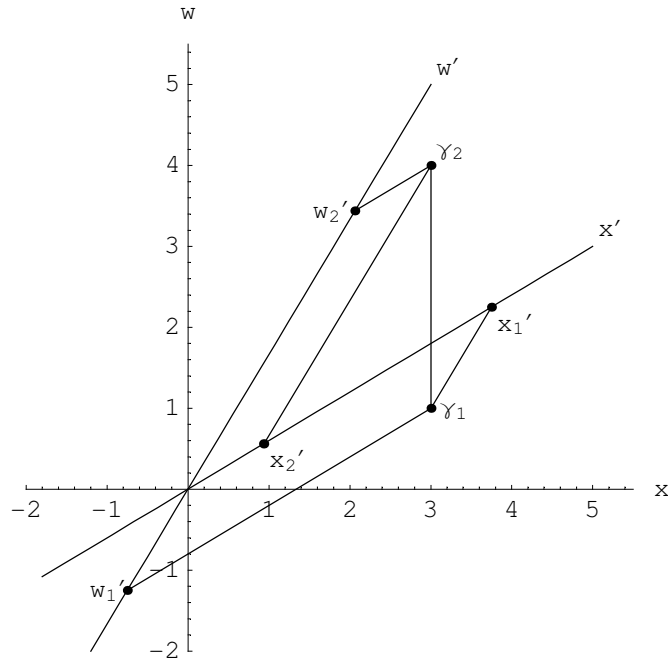
6.5 Διαστολή χρόνου - Παράδοξο των διδύμων

Θεωρούμε δυο γεγονότα γ_1 και γ_2 που είναι ταυτόχρονα στο ΑΣΑ Σ . Αυτό σημαίνει ότι $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$, οπότε, από τη σκοπιά του Σ , τα γ_1 και γ_2 έχουν χρονική μόνο διαφορά. Χωρίς να επηρεαστεί η γενικότητα της ανάλυσής μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γ_2 συμβαίνει μετά το γ_1 , ότι δηλαδή $\Delta t := t_2 - t_1 > 0$. Αν, λοιπόν, παραλείψουμε τους χωρικούς άξονες y και z , η διάταξη των γ_1 και γ_2 στο αντίστοιχο χωροχρονικό διάγραμμα έχει ως εξής.



Σχ. 5.1

Αν στο παραπάνω χωροχρονικό διάγραμμα xw χαράξουμε και τους άξονες $x'w'$, μπορούμε να "δούμε" και τις συντεταγμένες των γεγονότων γ_1 και γ_2 ως προς το ΑΣΑ Σ' . Αν γ.π. υποθέσουμε ότι $\beta = 3/5$, τότε καταλήγουμε στην ακόλουθη εικόνα.



Σχ. 5.2

Από το σχήμα γίνεται αμέσως φανερό ότι $x_1' \neq x_2'$. Συνεπώς, τα γεγονότα γ_1 και γ_2 δεν είναι ταυτόχρονα και από τη σκοπιά του ΑΣΑ Σ' . Μάλιστα, η χρονική απόσταση των γ_1 και γ_2 στο

ΑΣΑ Σ' υπολογίζεται εύκολα από τις εξισώσεις (3.6). Από αυτές, η πρώτη δείχνει καθαρά ότι η συνθήκη $\Delta x = 0$ συνεπάγεται την $\Delta x' = -\beta \Delta w'$. Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για το $\Delta x'$ στη δεύτερη από τις (3.6) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

$$(5.1) \quad \Delta w = \gamma(\Delta w' - \beta^2 \Delta w') = \gamma(1 - \beta^2) \Delta w' = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta w'.$$

Αλλά $w \equiv ct$. Άρα το τελευταίο αποτέλεσμα γράφεται σαν $\Delta t = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t'$, οπότε

$$(5.2) \quad \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta t \equiv \gamma \Delta t.$$

Ο συντελεστής γ είναι πάντα μεγαλύτερος από τη μονάδα. Κατά συνέπεια, η τελευταία σχέση δηλώνει ότι $\Delta t' > \Delta t$. Με άλλα λόγια, το χρονικό διάστημα που χωρίζει τα γεγονότα γ_1 και γ_2 από τη σκοπιά του ΑΣΑ Σ' είναι μεγαλύτερο από αυτό που “βλέπει” το Σ .

Τούτο το συμπέρασμα είναι τελείως γενικό και δεν έχει τίποτα να κάνει με την αρχική μας επιλογή να είναι τα γεγονότα γ_1 και γ_2 ταυτόχρονα στο ΑΣΑ Σ . Η γενική μορφή του αποτελέσματος είναι η ακόλουθη.

Αν σε κάποιο ΑΣΑ δυο ταυτόχρονα γεγονότα έχουν χρονική απόσταση ΔT_0 , τότε σε κάθε άλλο ΑΣΑ η χρονική απόσταση των ίδιων γεγονότων θα είναι ΔT , όπου

$$(5.3) \quad \boxed{\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta T_0 \equiv \gamma \Delta T_0},$$

δηλαδή μεγαλύτερη από ΔT_0 .

Όταν υπάρχει κάποιο ΑΣΑ Σ ως προς το οποίο δυο γεγονότα, γ_1 και γ_2 , εμφανίζονται ως ταυτόχρονα, τότε η χρονική διαφορά των γ_1 και γ_2 που καταγράφει το Σ ονομάζεται **ιδιοχρονικό διάστημα** ή, απλούστερα, **ιδιόχρονος**. Με βάση αυτή την ορολογία, το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Το ιδιοχρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο τυχαία γεγονότα είναι η ελάχιστη τιμή της χρονικής απόστασης που δίνουν για τα ίδια γεγονότα όλα ανεξαιρέτως τα ΑΣΑ.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, ένα σωματίο σ που, κατά το χρονικό διάστημα $t_0 \leq t \leq t_1$ κινείται με σταθερή ταχύτητα u_1 ως προς κάποιο ΑΣΑ Σ . Για ευκολία, θα υποθέσουμε ότι το σ κινείται κατά μήκος του χωρικού άξονα x του Σ . Τότε, η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σ δεν είναι άλλη από τη γνωστή $x = x_0 + u_1(t - t_0)$. Ας ονομάσουμε γ_0 το γεγονός της διέλευσης του σ από το σημείο x_0 τη στιγμή t_0 και γ_1 εκείνο της διέλευσής του από το σημείο x_1 τη στιγμή t_1 .

Από τη σκοπιά ενός ΑΣΑ Σ' που κινείται με ταχύτητα $V = u_1$ ως προς το Σ , το σωματίο σ εμφανίζεται ακίνητο. Συνεπώς, τα γεγονότα γ_0 και γ_1 είναι ταυτόχρονα ως προς το Σ' . Αυτό το συμπέρασμα συνάγεται αμέσως και από την αντικατάσταση των εκφράσεων

$$(5.4) \quad \Delta t = t_1 - t_0, \quad \Delta x = x_1 - x_0 = u_1(t_1 - t_0) = u_1 \Delta t$$

στον τύπο

$$(5.5) \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta \Delta w), \quad \beta := \frac{V}{c}, \quad \gamma \equiv \gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Συγκεκριμένα, από την υπόθεση ότι $V = u_1$ έπεται ότι

$$(5.6) \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta \Delta w) = \gamma(u_1 \Delta t - u_1 \Delta t) = 0.$$

Συνεπώς, το χρονικό διάστημα $\Delta t' = t_1' - t_0'$ αντιπροσωπεύει την ιδιοχρονική απόσταση των γεγονότων γ_0, γ_1 . Από τη σχέση

$$(5.7) \quad \Delta w' = \gamma(\Delta w - \beta \Delta x) = \gamma(c \Delta t - \beta u_1 \Delta t) = \gamma c \left(1 - \frac{u_1}{c}\right) \Delta t$$

αμέσως έπεται ότι

$$(5.8) \quad \Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t,$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που εκφράζεται από την (5.3).

Αν $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ κ.λ.π. είναι διαδοχικά διαστήματα σε καθένα από τα οποία το σ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, η παραπάνω διαδικασία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τους αντίστοιχους ιδιόχρονους. Το άθροισμα των τελευταίων υποτίθεται πως παριστάνει το χρόνο που καταγράφει ένα ρολόι που συνοδεύει το σώματιο σ . Το τελευταίο μπορεί ν' αποτελεί την "οικονομική" αναπαράσταση ενός εκτατού σώματος, γ.π. ενός ανθρώπου. Συνακόλουθα, το συνολικό ιδιοχρονικό διάστημα θεωρείται πως παριστάνει τον βιολογικό χρόνο που καθορίζει το ρυθμό γήρανσης ενός έμβιου όντος. Τα επακόλουθα αυτής της υπόθεσης περιγράφονται στο επόμενο

Παράδειγμα (Το παράδοξο των διδύμων)

Ο Μήτσος και ο Κώστας είναι δίδυμα αδέρφια. Ο Μήτσος που είναι αστροναύτης φεύγει μια μέρα για το διαστημικό σταθμό Δ που απέχει ένα έτος φωτός από τη γη. Παραμένει στον Δ για ένα ολοκληρω χρόνο, σύμφωνα με το δικό του Rolexάκι, και μετά παίρνει το δρόμο της επιστροφής στη γη. Αφού τα διαφορετικά συστήματα αναφοράς δε συμφωνούν για το χρονικό διάστημα που χωρίζει τα διάφορα γεγονότα, αναρωτιέται κανείς αν το ρολόι του Μήτσου λείει την ίδια ώρα με εκείνο του Κώστα -Rolex κι αυτό, οπωσδήποτε- όταν ξανασμίγουν.

Για ευκολία, θα υποθέσουμε ότι η γη ακινητεί στην αρχή των χωρικών αξόνων του ΑΣΑ Σ και πως ο διαστημικός σταθμός Δ ακινητεί στο σημείο $x = L = 1 \text{ year}$ (έτος φωτός) του άξονα x του Σ . Θα υποθέσουμε, επίσης, ότι το διαστημόπλοιο M του Μήτσου κινήθηκε με σταθερή ταχύτητα $u = (4/5)c$ τόσο όταν κατευθυνόταν προς τον Δ , όσο και κατά την επιστροφή του στη γη.

Ας ονομάσουμε $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ και γ_3 την αναχώρηση του Μήτσου για τον σταθμό Δ , την εκεί άφιξή του, την αναχώρηση από τον Δ και την άφιξή του στη γη, αντίστοιχα. Αν αυτά τα γεγονότα έλαβαν χώρα στις χρονικές στιγμές $t_0 = 0, t_1, t_2$ και t_3 , σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ , τότε η κίνηση του M περιγράφεται τμηματικά από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$(5.9\alpha) \quad x = x_0 + u_1(t - t_0) = u t, \quad t_0 = 0 \leq t \leq t_1,$$

$$(5.9\beta) \quad x = x_1 + u_2(t - t_1) = L, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

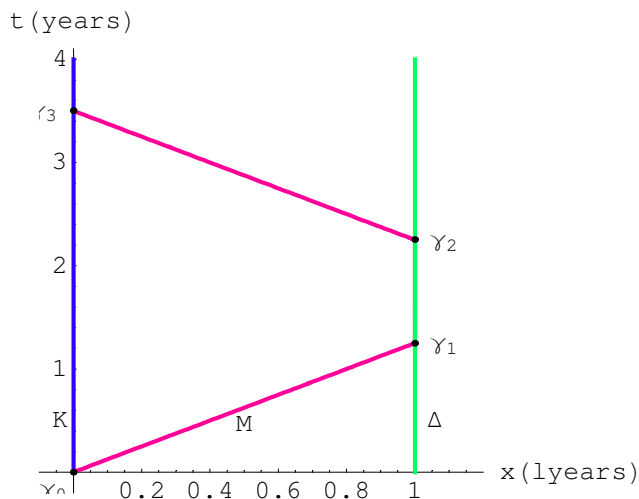
$$(5.9\gamma) \quad x = x_2 + u_3(t - t_2) = L - u(t - t_2), \quad t_2 \leq t \leq t_3$$

Από την (5.9α) και το γεγονός ότι $L = 1 \text{ year} \equiv c \cdot 1 \text{ y}$ αμέσως έπεται ότι

$$(5.10) \quad t_1 = \frac{L}{u} = \frac{c \cdot 1y}{(4/5)c} = \frac{5}{4} y = 1,25 \text{ \acute{e}τη}.$$

Αφού ο Μήτσος έμεινε στο διαστημικό σταθμό 1 έτος, η στιγμή της αναχώρησής του για τη γη αντιστοιχεί στην τιμή $t_2 = t_1 + 1 = 2,25$ έτη της χρονικής συντεταγμένης t . Τέλος, από το γεγονός ότι και κατά την επιστροφή του στη γη το Μ είχε ταχύτητα $(4/5)c$ έπεται ότι $t_3 - t_2 = t_1 = 1,25$ έτη. Συνεπώς, $t_3 = 3,5$ έτη. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει κι από την (5.10γ), αν σημειωθεί ότι $x_3 = 0$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται $0 = L - u(t_3 - t_2)$.

Στο σχήμα που ακολουθεί περιγράφεται η κοσμική καμπύλη του Μ κατά το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq t_3$, στο χωροχρονικό διάγραμμα του ΑΣΑ της γης, Σ. Στο ίδιο διάγραμμα δείχνουμε και τις κοσμικές γραμμές του Κώστα, Κ, και του διαστημικού σταθμού, Δ. Η πρώτη ταυτίζεται με τον άξονα t και η δεύτερη είναι η ευθεία που είναι παράλληλη προς αυτό τον άξονα και διέρχεται από το σημείο $(x, t) = (1, 0)$.



Σχ. 5.3

Σύμφωνα, λοιπόν, με το ρολόι του Κώστα η απουσία του Μήτσου διάρκεσε 3,5 χρόνια. Δυστυχώς γι αυτόν, ο Μήτσος έχει διαφορετική άποψη. Γιατί σύμφωνα με το δικό του ρολόι, το ταξίδι προς το διαστημικό σταθμό διάκεσε μόνο

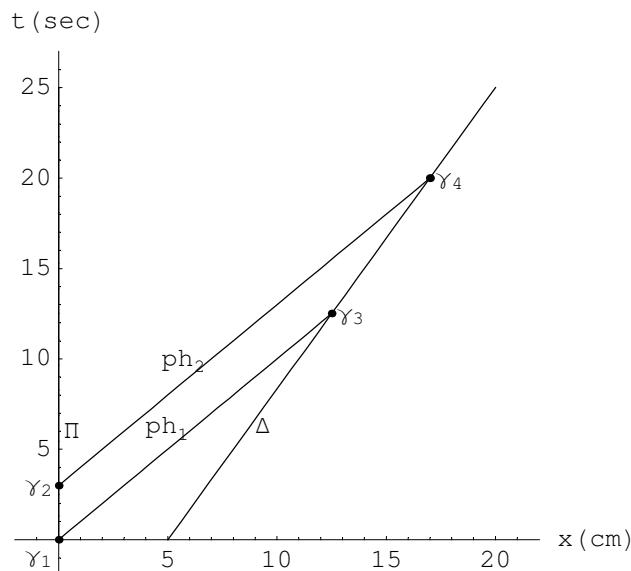
$$(5.11) \quad \Delta\tau_1 = \frac{t_1 - t_0}{\gamma} = \sqrt{1 - (4/5)^2} t_1 = \frac{3}{5} \cdot 1,25 y = 0,75 \text{ \acute{e}τη}.$$

Άλλο τόσο κράτησε το ταξίδι της επιστροφής, ενώ η διάρκεια της παραμονής του στο σταθμό ήταν και γι αυτόν ένα έτος. Σύμφωνα, λοιπόν με το ρολόι του Μήτσου, η απουσία του διάρκεσε μόνο 2,5 χρόνια, και άρα όταν επιστρέφει στη γη είναι ένα χρόνο νεότερος από τον δίδυμο αδερφό του!

6.6 Το ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο Doppler

Όπως δείξαμε στα προηγούμενα εδάφια, δύο ΑΣΑ που κινούνται το ένα ως προς το άλλο δεν συμφωνούν ούτε για το μήκος ενός σώματος ούτε για το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων. Θα πρέπει, λοιπόν, να περιμένουμε ότι δε θα συμφωνούν και για το μήκος κύματος και την περίοδο ενός ηχητικού ή ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Πραγματικά, επαναλαμβάνοντας την ανάλυση του φαινομένου Doppler την οποία παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ασυμφωνία που μόλις αναφέραμε είναι αναπότρεπτη απόρροια των μετασχηματισμών Lorentz.

Στο παρόν εδάφιο θα μελετήσουμε το πως ακριβώς παρουσιάζεται αυτό το φαινόμενο στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι στο σημείο $x = 0$ του ΑΣΑ Σ είναι τοποθετημένος ένας πομπός κυμάτων αυτού του είδους - ο Π . Αυτός μπορεί να είναι γ.π. η κεραία ενός ραδιοφωνικού σταθμού, ή η κεραία μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας ή μια πηγή φωτός (αναμμένη λάμπα). Για ευκολία στην ανάλυση του φαινομένου, θα υποθέσουμε ότι τα κύματα που εκπέμπει ο Π είναι **μονοχρωματικά**, δηλαδή μιας μόνο συχνότητας, ν . Επίσης, θα υποθέσουμε ότι ο Π μπορεί να παρασταθεί από ένα σημειακό αντικείμενο. Έτσι, η κοσμική του γραμμή στο διάγραμμα $x t$ ή $x w$ του ΑΣΑ Σ είναι η ευθεία γραμμή που ονομάζουμε άξονα x ή $w = c t$ (βλ. επόμενο σχήμα).



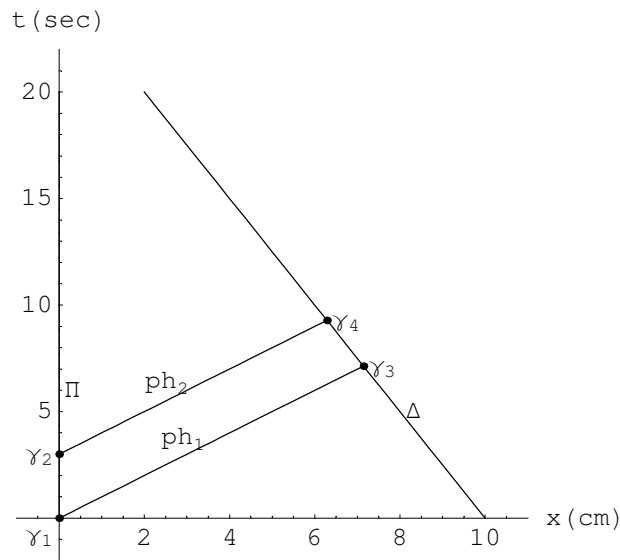
Σχ. 6.1

Όπως έχουμε τονίσει, μια πηγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μπορεί να θεωρείται ως εκτοξευτής άμαζων σωματίων -αυτών που ονομάζουμε φωτόνια. Αναλυτικότερα, κάθε πομπός κυμάτων συχνότητας ν θεωρείται ως ένα σώμα που συνεχώς εκτοξεύει φωτόνια με συγκεκριμένη ενέργεια προς όλες τις κατευθύνσεις. Όταν η συχνότητα του εκπεμπόμενου κύματος είναι ν , τότε η περίοδος του είναι $T = 1/\nu$. Αυτό σημαίνει ότι γ.π. ένα μέγιστο στην τιμή του ηλεκτρικού πεδίου

που αντιστοιχεί στο κύμα εμφανίζεται T sec μετά το αμέσως προηγούμενο. Αν συνδέσουμε δύο διαδοχικά μέγιστα με εκπομπές φωτονίων, τότε αυτές θα απέχουν χρονικά κατά T sec.

Ας υποθέσουμε ότι δύο τέτοιες διαδοχικές εκπομπές φωτονίων από την πηγή Π αντιστοιχούν στα γεγονότα γ_1 και γ_2 του σχήματος. Ένα φωτόνιο που παράγεται κατά την εκπομπή γ_1 και κινείται κατά μήκος και προς τη θετική φορά του άξονα x περιγράφεται από την ευθεία $x = ct$. Ένα φωτόνιο του ίδιου τύπου αλλά που παράχθηκε κατά την “έκρηξη” γ_2 αντιστοιχεί στην ευθεία $x = c(t - T)$.

Τώρα, θεωρούμε και ένα σώματιο Δ που κινείται με σταθερή ταχύτητα V πάνω στον άξονα x του ΑΣΑ Σ στο οποίο ακινητεί η πηγή Π . Χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα της ανάλυσής μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, τη στιγμή $t_1 = 0$ που η πηγή εκτόξευσε το πρώτο φωτόνιο, το Δ βρισκόταν στο σημείο $x = a > 0$. Τότε, η κοσμική γραμμή του σώματιου Δ ορίζεται από τη σχέση $x = a + Vt$. Αυτή η υπόθεση συνεπάγεται επιπλέον ότι το Δ απομακρύνεται από την πηγή αν το V επιλεγεί θετικό, ενώ την πλησιάζει όταν το $V < 0$. Η περίπτωση όπου το $V > 0$ παριστάνεται στο προηγούμενο σχήμα. Εκείνη όπου το $V < 0$ περιγράφεται από το σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 6.2

Σε κάθε περίπτωση, λίγο μετά την εκτόξευσή του από την πηγή, το πρώτο φωτόνιο φ_1 θα συναντήσει το σώματιο Δ . Ας πούμε ότι αυτό είναι το γεγονός γ_3 και ότι λαβαίνει χώρα στο σημείο $x = x_3$ τη χρονική στιγμή $t = t_3$. Είναι φανερό ότι το γ_3 αντιστοιχεί στην τομή της κοσμικής γραμμής των φ_1 και Δ (βλ. σχήμα). Άρα, από τη σκοπιά της κοσμικής γραμμής του φ_1 , $x_3 = ct_3$. Συνάμα, από τη σκοπιά της κοσμικής γραμμής του Δ , $x_3 = a + Vt_3$. Κατά συνέπεια,

$$(6.1) \quad t_3 = \frac{a}{c-V}, \quad x_3 = \frac{ca}{c-V}.$$

Ανάλογα, το φωτόνιο φ_2 - αυτό που εκπέμφθηκε T sec μετά από το φ_1 - θα φτάσει στον δέκτη Δ τη χρονική στιγμή $t = t_4$, όταν ο τελευταίος βρίσκεται στο σημείο $x = x_4$. Αυτό το γεγονός δηλώνεται με γ_4 στο σχήμα και οι συντεταγμένες του υπολογίζονται εύκολα, με το τρόπο που υποδείξαμε για το γ_3 . Συγκεκριμένα, η κοσμική γραμμή του φ_2 ορίζεται από τη σχέση $x = c(t - T)$. Αφού το γ_4 ανήκει σ' αυτή τη γραμμή, θα έχουμε $x_4 = c(t_4 - T)$. Από την άλλη, το γ_4 ανήκει και στην κοσμική γραμμή του Δ . Συνεπώς, $x_4 = a + V t_4$. Από τις δυο τελευταίες σχέσεις αμέσως έπεται ότι

$$(6.2) \quad t_4 = \frac{a+cT}{c-V}, \quad x_4 = c \frac{a+VT}{c-V}.$$

Συνακόλουθα

$$(6.3) \quad t_4 - t_3 = \frac{cT}{c-V}, \quad x_4 - x_3 = V \frac{cT}{c-V}.$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, ένα ΑΣΑ Σ' , το οποίο κινείται με την ταχύτητα V του σ ως προς το Σ . Προφανώς, στο Σ' το σ φαίνεται ακίνητο. Συγκεκριμένα, αν το Σ' επιλεγεί με τρόπο ώστε να ισχύει ο ειδικός μετασχηματισμός Lorentz

$$(6.4) \quad x' = \gamma(V)(x - Vt), \quad t' = \gamma(V)\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad \gamma(V) := \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

τότε η κοσμική γραμμή του σ στο Σ' προσδιορίζεται με το να θέσουμε $x = a + Vt$ στους τελευταίους τύπους. Έτσι, οι εξισώσεις (6.4) γίνονται

$$(6.5) \quad x' = \gamma(V)a, \quad t' = \gamma(V)\left[t - \frac{V}{c^2}a - \left(\frac{V}{c}\right)^2 t\right].$$

Η πρώτη από αυτές δηλώνει ότι η χωρική συντεταγμένη x' του σ παραμένει σταθερή, πράγμα που σημαίνει ότι, πραγματικά, από τη σκοπιά του ΑΣΑ Σ' το σ είναι ακίνητο. Η δεύτερη από τις (6.5) απλοποιείται για να γίνει

$$(6.6) \quad t' = \gamma(V)\left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]t - \gamma(V)\frac{Va}{c^2} = \frac{1}{\gamma(V)}t - \gamma(V)\frac{Va}{c^2}$$

Και αυτή η σχέση ήταν ουσιαστικά αναμενόμενη, αφού συνεπάγεται ότι

$$(6.7) \quad \Delta t' = \frac{1}{\gamma(V)} \Delta t.$$

Προφανώς, η (6.7) εκφράζει το γνωστό μας πλέον φαινόμενο της διαστολής του χρόνου: Αφού δίνεται από ένα ΑΣΑ όπου το σ ακινητεί, το διάστημα $\Delta t'$ είναι ιδιόχρονος του σ . Κατά συνέπεια, οφείλει να είναι μικρότερο από το Δt και, για την ακρίβεια, ίσο προς $\sqrt{1 - (V/c)^2} \Delta t$.

Ο σταθερός όρος $-\gamma(V)Va/c^2$, από την άλλη, αντικατοπτρίζει το ακόλουθο γεγονός. Τα δύο συστήματα αναφοράς συμφωνούν μόνο για το πότε η αρχή των χωρικών τους αξόνων του ενός βρισκόταν δίπλα στην αρχή των χωρικών τους αξόνων του άλλου. Για την τιμή της χρονικής συντεταγμένης κάθε άλλου γεγονότος διαφωνούν πλήρως. Έτσι, το γεγονός ότι, σύμφωνα με το ΑΣΑ Σ , το σωματίο σ πέρασε από το σημείο $x = a$ τη στιγμή $t = 0$ περιγράφεται από το Σ' με διαφορετικό τρόπο: Το σ βρισκόταν στη θέση $x' = \gamma(V)a$ τη στιγμή $t' = -\gamma(V)Va/c^2$. (Για το

ΑΣΑ Σ' , το σωματίο ήταν και θα παρέμενε στην ίδια θέση πριν και μετά τη χρονική στιγμή $t' = -\gamma(V) V a / c^2$.

Όπως είδαμε παραπάνω, από τη σκοπιά του ΑΣΑ Σ , τα φωτόνια φ_1, φ_2 φτάνουν στον δέκτη Δ με χρονική διαφορά $\Delta t := t_4 - t_3 = c T / (c - V)$. Σύμφωνα με την (6.7), αυτή η διαφορά καταγράφεται από το ΑΣΑ Σ' ως ίση με

$$(6.8) \quad \Delta t' = \frac{1}{\gamma(V)} \frac{cT}{c-V} = \frac{1}{\gamma(V)} \frac{T}{1-(V/c)}$$

Όμως,

$$(6.9) \quad \frac{1}{\gamma(V)} \frac{1}{1-(V/c)} \equiv \frac{\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-(V/c)} = \frac{\sqrt{[1+(V/c)][1-(V/c)]}}{1-(V/c)} = \sqrt{\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}}$$

Συνεπώς, η (6.8) γράφεται και ως

$$(6.10) \quad \Delta t' = \sqrt{\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}} T$$

Αλλά, για τον ίδιο λόγο που το χρονικό διάστημα T ανάμεσα στις εκπομπές των φ_1 και φ_2 προσδιορίζει την περίοδο του αντίστοιχου ηλεκτρομαγνητικού κύματος ως προς το ΑΣΑ Σ , το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ που χωρίζει την άφιξη των φ_1 και φ_2 στον δέκτη που ακινητεί στο ΑΣΑ Σ' εκφράζει την περίοδο του ίδιου κύματος από τη σκοπιά του Σ' . Γι' αυτό θα συμβολίσουμε το διάστημα $\Delta t'$ με T' και θα γράψουμε την (6.10) στη μορφή

$$(6.11) \quad T' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} T.$$

Έτσι κι αλλιώς, το όλο φαινόμενο είναι συμμετρικό ως το ποιος είναι ο πομπός και ποιος ο δέκτης. (Διαφορετικά θα μπορούσαμε να διακρίνουμε τα ακίνητα ως προς τον αιθέρα ΑΣΑ).

Αφού η συχνότητα είναι ίση προς το αντίστροφο της περιόδου, η σχέση των συχνοτήτων ν και ν' που χαρακτηρίζουν το κύμα από τη σκοπιά των ΑΣΑ Σ και Σ' , αντίστοιχα, εκφράζεται από τον τύπο

$$(6.12) \quad \nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \nu.$$

Αυτός δείχνει καθαρά ότι, στην περίπτωση που το $\beta > 0$, η συχνότητα ν' που δίνει το ΑΣΑ Σ' για το κύμα είναι μικρότερη από εκείνη που δίνει το ΑΣΑ Σ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, έτσι όπως επιλέξαμε τη θέση του πομπού και την κατεύθυνση κίνησης των εκπεμπόμενων φωτονίων, το αντίστοιχο κύμα διαδιδόταν προς την ίδια κατεύθυνση με εκείνη προς την οποία εκινιόταν το Σ' ως προς το Σ . Άρα μία γενική περιγραφή του φαινομένου που μόλις αναλύσαμε είναι η ακόλουθη:

Αν ένα μονοχρωματικό κύμα διαδίδεται στο ΑΣΑ Σ προς την ίδια κατεύθυνση προς την οποία κινείται και το ΑΣΑ Σ' , τότε η συχνότητά του στο Σ' είναι μικρότερη από εκείνη που καταγράφει το Σ . Στην περίπτωση που το κύμα και το Σ' κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση, η συχνότητα του κύματος στο Σ' είναι μεγαλύτερη από εκείνη που δίνει το Σ .

Τούτο το συμπέρασμα είναι γνωστό ως **φαινόμενο Doppler**. Μπορεί να περιγραφεί και με όρους πομπού και δέκτη, ως εξής:

Όταν ο δέκτης απομακρύνεται από τον πομπό ενός μονοχρωματικού κύματος, τότε η συχνότητα στην οποία λαβαίνει το κύμα είναι μικρότερη από εκείνη με την οποία το κύμα εκπέμπεται από την πηγή. Αντίθετα, όταν ο δέκτης πλησιάζει προς την πηγή, τότε λαβαίνει το σήμα με συχνότητα μεγαλύτερη από εκείνη της εκπομπής.

Για να εκφράσουμε αυτό το συμπέρασμα με ενιαίο τρόπο, θα πρέπει να γράψουμε τον τύπο του φαινομένου Doppler ως εξής:

$$(6.13) \quad \nu' = \sqrt{\frac{1-\varepsilon\beta}{1+\varepsilon\beta}} \nu.$$

Και πάλι $\beta := V/c$, ενώ εξακολουθούμε να υποθέτουμε ότι πομπός και δέκτης παραμένουν πάνω στον άξονα x . Αλλά τώρα, το $\varepsilon = \pm 1$, ανάλογα με το αν ο δέκτης βρίσκεται στη θετική πλευρά του άξονα x ή στην αντίθετη.

6.7 Ταξινόμηση χωροχρονικών διαστημάτων

Θεωρούμε δυο τυχαία γεγονότα, τα γ_1 και γ_2 , τα οποία λαβαίνουν χώρα πάνω στον άξονα x ενός ΑΣΑ Σ . Η χωρική απόστασή τους δίνεται από το θετικό αριθμό $|\Delta x| := |x_2 - x_1|$ και η χρονική από τον $|\Delta t| := |t_2 - t_1|$. Αυτές οι αποστάσεις αποκτούν την ίδια διάσταση και γίνονται συγκρίσιμες αν γ.π. πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη με την απόλυτη τιμή της ταχύτητας του φωτός στο κενό, οπότε γίνεται $c|\Delta t| = |ct_2 - ct_1| = |w_2 - w_1| \equiv |\Delta w|$. Γενικά, η χωρική απόσταση, $|\Delta x|$, των γεγονότων γ_1 και γ_2 μπορεί να είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με την απόσταση $|\Delta w|$. Ας εξετάσουμε αυτά τα τρία ενδεχόμενα ξεχωριστά.

$$(α) \quad |\Delta x| > |\Delta w|.$$

Αυτή η ανισότητα μπορεί να γραφτεί σαν

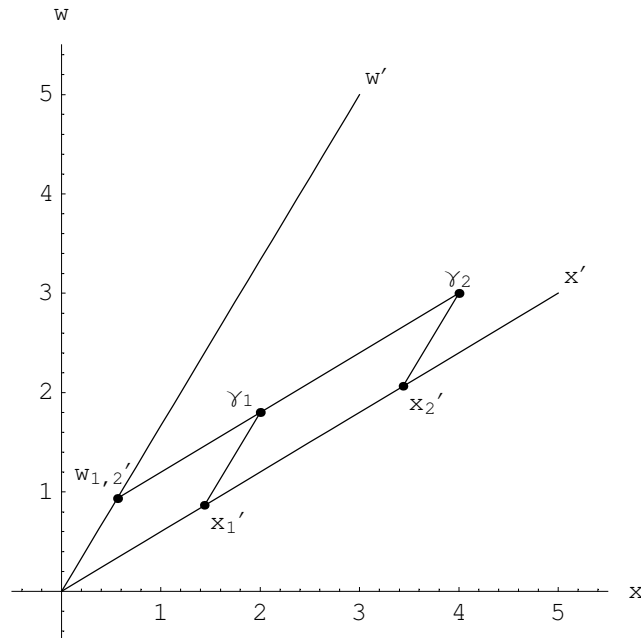
$$(7.1) \quad \Delta w = \varepsilon \Delta x, \quad 0 < |\varepsilon| < 1.$$

Τώρα, από τη σχέση $\Delta w' = \gamma(\Delta w - \beta \Delta x)$ έπεται ότι

$$(7.2) \quad \Delta w' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta w = \beta \Delta x.$$

Κατά συνέπεια, αν θεωρήσουμε ένα ΑΣΑ Σ' που κινείται με ταχύτητα $V = \varepsilon c$ ως προς το ΑΣΑ Σ , τότε στο Σ' η χρονική απόσταση των γεγονότων γ_1 και γ_2 θα είναι μηδενική. Ισοδύναμα, τα γ_1 και γ_2 θα εμφανίζονται στο ΑΣΑ Σ' να συμβαίνουν ταυτόχρονα σε δυο διαφορετικά σημεία του χώρου.

Αυτό σημαίνει ότι στο χωροχρονικό διάγραμμα του ΑΣΑ Σ' τα γεγονότα γ_1 και γ_2 κείνται πάνω σε μια ευθεία που είναι παράλληλη προς τον άξονα x' . Συνακόλουθα, στο διάγραμμα του Σ η διάταξη των γ_1 και γ_2 θα είναι σαν αυτή του επόμενου σχήματος.



Σχ. 7.1

(β) $|\Delta x| < |\Delta w|$.

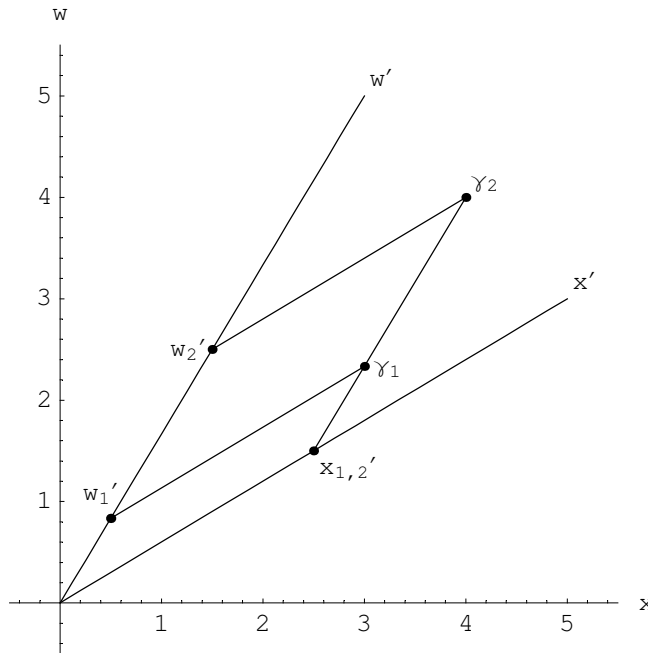
Αυτή η ανισότητα μπορεί να γραφεί σαν

$$(7.3) \quad \Delta x = \varepsilon \Delta w, \quad 0 < |\varepsilon| < 1.$$

Από την άλλη μεριά, η σχέση $\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta \Delta w)$ συνεπάγεται ότι

$$(7.4) \quad \Delta x' = 0 \Leftrightarrow \Delta x = \beta \Delta w.$$

Άρα, σ' ένα ΑΣΑ Σ' που κινείται με ταχύτητα $V = \varepsilon c$ ως προς το Σ , τα γεγονότα γ_1 και γ_2 θα εμφανίζονται να είναι ταυτόχρονα. Ισοδύναμα, τα γ_1 και γ_2 θα βρίσκονται και τα δύο πάνω σε μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα w' , όπως στο επόμενο σχήμα.



Σχ. 7.2

$$(\gamma) |\Delta x| = |\Delta w|.$$

Αυτή η ισότητα μπορεί να γραφτεί σαν

$$(7.5) \quad \Delta x = \varepsilon \Delta w, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

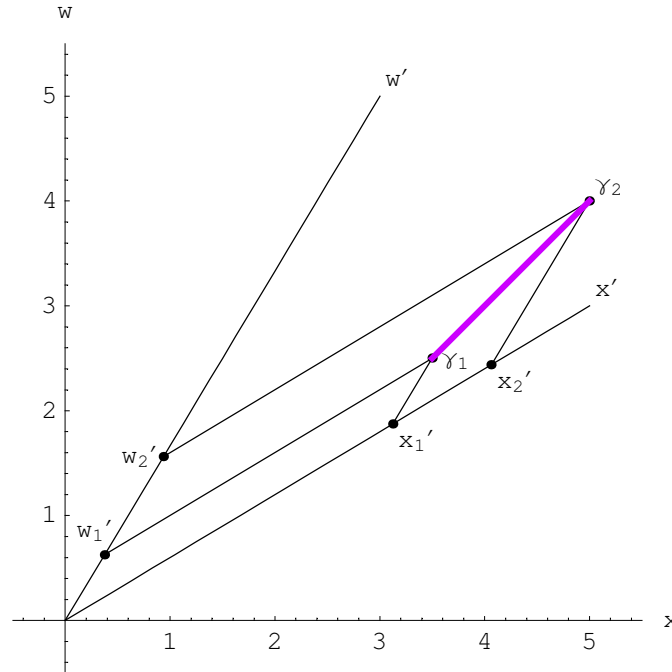
Η αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στις

$$(7.6) \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta \Delta w), \quad \Delta w' = \gamma(\Delta w - \beta \Delta x).$$

οδηγεί στο αναμενόμενο αποτέλεσμα

$$(7.7) \quad \Delta x' = \varepsilon \Delta w'.$$

Με άλλα λόγια, σ' αυτή την περίπτωση τα γεγονότα γ_1 και γ_2 βρίσκονται και τα δύο πάνω σε μια ευθεία που σχηματίζει την ίδια γωνία τόσο με τον άξονα x' όσο και με τον άξονα w' . Κατά συνέπεια, η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη προς τη διχοτόμο μιας από τις γωνίες που σχηματίζουν οι άξονες x' και w' . Η κλίση αυτής της ευθείας ως προς τους άξονες x και w είναι 45° και άρα μπορεί να θεωρηθεί σαν το τμήμα της κοσμικής γραμμής ενός φωτόνιου το οποίο διέρχεται από τα σημεία x_1 και x_2 τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , αντίστοιχα.



Σχ. 7.3

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι τα παραπάνω αποτελέσματα απορρέουν από τη θεμελιώδη ιδιότητα των μετασχηματισμών Lorentz να διατηρούν την ποσότητα

$$(7.8) \quad \alpha := (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta w)^2.$$

αναλλοίωτη. Αυτό σημαίνει ότι, για οποιοδήποτε ζευγάρι γεγονότων γ_1 και γ_2 , οι χωροχρονικές τους αποστάσεις στα τυχαία ΑΣΑ Σ και Σ' ικανοποιούν την ισότητα

$$(7.9) \quad \boxed{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (\Delta w')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta w)^2}.$$

Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι απλούστατη. Αφού $\Delta y' = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$(7.10) \quad (\Delta x')^2 - (\Delta w')^2 = (\Delta x)^2 - (\Delta w)^2.$$

Αλλά από τις σχέσεις (3.2) αμέσως έπεται ότι

$$(7.11) \quad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta\Delta w), \quad \Delta w' = \gamma(\Delta w - \beta\Delta x).$$

Άρα

$$\begin{aligned} (\Delta x')^2 - (\Delta w')^2 &= \gamma^2(\Delta x - \beta\Delta w)^2 - \gamma^2(\Delta w - \beta\Delta x)^2 \\ &= \gamma^2 \{(\Delta x)^2(1 - \beta^2) - (\Delta w)^2(1 - \beta^2)\} \\ &= \gamma^2(1 - \beta^2) \{(\Delta x)^2 - (\Delta w)^2\} \equiv (\Delta x)^2 - (\Delta w)^2, \end{aligned}$$

αφού $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι οι χωροχρονικές συντεταγμένες δυο συγκεκριμένων γεγονότων στο ΑΣΑ Σ είναι τέτοιες που $\alpha > 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$(7.12) \quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 > (\Delta w)^2$$

και άρα

$$(7.13) \quad d(\gamma_1, \gamma_2) > |\Delta w|$$

όπου

$$(7.14) \quad d(\gamma_1, \gamma_2) := \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},$$

δηλαδή η χωρική απόσταση των γεγονότων γ_1 και γ_2 . Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει κάποιο ΑΣΑ Σ' στο οποίο $\Delta w' = 0$. Αυτό θα το αποδείξουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, αλλά ο αναγνώστης μπορεί από τώρα να πεισθεί για την ισχύ του. Αρκεί να θυμηθεί ότι, στρέφοντάς τους κατάλληλα, μπορούμε να επιλέξουμε τους χωρικούς άξονες με τρόπο ώστε η ευθεία που ενώνει τα σημεία όπου έλαβαν χώρα τα γεγονότα γ_1 και γ_2 να είναι παράλληλη προς τον (καινούργιο) άξονα x . Με άλλα λόγια, στο νέο σύστημα αξόνων θα έχουμε $\Delta y = \Delta z = 0$, οπότε ισχύουν αυτά που αποδείξαμε νωρίτερα.

Όταν, λοιπόν, $\alpha > 0$, τότε μπορούμε να βρούμε ένα ΑΣΑ Σ' στο οποίο τα γ_1 και γ_2 συμβαίνουν σε διαφορετικά σημεία του χώρου αλλά ταυτόχρονα. Γι' αυτό, όταν $\alpha > 0$, λέμε ότι η **χωροχρονική απόσταση** των γ_1 και γ_2 είναι **χωρικού τύπου ή χωροειδής**.

Αντίθετα, όταν $\alpha < 0$, τότε

$$(7.15) \quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < (\Delta w)^2$$

και άρα

$$(7.16) \quad d(\gamma_1, \gamma_2) < |\Delta w|.$$

Σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει κάποιο ΑΣΑ Σ' στο οποίο

$$(7.17) \quad d'(\gamma_1, \gamma_2) := \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2} = 0.$$

Με άλλα λόγια, όταν $\alpha < 0$, τότε μπορούμε να βρούμε ένα ΑΣΑ Σ' στο οποίο τα γ_1 και γ_2 συμβαίνουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές αλλά στο ίδιο σημείο του χώρου (είναι ταυτόχωρα). Γι' αυτό, όταν $\alpha < 0$, λέμε ότι η **χωροχρονική απόσταση** των γ_1 και γ_2 είναι **χρονικού τύπου ή χρονοειδής**.

Τέλος, όταν $\alpha = 0$, τότε

$$(7.18) \quad d(\gamma_1, \gamma_2) = |\Delta w| \equiv c |\Delta t|$$

και

$$(7.19) \quad d'(\gamma_1, \gamma_2) = |\Delta w'| \equiv c |\Delta t'|.$$

Αυτό σημαίνει ότι, τόσο στο ΑΣΑ Σ όσο και σε κάθε άλλο ΑΣΑ Σ' , τα γεγονότα γ_1 και γ_2 συμβαίνουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και σε διαφορετικά σημεία του χώρου, αλλά ανήκουν στην κοσμική γραμμή ενός φωτόνιου (ισοδύναμα, πάνω στη γεννήτρια ενός κώνου φωτός). Γι' αυτό, όταν $\alpha = 0$, λέμε ότι η **χωροχρονική απόσταση** των γ_1 και γ_2 είναι **μηδενική**, ή **φωτονιακού τύπου**, ή **φωτοειδής**.

7. Χωρόχρονος Minkowski

7.1 Χώρος Minkowski

Όπως διαπιστώσαμε στο τέλος του προηγούμενου κεφάλαιου, η ποσότητα

$$(1.1) \quad \alpha := (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta w)^2$$

μένει αναλλοίωτη κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz. Με άλλα λόγια, δυο τυχαία ΑΣΑ, ας πούμε τα Σ και Σ' , μπορεί να διαφωνούν για κάποιες από τις χωροχρονικές συντεταγμένες των τυχαίων γεγονότων γ_1 και γ_2 , αλλά συμφωνούν πάντοτε για την τιμή της ποσότητας α . Ισοδύναμα,

$$(1.2) \quad (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - (\Delta w')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta w)^2,$$

όπου $\Delta x := x_2 - x_1$, $\Delta x' := x_2' - x_1'$, κ.λ.π.

Αυτή η παρατήρηση μας θυμίζει την περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 , όπου όλα τα Καρτεσιανά συστήματα, ακόμα και όταν διαφωνούν για κάποιες από τις επιμέρους συντεταγμένες δυο σημείων p_1 και p_2 , συμφωνούν απόλυτα για την τιμή της ποσότητας $[d(p_1, p_2)]^2 := (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$, δηλαδή για το τετράγωνο της απόστασης των p_1 και p_2 .

Αναρωτιέται, λοιπόν, κανείς αν μπορεί να εκφράσει τις ιδιότητες των χωροχρονικών προσδιορισμών των απλών γεγονότων που δίνουν τα διάφορα ΑΣΑ με μια μαθηματική δομή ανάλογη μ' εκείνη του \mathbb{R}^3 . Το ότι αυτό το ερώτημα επιδέχεται καταφατική απάντηση ανακαλύφθηκε το 1908 από τον Ρωσογερμανό μαθηματικό Hermann Minkowski (1864-1909) και γι' αυτό η μαθηματική δομή που εκφράζει την εικόνα της Ειδικής Σχετικότητας για το χωρόχρονο ονομάζεται *χώρος Minkowski*.

Για να γίνουν απλούστερες οι εκφράσεις που θα εμφανιστούν αργότερα, ξεκινάμε εισάγοντας έναν καινούργιο συμβολισμό για τις τετράδες πραγματικών αριθμών και διάφορους συνδυασμούς τους:

(i) Όπως η (x_1, x_2, x_3, x_4) , έτσι και η έκφραση (x^1, x^2, x^3, x^4) θα παριστάνει μια τυχαία τετράδα πραγματικών αριθμών και όχι την τετράδα που αποτελείται από την πρώτη, δεύτερη κ.λ.π. δύναμη του x .

(ii) Τα μικρά λατινικά γράμματα, $a, b, s, \dots, i, j, k, \dots$, θα χρησιμοποιούνται σαν πάνω και κάτω δείχτες που παίρνουν τις τιμές 1, 2, 3, και 4.

(iii) Υιοθετούμε την *σύμβαση Einstein*: Όταν σε μια έκφραση ένας δείκτης εμφανίζεται δυο φορές, μια πάνω και μια κάτω, τότε η δοσμένη έκφραση σημαίνει το άθροισμα των όρων που

προκύπτουν όταν ο δείκτης πάρει όλες τις δυνατές τιμές του. Να μερικά παραδείγματα χρήσης αυτής της σύμβασης:

$$(1.3\alpha) \quad T^a_a \equiv \sum_{a=1}^4 T^a_a = T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 + T^4_4,$$

$$(1.3\beta) \quad y_k x^k \equiv \sum_{k=1}^4 y_k x^k = y_1 x^1 + y_2 x^2 + y_3 x^3 + y_4 x^4,$$

$$(1.3\gamma) \quad \xi^j e_j \equiv \sum_{j=1}^4 \xi^j e_j = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3 + \xi^4 e_4,$$

$$(1.3\delta) \quad T^a_b x^b \equiv \sum_{b=1}^4 T^a_b x^b = T^a_1 x^1 + T^a_2 x^2 + T^a_3 x^3 + T^a_4 x^4,$$

$$(1.3\epsilon) \quad \eta_{jk} x^j y^k \equiv \sum_{j=1}^4 (\sum_{k=1}^4 \eta_{jk} x^j y^k) \\ = \sum_{j=1}^4 (\eta_{j1} x^j y^1 + \eta_{j2} x^j y^2 + \eta_{j3} x^j y^3 + \eta_{j4} x^j y^4) \\ = \eta_{11} x^1 y^1 + \eta_{21} x^2 y^1 + \eta_{31} x^3 y^1 + \eta_{41} x^4 y^1 \\ + \eta_{11} x^1 y^2 + \eta_{21} x^2 y^2 + \eta_{31} x^3 y^2 + \eta_{41} x^4 y^2 \\ + \eta_{11} x^1 y^3 + \eta_{21} x^2 y^3 + \eta_{31} x^3 y^3 + \eta_{41} x^4 y^3 \\ + \eta_{14} x^1 y^4 + \eta_{24} x^2 y^4 + \eta_{34} x^3 y^4 + \eta_{44} x^4 y^4.$$

Το τελευταίο παράδειγμα δείχνει καθαρά την οικονομία που επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της σύμβασης Einstein. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, σε αντίθεση με την εντύπωση που τυχόν δημιούργησε το προηγούμενο σύνολο παραδειγμάτων, οι δείκτες που τυχόν εμφανίζονται σε μια έκφραση δεν είναι υποχρεωμένοι να έχουν το ίδιο σύνολο τιμών. Συνακόλουθα, αν ο ελληνικός δείκτης λ περιορίζεται στις τιμές $\{1, 2, 3\}$, τότε

$$(1.4\alpha) \quad x^\lambda y_\lambda \equiv \sum_{\lambda=1}^3 x^\lambda y_\lambda = x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3,$$

$$(1.4\beta) \quad S^a_\lambda x^\lambda \equiv \sum_{\lambda=1}^3 S^a_\lambda x^\lambda = S^a_1 x^1 + S^a_2 x^2 + S^a_3 x^3.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4)$ είναι δύο τυχαίες διαταγμένες τετράδες πραγματικών αριθμών (στοιχεία του \mathbb{R}^4). Ως άθροισμά τους ορίζεται η τετράδα

$$(1.5) \quad \vec{x} + \vec{y} := (x^1 + y^1, x^2 + y^2, x^3 + y^3, x^4 + y^4).$$

Από την άλλη, ως γινόμενο του $\lambda \in \mathbb{R}$ με το στοιχείο $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ του \mathbb{R}^4 ορίζεται η τετράδα

$$(1.6) \quad \lambda \vec{x} := (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3, \lambda x^4).$$

Με αυτούς τους δύο ορισμούς το σύνολο \mathbb{R}^4 αποκτά τη δομή του *τετραδιάστατου διανυσματικού χώρου*. Τότε τα στοιχεία του ονομάζονται *διανύσματα*.

Αν στην παραπάνω δομή προσθέσουμε και την συνηθισμένη έννοια του εσωτερικού γινομένου των τυχαίων διανυσμάτων \vec{x} και \vec{y} , θα καταλήξουμε στο λεγόμενο *τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο*, E^4 . Θυμίζουμε ότι ως *εσωτερικό γινόμενο* των \vec{x} και \vec{y} ορίζεται ο αριθμός

$$(1.7) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} := x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4.$$

Συνήθως, και ο τετραδιάστατος Ευκλείδειος χώρος δηλώνεται με το ίδιο σύμβολο \mathbb{R}^4 που χρησιμοποιούμε για τον διανυσματικό χώρο των διαταγμένων τετράδων πραγματικών αριθμών. Εμείς προτιμάμε να το σύμβολο \mathbb{E}^4 για λόγους που θα γίνουν σαφέστατοι αμέσως πιο κάτω. Εδώ περιοριζόμαστε να σημειώσουμε ότι, χρησιμοποιώντας τη σύμβαση Einstein, μπορούμε να δώσουμε στην (1.7) την μορφή

$$(1.8) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} := \delta_{jk} x^j y^k,$$

όπου

$$(1.9) \quad \delta_{jk} := \begin{cases} 1, & \text{αν } j = k \\ 0, & \text{αν } j \neq k \end{cases}.$$

Το σύμβολο που ορίζεται από την (1.9) λέγεται **δέλτα του Kronecker**.

Με **μήκος του διανύσματος** $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ εννοούμε τον αριθμό

$$(1.10) \quad |\vec{x}| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}.$$

Συνεπώς,

$$(1.11) \quad |\vec{x}| = \sqrt{\delta_{jk} x^j x^k} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2}.$$

Για προφανείς λόγους, κάθε στοιχείο του \mathbb{E}^4 ονομάζεται και **σημείο** του Ευκλείδειου χώρου. Συνακόλουθα, ο αριθμός

$$(1.12) \quad d(\vec{x}, \vec{y}) := |\vec{x} - \vec{y}|$$

ονομάζεται **απόσταση των σημείων** \vec{x} και \vec{y} του \mathbb{E}^4 . Από την (1.11) αμέσως συνάγεται ότι

$$(1.13) \quad \begin{aligned} [d(\vec{x}, \vec{y})]^2 &= \delta_{jk} (x^j - y^j) (x^k - y^k) \\ &= (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 + (x^4 - y^4)^2 \\ &\equiv (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 + (\Delta x^4)^2. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι το τετράγωνο της Ευκλείδειας απόστασης δύο σημείων του \mathbb{R}^4 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως χαρακτηριστική της χωροχρονικής σχέσης δύο τυχαίων γεγονότων. Κι αυτό γιατί, αν θέσουμε

$$(1.14) \quad (x^1, x^2, x^3, x^4) := (x, y, z, w \equiv ct),$$

τότε η ποσότητα α , που ορίζεται στην (1.13) και είναι χαρακτηριστική της κατάστασης που επικρατεί στο χωρόχρονο, μπορεί να γραφτεί σαν

$$(1.15) \quad \alpha := (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 - (\Delta x^4)^2,$$

Αυτή διαφέρει ουσιαστικά από την (1. 13), λόγω του αρνητικού πρόσημου στον τελευταίο όρο. Εξαιτίας αυτού του πρόσημου η ποσότητα α μπορεί να παίρνει και αρνητικές τιμές, πράγμα που δεν ισχύει για την $[d(\vec{x}, \vec{y})]^2$.

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο να εισαγάγουμε ένα διαφορετικό εσωτερικό γινόμενο στο διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^4 , ένα εσωτερικό γινόμενο που ταιριάζει στη δομή των χωροχρονικών σχέσεων των στοιχειωδών γεγονότων. Προς αυτή την κατεύθυνση ξεκινάμε εισάγοντας το σύμβολο

$$(1. 16) \quad \eta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j = k = 1, 2, 3 \\ -1, & \text{αν } j = k = 4 \\ 0, & \text{αν } j \neq k \end{cases}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο Minkowski** των διανυσμάτων \vec{x} και \vec{y} του \mathbb{R}^4 τον πραγματικό αριθμό

$$(1. 17) \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_M \equiv \vec{x} \diamond \vec{y} \equiv \eta(\vec{x}, \vec{y}) := \eta_{jk} x^j y^k = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 - x^4 y^4.$$

Με αυτό το συμβολισμό η (1. 15) γίνεται

$$(1. 18) \quad \alpha(\vec{x}, \vec{y}) := \eta(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) \equiv \eta_{jk} (x^j - y^j) (x^k - y^k).$$

Μπορούμε, τώρα, να ορίσουμε ως χώρο Minkowski τον διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^4 εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο (1. 18). Ακριβέστερα, ως **χώρος Minkowski** ορίζεται το μαθηματικό σύνολο \mathbb{M} που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Επιδέχεται 1-1 (αμφιμονοσήμαντες) απεικονίσεις της μορφής $C: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$. Αυτές οι απεικονίσεις λέγονται **συστήματα συντεταγμένων** του \mathbb{M} .

(ii) Είναι εφοδιασμένο με μια συνάρτηση g που απεικονίζει κάθε ζευγάρι στοιχείων του, (γ_1, γ_2) , στους πραγματικούς αριθμούς. Αυτή η συνάρτηση $g: \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει ένα τουλάχιστον σύστημα συντεταγμένων, $C: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$, τέτοιο που, αν $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{M}$, και $\vec{x} = C(\gamma_1)$, $\vec{y} = C(\gamma_2)$, τότε

$$(1. 19) \quad g(\gamma_1, \gamma_2) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$$

Κάθε σύστημα αυτού του είδους ονομάζεται **συντεταγμένες Minkowski** του \mathbb{M} .

Ο χώρος Minkowski θα θεωρείται ως το μαθηματικό πρότυπο του συνόλου των πραγματικών και πιθανών απλών γεγονότων του φυσικού κόσμου και, για συντομία, θα αναφέρεται ως **χωρόχρονος (της Ειδικής Σχετικότητας)**. Κάθε σύστημα συντεταγμένων Minkowski, $C: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$, θα ερμηνεύεται ως η εικόνα που δίνει για το χωρόχρονο κάποιο ΑΣΑ Σ . Πιο συγκεκριμένα, για κάθε γεγονός $\gamma \in \mathbb{M}$ η τετράδα $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4) = C(\gamma)$ θα ταυτίζεται με την (x, y, z, w) , που θα έχει πάντα την ίδια ερμηνεία: (α) Τα τρία πρώτα στοιχεία της, (x, y, z) , παριστάνουν τις χωρικές συντεταγμένες του γ , σύμφωνα με το Καρτεσιανό σύστημα αξόνων του ΑΣΑ Σ και (β) Το τελευταίο στοιχείο, w , της παραπάνω τετράδας ταυτίζεται με τον αριθμό ct , όπου t η χρονική συντεταγμένη του γ , σύμφωνα με το χρονόμετρο (ρολόι) του ίδιου ΑΣΑ.

7.2 Μετασχηματισμοί Lorentz και Poincaré

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εισαγάγαμε τους ειδικούς μετασχηματισμούς Lorentz που ορίζονται από τους τύπους

$$(2.1) \quad x' = \gamma(x - \beta w), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad w' = \gamma(w - \beta x)$$

όπου

$$(2.2) \quad \beta := \frac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Αν, σύμφωνα με το συμβολισμό που μόλις υιοθετήσαμε, θέσουμε

$$(2.3) \quad (x, y, z, w) = (x^1, x^2, x^3, x^4),$$

$$(2.4) \quad (x', y', z', w') = (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'})$$

τότε οι τύποι (2.1) θα γίνουν

$$(2.5) \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^4), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = \gamma(x^4 - \beta x^1)$$

Με τη σειρά τους, οι τελευταίοι τύποι μπορούν να γραφτούν σαν

$$(2.6\alpha) \quad x^{1'} = L_1^1 x^1 + L_4^1 x^4, \quad L_1^1 = \gamma, \quad L_4^1 = -\beta\gamma,$$

$$(2.6\beta) \quad x^{2'} = L_2^2 x^2, \quad L_2^2 = 1,$$

$$(2.6\gamma) \quad x^{3'} = L_3^3 x^3, \quad L_3^3 = 1,$$

$$(2.6\delta) \quad x^{4'} = L_1^4 x^1 + L_4^4 x^4, \quad L_1^4 = -\beta\gamma, \quad L_4^4 = \gamma.$$

Αν, μάλιστα, εφαρμόσουμε τη σύμβαση Einstein, μπορούμε να εκφράσουμε και τις τέσσερες αυτές σχέσεις με τον πολύ συνοπτικό τρόπο

$$(2.7) \quad x^{j'} = L_m^j x^m$$

όπου οι λατινικοί δείχτες j, m παίρνουν τις τιμές 1, 2, 3, 4 και οι $4 \times 4 = 16$ συντελεστές L_m^j δίνονται από τον ακόλουθο πίνακα:

$$(2.8) \quad \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 & L_4^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 & L_4^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 & L_4^3 \\ L_1^4 & L_2^4 & L_3^4 & L_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Κι αυτό γιατί, όταν $j = 1$ γ.π., η (2.7) γίνεται

$$(2.9) \quad \begin{aligned} x^{1'} &= L^1_m x^m \equiv L^1_1 x^1 + L^1_2 x^2 + L^1_3 x^3 + L^1_4 x^4 \\ &= \gamma x^1 + 0 x^2 + 0 x^3 + (-\beta \gamma) x^4 = \gamma(x^1 - \beta x^4) \end{aligned}$$

Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει, οι ειδικοί μετασχηματισμοί Lorentz διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο Minkowski. Αν, δηλαδή, $x^{j'} = L^j_m x^m$ και $y^{j'} = L^j_m y^m$, τότε

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \eta(\vec{x}', \vec{y}') &= \eta(\vec{x}, \vec{y}) \Leftrightarrow \eta_{jk} x^{j'} y^{k'} = \eta_{jk} x^j y^k \\ \Leftrightarrow x^{1'} y^{1'} + x^{2'} y^{2'} + x^{3'} y^{3'} - x^{4'} y^{4'} &= x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 - x^4 y^4. \end{aligned}$$

Με βάση αυτή την παρατήρηση, ορίζουμε ως **(γενικό) μετασχηματισμό Lorentz** κάθε αντιστρέψιμο μετασχηματισμό της μορφής (2.7) που έχει την ιδιότητα (2.10).

Σημειώστε ότι η αντικατάσταση των $x^{j'} = L^j_m x^m$, $y^{k'} = L^k_n y^n$ στη σχέση $\eta_{jk} x^{j'} y^{k'} = \eta_{jk} x^j y^k$ την μετατρέπει στην

$$(2.11) \quad \eta_{jk} L^j_m x^m L^k_n y^n = \eta_{jk} x^j y^k$$

Για να εξαγάγουμε συμπεράσματα από σχέσεις αυτής της μορφής, συνήθως αλλάζουμε τη σειρά ορισμένων παραγόντων και τα σύμβολα ορισμένων από τους επαναλαμβανόμενους (αθροιζόμενους) δείκτες. Η (2.11) γ.π. είναι ταυτόσημη με την

$$(2.12) \quad \eta_{jk} L^j_m L^k_n x^m y^n = \eta_{mn} x^m y^n$$

Η τελευταία σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων \vec{x}, \vec{y} . Αν γ.π. $\vec{x} = \vec{y} = (1, 0, 0, 0)$, τότε η (2.12) γίνεται $\eta_{jk} L^j_1 L^k_1 = \eta_{11}$. Αν πάλι $\vec{x} = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{y} = (0, 1, 0, 0)$, τότε η (2.12) γίνεται $\eta_{jk} L^j_1 L^k_2 = \eta_{12}$. Συνεπώς, η (2.12) θα ισχύει για κάθε ζευγάρι διανυσμάτων \vec{x}, \vec{y} εάν και μόνο όταν τηρείται η συνθήκη

$$(2.13) \quad \boxed{\eta_{jk} L^j_m L^k_n = \eta_{mn}}$$

Συνακόλουθα, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τη συνθήκη (2.13) σαν αυτή που ορίζει τη γενική μορφή ενός μετασχηματισμού Lorentz $L: x^j \rightarrow x^{j'} = L^j_k x^k$.

Σημειώστε, τώρα, ότι από τον ορισμό τους, (1.16), οι ποσότητες η_{jk} μπορούν να θεωρηθούν ως τα στοιχεία ενός διαγώνιου 4×4 πίνακα:

$$(2.14) \quad \eta = (\eta_{jk}) = \text{διαγ}(1, 1, 1, -1) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Από την άλλη, αν συμβολίσουμε με L τον 4×4 πίνακα (L^j_k) , τότε ο *ανάστροφος του L* είναι ο 4×4 πίνακας $L^T = (L^T_k{}^j)$, όπου

$$(2.15) \quad L^T_k{}^j = L^j_k.$$

Για παράδειγμα, $L^T_1{}^2 = L^2_1$. Συνεπώς, η συνθήκη (2.13) γράφεται σαν

$$(2.16) \quad L^T_m{}^j \eta_{jk} L^k_n = \eta_{mn} \Leftrightarrow L^T \eta L = \eta.$$

Θυμίζουμε ότι για την ορίζουσα του γινόμενου δύο τετραγωνικών πινάκων ισχύει ότι

$$(2.17) \quad \det(A B) = \det(A) \det(B)$$

και $\det(A^T) = \det(A)$. Από την άλλη είναι προφανές ότι

$$(2.18) \quad \det(\eta) = -1.$$

Άρα η σχέση (2. 16) συνεπάγεται ότι

$$(2.19) \quad [\det(L)]^2 = 1, \Leftrightarrow \det(L) = \pm 1.$$

Ένας μετασχηματισμός Lorentz $L: x^j \rightarrow x^{j'} = L^j_k x^k$ του οποίου ο αντίστοιχος πίνακας $L = (L^j_k)$ έχει ορίζουσα ίση με τη μονάδα λέγεται *κανονικός*. Για παράδειγμα, κάθε ειδικός μετασχηματισμός Lorentz της μορφής (2. 8) είναι κανονικός. Το ίδιο ισχύει και για τους μετασχηματισμούς για τους οποίους οι αντίστοιχοι πίνακες έχουν μια από τις ακόλουθες μορφές:

$$(2.20) \quad \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 & L^1_3 & L^1_4 \\ L^2_1 & L^2_2 & L^2_3 & L^2_4 \\ L^3_1 & L^3_2 & L^3_3 & L^3_4 \\ L^4_1 & L^4_2 & L^4_3 & L^4_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta\gamma & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$(2.21) \quad \begin{pmatrix} L^1_1 & L^1_2 & L^1_3 & L^1_4 \\ L^2_1 & L^2_2 & L^2_3 & L^2_4 \\ L^3_1 & L^3_2 & L^3_3 & L^3_4 \\ L^4_1 & L^4_2 & L^4_3 & L^4_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Θα πρέπει να είναι φανερό ότι οι πίνακες (2. 20) και (2. 21) παριστάνουν τη μετάβαση από το ΑΣΑ Σ σε κάποιο άλλο ΑΣΑ Σ' το οποίο κινείται με ταχύτητα $V = \beta c$ στην κατεύθυνση του άξονα y και z , αντίστοιχα.

Το υποσύνολο των μετασχηματισμών Lorentz που αποτελείται από τους κανονικούς μετασχηματισμούς θα συμβολίζεται με L_+ και το υποσύνολο των μη κανονικών με L_- . Κάνοντας κατάχρηση του σύμβολου L , θα το χρησιμοποιούμε και για να δηλώνουμε ολόκληρο το σύνολο των μετασχηματισμών Lorentz. Προφανώς, $L = L_+ \cup L_-$, $L_+ \cap L_- = \emptyset$.

Η εξίσωση (2. 13) αποτελεί συντομογραφία $4 \times 4 = 16$ εξισώσεων για τα 16 στοιχεία του πίνακα L . Ωστόσο, μόνο δέκα (10) από αυτές τις εξισώσεις είναι ανεξάρτητες, γιατί ο πίνακας η είναι συμμετρικός: $\eta_{jk} = \eta_{kj}$. Συνεπώς, μόνο δέκα από τα 16 στοιχεία του πίνακα L μπορούν να προσδιοριστούν από τις παραπάνω εξισώσεις. Τα υπόλοιπα έξι μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα. Ισοδύναμα, και τα 16 στοιχεία του πίνακα L μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις έξι αυθαίρετων παραμέτρων. Επειδή από την άλλη μεριά όλοι μαζί οι μετασχηματισμοί Lorentz

αποτελούν ομάδα -με την αλγεβρική έννοια αυτού του όρου- και το ίδιο ισχύει για το σύνολο L των αντίστοιχων πινάκων, λέμε ότι η ομάδα Lorentz είναι εξαδιάστατη.

Οι έξι παράμετροι που υπεισέρχονται στην κατασκευή των πινάκων L μπορούν να επιλεγούν με τρόπο ώστε να έχουν και άμεση φυσική σημασία. Έτσι, τρεις απ' αυτές μπορεί να είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας \vec{V} του ΑΣΑ Σ' ως προς το Σ . Γιατί, θα πρέπει να είναι φανερό ότι οι γενικοί μετασχηματισμοί Lorentz καλύπτουν και αυτή τη γενικότερη περίπτωση για τη σχετική κίνηση των δύο ΑΣΑ που χρησιμοποιούν τα χωροχρονικά συστήματα συντεταγμένων (x^1, x^2, x^3, x^4) και $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'})$.

Από την άλλη μεριά, εύκολα διαπιστώνεται ότι και πίνακες σαν τους επόμενους τρεις σέβονται την συνθήκη (2. 13):

$$(2. 22) \quad \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 & L_4^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 & L_4^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 & L_4^3 \\ L_1^4 & L_2^4 & L_3^4 & L_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2. 23) \quad \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 & L_4^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 & L_4^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 & L_4^3 \\ L_1^4 & L_2^4 & L_3^4 & L_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2. 24) \quad \begin{pmatrix} L_1^1 & L_2^1 & L_3^1 & L_4^1 \\ L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 & L_4^2 \\ L_1^3 & L_2^3 & L_3^3 & L_4^3 \\ L_1^4 & L_2^4 & L_3^4 & L_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω πίνακες αντιστοιχούν στην περίπτωση που τα ΑΣΑ Σ και Σ' είναι ουσιαστικά τα ίδια και η μόνη διαφορά τους έγκειται στο ότι οι Καρτεσιανοί χωρικοί άξονες $x^{1'} x^{2'} x^{3'} \equiv x' y' z'$ προκύπτουν από τους $x^1 x^2 x^3 \equiv x y z$ με στροφή κατά γωνία φ γύρω από τους άξονες x , y και z , αντίστοιχα. Συνακόλουθα, οι άλλες τρεις παράμετροι που καθορίζουν τους πίνακες L μπορούν να επιλεγούν να είναι οι τρεις γωνίες που ορίζουν τη σχέση ενός Καρτεσιανού συστήματος αξόνων του Ευκλείδειου χώρου προς ένα άλλο που έχει κοινή αρχή με το πρώτο.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τα τυχαία διανύσματα $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4)$. Κατά το μετασχηματισμό Lorentz L , αυτά μετατρέπονται στα \vec{x}' και \vec{y}' , αντίστοιχα, όπου $x^{j'} = L^j_k x^k$ και $y^{j'} = L^j_k y^k$. Συνεπώς,

$$(2.25) \quad y^{j'} - x^{j'} = L^j_k y^k - L^j_k x^k = L^j_k (y^k - x^k).$$

Ισοδύναμα,

$$(2.26) \quad \Delta x^{j'} = L^j_k \Delta x^k, \quad \Delta x^k := y^k - x^k.$$

Από αυτή τη σχέση και το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο Minkowski αμέσως έπεται ότι

$$(2.27) \quad \eta_{jk} \Delta x^{j'} \Delta x^{k'} = \eta_{jk} \Delta x^j \Delta x^k \Leftrightarrow \alpha(\vec{x}', \vec{y}') = \alpha(\vec{x}, \vec{y}).$$

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι τα διανύσματα \vec{x}' και \vec{y}' προκύπτουν, αντίστοιχα, από τα $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ και $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4)$, σύμφωνα με το μετασχηματισμό

$$(2.28) \quad x^{j'} = L^j_k x^k + a^j, \quad y^{j'} = L^j_k y^k + a^j$$

όπου $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3, a^4)$ ένα συγκεκριμένο στοιχείο του \mathbb{R}^4 . Τότε

$$(2.29) \quad y^{j'} - x^{j'} = (L^j_k y^k + a^j) - (L^j_k x^k + a^j) = L^j_k (y^k - x^k)$$

και, κατά συνέπεια, ισχύει και πάλι η (2.27).

Οι απεικονίσεις της μορφής

$$(2.30) \quad P: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \vec{x}' = P(\vec{x}), \quad x^{j'} = L^j_k x^k + a^j$$

ονομάζονται **μετασχηματισμοί Poincaré** (Πουανκαρέ) και είναι οι πιο γενικοί μετασχηματισμοί του χώρου Minkowski, με την έννοια ότι είναι οι γενικότερες 1-1 απεικονίσεις του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^4 στον εαυτό του που διατηρούν αναλλοίωτη τη χαρακτηριστική ποσότητα $\alpha(\vec{x}, \vec{y})$.

7.3 Ταξινόμηση τετραδιανυσμάτων

Το τυχαίο (τετρα-)διάνυσμα $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ παριστάνει, όπως είπαμε, τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος ή στοιχείου του χώρου Minkowski, ας πούμε του γ_1 , ως προς κάποιο ΑΣΑ Σ . Αν με τη σειρά του το διάνυσμα $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4)$ δίνει τις συντεταγμένες του γεγονότος γ_2 , τότε το διάνυσμα $\vec{z} := \vec{y} - \vec{x}$ συνδέει την εικόνα του γ_1 στο χωροχρονικό διάγραμμα του ΑΣΑ Σ με την εικόνα του γ_2 . Συνακόλουθα, η ταξινόμηση του χωροχρονικού διαστήματος που χωρίζει τα γεγονότα γ_1 και γ_2 μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το διάνυσμα \vec{z} που, ας σημειωθεί, μπορεί να παριστάνεται και με $\Delta \vec{x}$.

Με βάση, λοιπόν, το συμβολισμό που υιοθετήσαμε στα προηγούμενα δυο εδάφια, το τυχαίο διάνυσμα \vec{z} θα λέγεται

(i) **Χρονικού τύπου**, ή **χρονοειδές**, αν $\eta(\vec{z}, \vec{z}) < 0$,

(ii) **Χωρικού τύπου**, ή **χωροειδές**, αν $\eta(\vec{z}, \vec{z}) > 0$, και

(iii) **Φωτονιακού τύπου**, ή **φωτοειδές**, αν $\eta(\vec{z}, \vec{z}) = 0$.

Τονίζουμε ότι *οι παραπάνω χαρακτηρισμοί είναι απόλυτοι*, δηλαδή ανεξάρτητοι από το ΑΣΑ που χρησιμοποιείται κάθε φορά για τον υπολογισμό του αριθμού $\eta(\vec{z}, \vec{z})$. Κι αυτό, βέβαια, γιατί το εσωτερικό γινόμενο Minkowski δύο (τετρα-)διανυσμάτων είναι ανεξάρτητο από το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων Minkowski που τυχόν χρησιμοποιούμε για ν' απεικονίζουμε τον χωρόχρονο \mathbb{M} (\equiv είναι αναλλοίωτο ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz).

Το σύνολο των φωτειδών διανυσμάτων που έχουν βάση το σημείο \vec{x} (το γεγονός γ_1) ονομάζεται *κώνος φωτός του \vec{x}* και συμβολίζεται με $K_{\vec{x}}$. Έτσι,

$$(3.1) \quad K(\vec{x}) := \{ \vec{y} \in \mathbb{M} : \eta_{jk}(y^j - x^j)(y^k - x^k) = 0 \}.$$

Τα σημεία του $K(\vec{x})$ με $y^4 - x^4 > 0$ αποτελούν τον *μέλλοντα* ή *μελλοντικό κώνο φωτός του \vec{x}* , $K^+(\vec{x})$. Ανάλογα, τα σημεία του $K(\vec{x})$ με $y^4 - x^4 < 0$ αποτελούν τον *παρελθόντα κώνο φωτός του \vec{x}* , $K^-(\vec{x})$.

Ως *εσωτερικό του κώνου φωτός $K(\vec{x})$* θεωρούμε το σύνολο των σημείων \vec{y} του \mathbb{M} που έχουν χρονικού τύπου απόσταση από το σημείο \vec{x} , δηλαδή τα σημεία για τα οποία $\eta_{jk}(y^j - x^j)(y^k - x^k) < 0$.

Ανάλογα, ως *εξωτερικό του κώνου φωτός $K(\vec{x})$* θεωρούμε το σύνολο των σημείων \vec{y} του \mathbb{M} που έχουν χωρικού τύπου απόσταση από το σημείο \vec{x} , δηλαδή τα σημεία για τα οποία $\eta_{jk}(y^j - x^j)(y^k - x^k) > 0$.

Το εξωτερικό του κώνου $K(\vec{x})$ αναφέρεται και με το όνομα *το αλλού του γεγονότος γ_1* . *Μέλλον του γεγονότος γ_1* , $F(\vec{x})$, ονομάζεται η ένωση του μέλλοντα κώνου $K^+(\vec{x})$ με τμήμα του χωρόχρονου που περιέχεται στον $K^+(\vec{x})$. Με άλλα λόγια,

$$(3.2) \quad F(\vec{x}) := \{ \vec{y} \in \mathbb{M} : \eta_{jk}(y^j - x^j)(y^k - x^k) \leq 0, y^4 - x^4 > 0 \}.$$

Αντίστοιχα, *παρελθόν του γεγονότος γ_1* , $P(\vec{x})$, ονομάζεται η ένωση του παρελθόντα κώνου $K^-(\vec{x})$ με το τμήμα του χωρόχρονου που περιέχεται σ' αυτόν. Με άλλα λόγια,

$$(3.3) \quad P(\vec{x}) := \{ \vec{y} \in \mathbb{M} : \eta_{jk}(y^j - x^j)(y^k - x^k) \leq 0, y^4 - x^4 < 0 \}.$$

7. 4 Τα τετραδιανύσματα της ταχύτητας και της ορμής-ενέργειας

Ας υποθέσουμε ότι τα (τετρα-)διανύσματα $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3, y^4)$ που αντιστοιχούν στα γεγονότα γ_1 και γ_2 είναι τέτοια που το συνδετικό τους διάνυσμα $\Delta \vec{x} := \vec{y} - \vec{x}$ είναι χρονικού τύπου, δηλαδή ότι

$$(4.1) \quad \eta(\Delta \vec{x}, \Delta \vec{x}) \equiv \eta_{jk} \Delta x^j \Delta x^k \equiv (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta w)^2 < 0,$$

και ανήκει στο μέλλον του γεγονότος γ_1 . Τότε μπορούμε να εισαγάγουμε την ποσότητα

$$(4.2) \quad \Delta \tau := \frac{1}{c} \sqrt{(\Delta w)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]}$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Έχει τη διάσταση του χρόνου,

(ii) Η τιμή της είναι ανεξάρτητη από το ΑΣΑ που δίνει τις χωροχρονικές συντεταγμένες των γεγονότων γ_1 και γ_2 ,

(iii) Είναι ίση με τη χρονική απόσταση των γ_1 και γ_2 στο ΑΣΑ όπου αυτά τα γεγονότα είναι ταυτόχρονα.

Συνακόλουθα, το τετραδιάνυσμα $\vec{u} := \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta \tau}$ έχει τη διάσταση της ταχύτητας. Μπορεί, μάλιστα, να θεωρηθεί ως το κατάλληλο διάνυσμα για την περιγραφή της κίνησης ενός σωματίου σ από το σημείο \vec{x} του χωρόχρονου στο σημείο \vec{y} . Με άλλα λόγια, είναι κατάλληλο για να περιγράψουμε την ομαλή κίνηση του σ από το χωρικό σημείο (x^1, x^2, x^3) στο χωρικό σημείο (y^1, y^2, y^3) μέσα στο χρονικό διάστημα $(y^4/c) \leq t \leq (x^4/c)$. Κι αυτό γιατί η περιγραφή της κίνησης του σ μέσω του διανύσματος \vec{u} μπορεί να μετατραπεί αυτόματα στην περιγραφή της ίδιας κίνησης από τη σκοπιά οποιουδήποτε άλλου ΑΣΑ.

Πιο συγκεκριμένα, αν στο ΑΣΑ Σ' το διάνυσμα που συνδέει τα γεγονότα γ_1 και γ_2 είναι το $\Delta \vec{x}'$, τότε $\Delta x^{j'} = L^j_k \Delta x^k$ και άρα

$$(4.3) \quad u^{j'} := \frac{\Delta x^{j'}}{\Delta \tau} = L^j_k \frac{\Delta x^k}{\Delta \tau} \equiv L^j_k u^k$$

Για να δούμε αναλυτικότερα τη σχέση του τετραδιανύσματος \vec{u} με το (τρις-)διάνυσμα της συνήθους ταχύτητας του σωματίου σ , ας ονομάσουμε το τελευταίο \mathbf{v} κι ας θυμηθούμε ότι

$$(4.4) \quad \mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3) := \left(\frac{\Delta x^1}{\Delta t}, \frac{\Delta x^2}{\Delta t}, \frac{\Delta x^3}{\Delta t} \right) \equiv \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$$

Συνακόλουθα,

$$(4.5) \quad \Delta x = v^1 \Delta t, \quad \Delta y = v^2 \Delta t, \quad \Delta z = v^3 \Delta t,$$

και η (4.2) γίνεται

$$(4.6) \quad \Delta \tau = \frac{1}{c} \sqrt{(c \Delta t)^2 - [(v^1 \Delta t)^2 + (v^2 \Delta t)^2 + (v^3 \Delta t)^2]} \\ = \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2]} \equiv \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} |\mathbf{v}|^2}$$

Για ευκολία, αυτή τη σχέση θα τη γράφουμε σαν

$$(4.7) \quad \Delta t = \gamma(v) \Delta \tau, \quad \gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \mathbf{v} := |\mathbf{v}|.$$

Έτσι, η **τετρα-ταχύτητα** του σ μπορεί να γραφτεί σαν

$$(4.8) \quad \vec{u} \equiv \left(\frac{\Delta x^1}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x^2}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x^3}{\Delta \tau}, \frac{\Delta x^4}{\Delta \tau} \right) \equiv \left(\frac{\Delta x}{\Delta \tau}, \frac{\Delta y}{\Delta \tau}, \frac{\Delta z}{\Delta \tau}, \frac{c \Delta t}{\Delta \tau} \right) \\ = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{c \Delta t}{\Delta \tau} \right) \\ = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \gamma(v), \frac{\Delta y}{\Delta t} \gamma(v), \frac{\Delta z}{\Delta t} \gamma(v), c \gamma(v) \right).$$

Ισοδύναμα,

$$(4.9) \quad \vec{u} = \gamma(v) (\mathbf{v}, c)$$

Με άλλα λόγια, οι τρεις χωρικές συνιστώσες του 4-διανύσματος \vec{u} συναποτελούν το 3-διάνυσμα της συνήθους ταχύτητας, \mathbf{v} , πολλαπλασιασμένο με το συντελεστή $\gamma(v)$. Σύμφωνα με την (4.7), ο συντελεστής $\gamma(v)$ εκφράζει τη σχέση του χρονικού διαστήματος Δt που χρειάστηκε το σωματίο για να καλύψει την απόσταση $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ προς τον αντίστοιχο ιδιοχρονικό διάστημα $\Delta \tau$. Τέλος, η τέταρτη συνιστώσα του \vec{u} μας δίνει ουσιαστικά το λόγο $(\Delta t / \Delta \tau)$, δηλαδή το ρυθμό με τον οποίο αλλάζει η χρονική συντεταγμένη t συγκριτικά με τον ιδιόχρονο.

Στο πλαίσιο της Νευτωνικής Μηχανικής, ορίσαμε ως ορμή ενός σωματίου μάζας m που κινείται με σταθερή ταχύτητα \mathbf{v} το διάνυσμα

$$(4.10) \quad \mathbf{p} := m\mathbf{v}$$

Κατ' αναλογία, ορίζουμε το διάνυσμα

$$(4.11) \quad \vec{p} := m\vec{u},$$

και το ονομάζουμε **(τετρα-) διάνυσμα ορμής-ενέργειας**, για τους λόγους που θα διευκρινιστούν αμέσως. Από την (4.9) έπεται ότι

$$(4.12) \quad \vec{p} = m\gamma(v) (\mathbf{v}, c)$$

Συνακόλουθα οι τρεις χωρικές συνιστώσες του 4-διανύσματος \vec{p} απλώς συναποτελούν το πολλαπλάσιο $\gamma(v) \mathbf{p}$ του συνήθους διανύσματος της ορμής. Αντίθετα, η χρονική συνιστώσα του \vec{p} είναι ίση με $p^4 = mc\gamma(v)$, που δε φαίνεται να έχει άμεση φυσική σημασία.

Ωστόσο, η ποσότητα

$$(4.13) \quad E := c p^4 = m c^2 \gamma(v)$$

έχει δυο αξιοσημείωτες ιδιότητες:

(α) Έχει τη διάσταση της ενέργειας, αφού $(\text{μάζα}) \times (\text{ταχύτητα})^2 = \text{gr} \cdot (\text{cm/sec})^2 \equiv \text{erg}$.

(β) Από το γεγονός ότι

$$(4.14) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + O(x^4) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2} x^2, \quad \text{όταν } |x| \ll 1,$$

έπεται ότι

$$(4.15) \quad E = m c^2 \gamma(v) = \frac{m c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m v^2, \quad \text{όταν } \frac{v}{c} \ll 1.$$

Η τελευταία έκφραση σημαίνει ότι, στην περίπτωση που η ταχύτητα του σωματίου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό, η ποσότητα E ανάγεται στη συνήθη κινητική του ενέργεια, $\frac{1}{2} m v^2$, συν ένα ποσό ενέργειας $m c^2$ που δεν εξαρτιέται από την ταχύτητα του σωματίου.

Αυτές οι ιδιότητες, σε συνδυασμό με τα συμπεράσματα από τη σχετικιστική μηχανική που θα εξετάσουμε στο μεθεπόμενο εδάφιο, μας ωθούν στο να ονομάσουμε την ποσότητα E *ενέργεια του (ελεύθερου) σωματίου* και αποτελούν τη βάση για την ονομασία του 4-διανύσματος \vec{u} .

Αν, για να τονίσουμε την εξάρτησή της από την ταχύτητα, ξαναγράψουμε την ενέργεια του σωματίου στη μορφή

$$(4.16) \quad E(v) = m c^2 \gamma(v)$$

τότε θα παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα $m c^2$ αποτελεί την τιμή της συνάρτησης $E(v)$ όταν η ταχύτητα είναι μηδενική:

$$(4.17) \quad E_0 := E(0) = m c^2$$

Γι αυτό η ποσότητα $m c^2$ ονομάζεται και *ενέργεια ηρεμίας ενός σωματίου μάζας m* . Η (4.17) είναι η περίφημη και, συνήθως, κακώς εννοούμενη "σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα στη μάζα και την ενέργεια ενός σώματος".

Θα πρέπει τώρα να σημειωθεί ότι, όταν αλλάζει το ΑΣΑ που περιγράφει την κίνηση ενός σωματίου σ , αλλάζουν και οι συνιστώσες του 4-διανύσματος της ταχύτητας του σ , \vec{u} , σύμφωνα με τον τύπο (4.3). Ωστόσο, το εσωτερικό γινόμενο Minkowski του \vec{u} με τον εαυτό του παραμένει αμετάβλητο και ίσο με

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \eta(\vec{u}, \vec{u}) &\equiv \eta_{jk} u^j u^k \equiv \eta_{jk} \frac{\Delta x^j}{\Delta \tau} \frac{\Delta x^k}{\Delta \tau} = \frac{\eta_{jk} \Delta x^j \Delta x^k}{(\Delta \tau)^2} \\ &= \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta w)^2}{(\Delta \tau)^2} \end{aligned}$$

Αλλά σύμφωνα με τον ορισμό (4.2) του $\Delta \tau$,

$$(4.19) \quad (\Delta \tau)^2 = \frac{1}{c^2} \{ (\Delta w)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \}$$

Άρα η (4.18) γίνεται

$$(4.20) \quad \eta(\vec{u}, \vec{u}) \equiv \eta_{jk} u^j u^k = -c^2$$

Αυτή η σχέση και ο ορισμός του διανύσματος ορμής-ενέργειας συνεπάγονται αμέσως ότι

$$(4.21) \quad \eta(\vec{p}, \vec{p}) \equiv \eta_{jk} p^j p^k = -m^2 c^2.$$

Αν γράψουμε την τελευταία σχέση αναλυτικά και χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της ενέργειας, E , θα καταλήξουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(4.22) \quad (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2.$$

Ισοδύναμα,

$$(4.23) \quad E = c \sqrt{m^2 c^2 + |\mathbf{P}|^2}, \quad \mathbf{P} := (p^1, p^2, p^3).$$

Η επαλήθευση του ισχυρισμού ότι η τελευταία σχέση δεν είναι άλλη από την (4.19) αποτελεί απλή άσκηση.

Η σχέση (4. 23) φαίνεται να έχει νόημα, ακόμα και όταν $m = 0$. Αυτό, βέβαια, προϋποθέτει ότι μπορούμε να ορίσουμε του διάνυσμα \mathbf{P} με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για ένα έμμαζο σωματίο. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα άμαζο σωματίο σαν το φωτόνιο το οποίο κινείται στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n} . Αν το σωματίο αντιστοιχεί σε ακτινοβολία συχνότητας ν , τότε ως ενέργειά του ορίζουμε την ποσότητα

$$(4. 24) \quad E := h \nu$$

και ως ορμή το τρισδιάνυσμα

$$(4. 25) \quad \mathbf{P} := \frac{h\nu}{c} \mathbf{n}.$$

Αυτούς τους ορισμούς, όπου το h είναι η σταθερή (του) Planck, συνήθως τους συναντάμε στη μορφή

$$(4. 26) \quad E = \hbar \omega,$$

$$(4. 27) \quad \mathbf{P} = \hbar \mathbf{k}.$$

Τούτες οι εκφράσεις προκύπτουν από τις (4. 24) και (4. 25), αντίστοιχα, αν θέσουμε

$$(4. 28) \quad \hbar := \frac{h}{2\pi}, \quad \omega := 2\pi\nu,$$

και

$$(4. 29) \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}.$$

(βλ. Κεφ. 5, εδάφ. 6).

Κατά συνέπεια, ως **4-διάνυσμα ορμής-ενέργειας ενός άμαζου σωματίου το οποίο αντιστοιχεί σε ακτινοβολία συχνότητας ν** ορίζεται το

$$(4. 30) \quad \vec{p} \equiv (p^1, p^2, p^3, p^4) := (\hbar \mathbf{k}, \hbar\omega / c).$$

Σημειώστε ότι από την (4. 29) αμέσως έπεται ότι

$$(4. 31) \quad |\mathbf{k}| = \omega / c.$$

Συνακόλουθα,

$$(4. 32) \quad \eta(\vec{p}, \vec{p}_\varphi) \equiv \eta_{jk} p^j p^k = 0.$$

7. 5 Κοσμικές καμπύλες

Στο προηγούμενο εδάφιο ορίσαμε τα 4-διανύσματα της ταχύτητας και της ορμής-ενέργειας ενός σωματίου σ , υποθέτοντας ότι το σ εκτελεί ομαλή κίνηση. Ωστόσο, οι παραπάνω έννοιες επιδέχονται άμεση γενίκευση, έτσι ώστε να καλύψουν και τη γενικότερη περίπτωση όπου η ταχύτητα του σωματίου δεν παραμένει σταθερή. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να αντικαταστήσουμε στους προηγούμενους ορισμούς την ταχύτητα από τη στιγμιαία ταχύτητα του σωματίου.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι, ως προς το ΑΣΑ Σ , το οποίο χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες Minkowski $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, w \equiv ct)$, το σωματίο σ διαγράφει μια τροχιά που ορίζεται από τις εξισώσεις

$$(5.1) \quad x^1 \equiv x = f(t), \quad x^2 \equiv y = g(t), \quad x^3 \equiv z = h(t)$$

όπου $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ δοσμένες συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο χρονικό διάστημα I . Όπως γνωρίζουμε, η (στιγμιαία) ταχύτητα του σ ορίζεται από το διάνυσμα

$$(5.2) \quad \mathbf{v}(t) \equiv (v^1(t), v^2(t), v^3(t)) := (\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t)),$$

όπου $\dot{f}(t)$ η παράγωγος $(df/dt)(t)$ της $f(t)$, κι όμοια για τις $g(t)$ και $h(t)$. Ανάλογα, ως (στιγμιαία) επιτάχυνση του ορίζεται το διάνυσμα

$$(5.3) \quad \mathbf{a}(t) \equiv (a^1(t), a^2(t), a^3(t)) := (\ddot{f}(t), \ddot{g}(t), \ddot{h}(t)),$$

όπου $\ddot{f}(t) \equiv (d^2 f / dt^2)(t) = (dv^1 / dt)(t)$ κλπ.

Στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης που εξετάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η ταχύτητα του σωματίου ήταν σταθερή. Συνεπώς, η (5.2) ήταν της μορφής

$$(5.4) \quad \mathbf{v}(t) := (\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t)) = \text{σταθ.} = (v^1, v^2, v^3).$$

Συνακόλουθα, οι εξισώσεις της τροχιάς (5.1) είχαν τη μορφή

$$(5.5\alpha) \quad x^1 = f(t) = x^1_0 + v^1 t,$$

$$(5.5\beta) \quad x^2 = g(t) = x^2_0 + v^2 t,$$

$$(5.5\gamma) \quad x^3 = h(t) = x^3_0 + v^3 t.$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η $T : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ομαλή συνάρτηση με την ιδιότητα ότι

$$(5.6) \quad \dot{T}(t) = \frac{1}{\gamma(v)} \equiv \sqrt{1 - (|\mathbf{v}|/c)^2}.$$

Τότε

$$(5.7) \quad T(t) = T_0 + \frac{1}{\gamma(v)} t,$$

όπου T_0 τυχαία σταθερή. Αν, λοιπόν, παραστήσουμε με τ τις τιμές της συνάρτησης $T : I \rightarrow \mathbb{R}$, αν δηλαδή θέσουμε

$$(5.8) \quad \tau = T(t) = T_0 + \frac{1}{\gamma(v)} t,$$

τότε θα έχουμε τη σχέση

$$(5.9) \quad \Delta\tau = \frac{1}{\gamma(v)} \Delta t.$$

Η (5.9) είναι ταυτόσημη με την (4.7), η οποία περιγράφει την σχέση των διαστημάτων του ιδιόχρονου προς τα χρονικά διαστήματα που καταγράφει το ρολόι του ΑΣΑ Σ .

Αν στηριχτούμε στην (5. 8) για να εκφράσουμε τη χρονική παράμετρο t ως συνάρτηση της νέας χρονικής παραμέτρου τ , θα καταλήξουμε στην έκφραση

$$(5. 10) \quad t = \Psi(\tau) = \Psi_0 + \gamma(\mathbf{v}) \tau$$

όπου Ψ_0 τυχαία σταθερή. Για ευκολία, μπορούμε να θέσουμε $T_0 = \Psi_0 = 0$, έτσι που οι χρονικές παράμετροι t και τ να μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Στη συνέχεια, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (5. 10) στις εξισώσεις της τροχιάς

(5. 5) και να γράψουμε το αποτέλεσμα μαζί με την (5. 10) στη μορφή

$$(5. 11) \quad \begin{aligned} x^1 &= F(\tau) = f(\Psi(\tau)) = x^1_0 + v^1 \gamma(\mathbf{v}) \tau, \\ x^2 &= G(\tau) = g(\Psi(\tau)) = x^2_0 + v^2 \gamma(\mathbf{v}) \tau \\ x^3 &= H(\tau) = h(\Psi(\tau)) = x^3_0 + v^3 \gamma(\mathbf{v}) \tau \\ x^4 &\equiv ct = \Phi(\tau) = \gamma(\mathbf{v}) c \tau. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την κοσμική γραμμή του σωμάτιου σ με βάση την ιδιοχρονική παράμετρο τ .

Τέλος, το διάνυσμα που ορίζεται από τις παραγώγους των συναρτήσεων $F(\tau)$, $G(\tau)$, $H(\tau)$ και $\Phi(\tau)$ δεν είναι άλλο από το 4-διάνυσμα της ταχύτητας του σ :

$$(5. 12) \quad \vec{u} := (\dot{F}(\tau), \dot{G}(\tau), \dot{H}(\tau), \dot{\Phi}(\tau)) = \gamma(\mathbf{v}) (\mathbf{v}, c)$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί κατά γράμμα και στην γενικότερη περίπτωση που οι εξισώσεις της τροχιάς δεν είναι γραμμικές, δηλαδή της μορφής (5. 5). Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε το σταθερό διάνυσμα \mathbf{v} από τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v}(t)$ που ορίζεται από την (5. 2). Για παράδειγμα, η εξίσωση (5. 6) αντικαθίσταται από την

$$(5. 13) \quad \dot{T}(t) = \frac{1}{\gamma(\mathbf{v}(t))} \equiv \sqrt{1 - (|\mathbf{v}(t)|/c)^2}.$$

Αυτή μπορεί να είναι πολύ δυσκολότερη στο να λυθεί ρητά, αλλά το γεγονός ότι $|\mathbf{v}(t)| < c$ για κάθε $t \in I$ εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης της. Πιο συγκεκριμένα, το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού μας διαβεβαιώνει ότι, στο βαθμό που $t_0, t \in I$, η λύση της (5. 13) δίνεται από την έκφραση

$$(5. 14) \quad T(t) = T(t_0) + \int_{t_0}^t \sqrt{1 - (|\mathbf{v}(\xi)|/c)^2} d\xi$$

Αν, λοιπόν, ορίσουμε την παράμετρο τ μέσω της

$$(5. 15) \quad \tau = T(t),$$

τότε αυτή η σχέση αντιστρέφεται με αποτέλεσμα την

$$(5. 16) \quad t = \Psi(\tau).$$

Μάλιστα, το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης μας εξασφαλίζει την ύπαρξη της παραγώγου της συνάρτησης $\Psi(\tau)$. δίνεται από την έκφραση

$$(5.17) \quad \dot{\Psi}(\tau) = 1 / \dot{T}(\Psi(\tau)).$$

Η αντικατάσταση της (5.16) στις εξισώσεις της τροχιάς (5.1) οδηγεί σε εξισώσεις εκφρασμένες με την παράμετρο του ιδιόχρονου τ . Αυτές οι εξισώσεις, μαζί με την (5.16), αποτελούν ένα σύστημα όμοιο με το (5.11). Συγκεκριμένα,

$$(5.18) \quad \begin{aligned} x^1 &= F(\tau) = f(\Psi(\tau)), \\ x^2 &= G(\tau) = g(\Psi(\tau)), \\ x^3 &= H(\tau) = h(\Psi(\tau)), \\ x^4 &\equiv ct = \Phi(\tau) = c\Psi(\tau). \end{aligned}$$

Συνακόλουθα, το διάνυσμα

$$(5.19) \quad \vec{u} := (\dot{F}(\tau), \dot{G}(\tau), \dot{H}(\tau), \dot{\Phi}(\tau))$$

που ορίζεται από τις παραγώγους των συναρτήσεων $F(\tau)$, $G(\tau)$, $H(\tau)$ και $\Phi(\tau)$ ονομάζεται **4-διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας του σ** .

Σημειώστε ότι, αφού $F(\tau) = f(\Psi(\tau))$, ο κανόνας της αλυσίδας και η (5.17) συνεπάγονται ότι η παράγωγος της συνάρτησης $F(\tau)$ είναι ίση με

$$(5.20) \quad \dot{F}(\tau) = \dot{f}(\Psi(\tau)) \dot{\Psi}(\tau) = \dot{f}(\Psi(\tau)) / \dot{T}(\Psi(\tau)).$$

Ανάλογες εκφράσεις προκύπτουν και για τις άλλες συναρτήσεις, οπότε η (5.19) παίρνει τη μορφή

$$(5.21) \quad \vec{u}(\tau) := \frac{1}{\dot{T}(\Psi(\tau))} (\dot{f}(\Psi(\tau)), \dot{g}(\Psi(\tau)), \dot{h}(\Psi(\tau)), c).$$

Σ' αυτό το σημείο μπορούμε να επιστρέψουμε στην παράμετρο t , χρησιμοποιώντας την αντίστροφη της σχέσης (5.16), δηλαδή την (5.15). Έτσι η έκφραση (5.21) για το 4-διάνυσμα της ταχύτητας γίνεται

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \vec{u}(t) := \vec{u}(T(t)) &= \frac{1}{\dot{T}(t)} (\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t), c) \\ &= \gamma(\mathbf{v}(t)) (\dot{f}(t), \dot{g}(t), \dot{h}(t), c) \equiv \gamma(\mathbf{v}(t)) (\mathbf{v}(t), c). \end{aligned}$$

Από την τελευταία έκφραση γίνεται σαφές ότι και το 4-διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας του σωμάτιου σ καθορίζεται από την συνήθη στιγμιαία ταχύτητα, ακριβώς όπως στην περίπτωση της ομαλής κίνησης. Συνακόλουθα, όλες οι σχέσεις και οι έννοιες που κατασκευάσαμε στην περίπτωση που το σωματίο κινιόταν με σταθερή ταχύτητα ισχύουν και στη γενικότερη περίπτωση. Για παράδειγμα

$$(5.23) \quad \eta(\vec{u}(\tau), \vec{u}(\tau)) \equiv \eta_{jk} u^j(\tau) u^k(\tau) = -c^2,$$

οπότε και

$$(5.24) \quad \eta(\vec{p}(\tau), \vec{p}(\tau)) \equiv \eta_{jk} p^j(\tau) p^k(\tau) = -m^2 c^2,$$

όπου

$$(5.25) \quad \vec{p}(\tau) := m \vec{u}(\tau)$$

το 4-διάνυσμα της στιγμιαίας ορμής-ενέργειας. Επιπλέον,

$$(5.26) \quad E(\tau) := c p^4(\tau) = c \sqrt{m^2 c^2 + |\mathbf{P}(\tau)|^2}, \quad \mathbf{P}(\tau) := (p^1(\tau), p^2(\tau), p^3(\tau)).$$

Στη γενικότερη περίπτωση, όπου η συνήθης στιγμιαία επιτάχυνση $\mathbf{a}(t)$ δε μηδενίζεται ταυτοτικά, αξίζει να ορίσουμε και το **4-διάνυσμα της στιγμιαίας επιτάχυνσης**

$$(5.27) \quad \vec{a}(\tau) := (\ddot{F}(\tau), \ddot{G}(\tau), \ddot{H}(\tau), \ddot{\Phi}(\tau))$$

Η διαφορά είναι ότι η έκφραση αυτού του 4-διανύσματος συναρτήσει των συνιστωσών του $\mathbf{a}(t)$ δεν έχει απλή μορφή σαν την (5.22). Γιαυτό στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε συστηματικά μόνο τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{a}(\tau)$. Σημειώνουμε, επίσης, ότι τα 4-διανύσματα $\vec{u}(\tau)$, $\vec{a}(\tau)$ είναι πάντοτε ορθογώνια, ως προς το εσωτερικό γινόμενο Minkowski:

$$(5.28) \quad \eta(\vec{a}(\tau), \vec{u}(\tau)) \equiv \eta_{jk} a^j(\tau) u^k(\tau) = 0.$$

Αυτό προκύπτει αμέσως από την παραγώριση της (5.23), αν σημειωθεί ότι

$$(5.29) \quad a^j(\tau) = \dot{u}^j(\tau).$$

Παράδειγμα (Σχετικιστική ελικοειδής κίνηση)

Αν ξεκινήσουμε από την κλασική περιγραφή της ελικοειδούς κίνησης θα έχουμε

$$(5.30) \quad \begin{aligned} x^1 &= f(t) = r \cos(\omega t), \\ x^2 &= g(t) = r \sin(\omega t), \\ x^3 &= h(t) = b t, \end{aligned}$$

όπου r , ω και b δοσμένες σταθερές. Οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις συνιστώσες της συνήθους ταχύτητας, $\mathbf{v}(t)$, είναι

$$(5.31) \quad \begin{aligned} v^1(t) &= \dot{f}(t) = -r \omega \sin(\omega t), \\ v^2(t) &= \dot{g}(t) = r \omega \cos(\omega t), \\ v^3(t) &= \dot{h}(t) = b. \end{aligned}$$

Άρα το μέτρο της συνήθους ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με

$$(5.32) \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(r \omega)^2 + b^2} \equiv \beta c.$$

Συνακόλουθα,

$$(5.33) \quad \gamma(\mathbf{v}(t)) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v}(t)/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

και η εξίσωση (5.13) γίνεται

$$(5.34) \quad \dot{T}(t) = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Άρα

$$(5.35) \quad \tau = T(t) = \sqrt{1-\beta^2} t,$$

όπου θέσαμε τη σταθερή ολοκλήρωσης ίση με μηδέν. Από αυτήν έπεται ότι

$$(5.36) \quad t = \Phi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau,$$

που, σε συνδυασμό με τις (5.30) δίνει

$$(5.37) \quad \begin{aligned} x^1 &= F(\tau) = r \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau\right), \\ x^2 &= G(\tau) = r \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau\right), \\ x^3 &= H(\tau) = \frac{b}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau, \\ x^4 &\equiv ct = \Phi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} c \tau. \end{aligned}$$

Από αυτές τις εκφράσεις και τις (5.19), (5.27) βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες της στιγμιαίας 4-ταχύτητας $\vec{u}(\tau)$ και της στιγμιαίας 4-επιτάχυνσης $\vec{a}(\tau)$ δίνονται από τις

$$(5.38) \quad \begin{aligned} u^1 &= -\frac{r\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau\right), \\ u^2 &= \frac{r\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau\right), \\ u^3 &= \frac{b}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ u^4 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} c, \end{aligned}$$

και

$$(5.39) \quad \begin{aligned} a^1 &= -\frac{r\omega^2}{1-\beta^2} \cos\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau\right), \\ a^2 &= -\frac{r\omega^2}{1-\beta^2} \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} \tau\right), \\ a^3 &= 0, \\ a^4 &= 0, \end{aligned}$$

αντίστοιχα.

Επισημάνση. Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε μονάδες μέτρησης στις οποίες η τιμή της σταθερής c είναι ένα:

$$(5.40) \quad \boxed{c = 1}$$

Αυτή η επιλογή ισοδυναμεί με την αντικατάσταση όλων των χρονικών παραμέτρων από το γινόμενο τους με τη σταθερή c . (Για παράδειγμα, $\tau \rightarrow c\tau$).

Επιπλέον, η κοσμική καμπύλη ενός σωματίου σ θα περιγράφεται από την 4-διανυσματική συνάρτηση

$$(5.41) \quad \vec{x}(\tau) := (x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau), x^4(\tau))$$

οπότε τα 4-διανύσματα της ταχύτητας και επιτάχυνσης του σ θα έχουν τη μορφή

$$(5.42) \quad \vec{u}(\tau) := (\dot{x}^1(\tau), \dot{x}^2(\tau), \dot{x}^3(\tau), \dot{x}^4(\tau))$$

και

$$(5.43) \quad \vec{a}(\tau) := (\ddot{x}^1(\tau), \ddot{x}^2(\tau), \ddot{x}^3(\tau), \ddot{x}^4(\tau)),$$

αντίστοιχα.

Τέλος, εκεί που δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης, η ένδειξη της εξάρτησης από την παράμετρο τ θα παραλείπεται. Τότε $x^1 \equiv x^1(\tau)$, $\dot{x}^1 \equiv \dot{x}^1(\tau)$ κ.λπ. Οι παραπάνω συμβάσεις σημαίνουν γ.π. ότι

$$(5.44) \quad \eta_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = -1 \Leftrightarrow \eta_{jk} u^j(\tau) u^k(\tau) = -c^2$$

Από τη θεμελιακή ταυτότητα

$$(5.45) \quad \cosh^2(\zeta) - \sinh^2(\zeta) = 1,$$

έπεται ότι η συνθήκη (5.44) εξασφαλίζεται με την επιλογή

$$(5.46) \quad \begin{aligned} \dot{x}^1 &= a(\tau) \sinh[f(\tau)], \\ \dot{x}^2 &= b(\tau) \sinh[f(\tau)], \\ \dot{x}^3 &= c(\tau) \sinh[f(\tau)], \\ \dot{x}^4 &= \cosh[f(\tau)], \end{aligned}$$

με την προϋπόθεση ότι οι συναρτήσεις $a(\tau)$, $b(\tau)$ και $c(\tau)$ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$(5.47) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Σ' αυτή την περίπτωση, οι συνιστώσες της 4-επιτάχυνσης είναι δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
(5.48) \quad \ddot{x}^1(\tau) &= a(\tau) \dot{f}(\tau) \cosh[f(\tau)] + \dot{a}(\tau) \sinh[f(\tau)], \\
\ddot{x}^2(\tau) &= b(\tau) \dot{f}(\tau) \cosh[f(\tau)] + \dot{b}(\tau) \sinh[f(\tau)], \\
\ddot{x}^3(\tau) &= c(\tau) \dot{f}(\tau) \cosh[f(\tau)] + \dot{c}(\tau) \sinh[f(\tau)], \\
\ddot{x}^4(\tau) &= \dot{f}(\tau) \sinh[f(\tau)].
\end{aligned}$$

Αφού, σύμφωνα με την (5.47)

$$(5.49) \quad a(\tau) \dot{a}(\tau) + b(\tau) \dot{b}(\tau) + c(\tau) \dot{c}(\tau) = 0,$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned}
(5.50) \quad \eta(\vec{a}(\tau), \vec{a}(\tau)) &= \eta_{jk} \ddot{x}^j \ddot{x}^k \\
&= [\dot{f}(\tau)]^2 + \{[\dot{a}(\tau)]^2 + [\dot{b}(\tau)]^2 + [\dot{c}(\tau)]^2\} \sinh^2[f(\tau)]
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι πολύ γενικές και μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε πολλά παραδείγματα σχετικιστικής κίνησης σωματίων με διάφορες επιλογές των συναρτήσεων $f(\tau)$, $a(\tau)$, $b(\tau)$ και $c(\tau)$.

Παράδειγμα (Κίνηση με 4-επιτάχυνση σταθερού μέτρου)

Αν υποθέσουμε ότι οι ποσότητες a , b , c είναι σταθερές και ότι

$$(5.51) \quad \dot{f}(\tau) = \kappa = \text{σταθ.}$$

τότε

$$(5.52) \quad f(\tau) = \kappa(\tau - \tau_0), \quad \tau_0 = \text{σταθ.}$$

Από την (5.50) έπεται ότι

$$(5.53) \quad \eta_{jk} a^j a^k = \kappa^2$$

και άρα το 4-διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι χωρικού τύπου με σταθερό μέτρο.

Αν πάρουμε $\tau_0 = 0$, τότε $f(\tau) = \kappa \tau$ και, με απλή ολοκλήρωση, καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$\begin{aligned}
(5.54) \quad x^1(\tau) &= (a/\kappa) \cosh(\kappa \tau) + A, \\
x^2(\tau) &= (b/\kappa) \cosh(\kappa \tau) + B, \\
x^3(\tau) &= (c/\kappa) \cosh(\kappa \tau) + C, \\
x^4(\tau) &= (1/\kappa) \sinh(\kappa \tau) + D.
\end{aligned}$$

Από αυτές τις εκφράσεις έπεται ότι οι σταθερές ολοκλήρωσης έχουν την ακόλουθη σημασία:

$$\begin{aligned}
(5.55) \quad A &= x^1_0 - (a/\kappa) := x^1(0) - (a/\kappa), \\
B &= x^2_0 - (b/\kappa) := x^2(0) - (b/\kappa),
\end{aligned}$$

$$C = x^3_0 - (c / \kappa) := x^3(0) - (c / \kappa),$$

$$D = x^4_0 := x^4(0).$$

Έτσι καταλήγουμε στις

$$(5.56) \quad \begin{aligned} x^1(\tau) &= (a / \kappa) [\cosh(\kappa \tau) - 1] + x^1_0, \\ x^2(\tau) &= (b / \kappa) [\cosh(\kappa \tau) - 1] + x^2_0, \\ x^3(\tau) &= (c / \kappa) [\cosh(\kappa \tau) - 1] + x^3_0, \\ x^4(\tau) &= (1 / \kappa) \sinh(\kappa \tau) + x^4_0. \end{aligned}$$

Αν πάρουμε $x^4_0 = 0$, τότε η σχέση του χρόνου του συστήματος αναφοράς, t , προς τον ιδιόχρονο, τ , γίνεται

$$(5.57) \quad t(\tau) \equiv x^4(\tau) = (1 / \kappa) \sinh(\kappa \tau).$$

Συνεπώς,

$$(5.58) \quad \cosh(\kappa \tau) = \sqrt{1 + (\kappa t)^2}$$

και οι εξισώσεις της τροχιάς γίνονται

$$(5.59) \quad \begin{aligned} x^1(t) &= (a / \kappa) [\sqrt{1 + (\kappa t)^2} - 1] + x^1_0, \\ x^2(t) &= (b / \kappa) [\sqrt{1 + (\kappa t)^2} - 1] + x^2_0, \\ x^3(t) &= (c / \kappa) [\sqrt{1 + (\kappa t)^2} - 1] + x^3_0. \end{aligned}$$

Οι συνιστώσες της συνήθους ταχύτητας είναι

$$(5.60) \quad \begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= a \kappa t / \sqrt{1 + (\kappa t)^2}, \\ \dot{x}^2(t) &= b \kappa t / \sqrt{1 + (\kappa t)^2}, \\ \dot{x}^3(t) &= c \kappa t / \sqrt{1 + (\kappa t)^2}. \end{aligned}$$

Από αυτές τις εκφράσεις και τη συνθήκη (5.47) έπεται ότι

$$(5.61) \quad |\mathbf{v}(t)| = \frac{|\kappa t|}{\sqrt{1 + (\kappa t)^2}}$$

Παρατηρούμε ότι, ασυμπτωτικά, η ταχύτητα έχει μέτρο μονάδα, δηλαδή γίνεται ίση με την ταχύτητα του φωτός. Για μικρές τιμές του t , οι συνιστώσες της ταχύτητας γίνονται οι κλασικές για την "ευθύγραμμη, ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση"

$$\dot{x}^1(t) = a \kappa t,$$

$$(5.62) \quad \begin{aligned} \dot{x}^2(t) &= b \kappa t, \\ \dot{x}^3(t) &= c \kappa t. \end{aligned}$$

Οι συνιστώσες της συνήθους επιτάχυνσης είναι

$$(5.63) \quad \begin{aligned} \ddot{x}^1(t) &= a \kappa / [1 + (\kappa t)^2]^{3/2}, \\ \ddot{x}^2(t) &= b \kappa / [1 + (\kappa t)^2]^{3/2}, \\ \ddot{x}^3(t) &= c \kappa / [1 + (\kappa t)^2]^{3/2}. \end{aligned}$$

Άρα, το μέτρο της συνήθους επιτάχυνσης δίνεται από την έκφραση

$$(5.64) \quad |a(t)| = \kappa / [1 + (\kappa t)^2]^{3/2}$$

που δείχνει ότι δεν είναι σταθερή. Ωστόσο, για $|t| \ll |1/\kappa|$, η επιτάχυνση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και ίση με $|a(t)| \simeq \kappa$, κι αυτό ταιριάζει με τις (5.62).

7.6 Σχετικιστική μηχανική

Όπως τονίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η Νευτωνική Μηχανική δεν είναι συμβατή με την Ειδική Σχετικότητα. Αυτή η ασυμβατότητα μπορεί να διατυπωθεί με πολλούς τρόπους, όπως με το να πούμε ότι ο χωρόχρονος της πρώτης είναι αναλλοίωτος ως προς τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, ενώ εκείνος της Ειδικής Σχετικότητας είναι αναλλοίωτος ως προς τους μετασχηματισμούς του Lorentz (και του Poincaré).

Ένας άλλος τρόπος είναι ότι η Ειδική Σχετικότητα δεν επιτρέπει στα έμμαζα σωμάτια να αποκτήσουν αυθαίρετα μεγάλες ταχύτητες, πράγμα που δεν συμβαίνει στη Νευτωνική Μηχανική. Γιατί, από την θεμελιακή εξίσωση $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ της Νευτωνικής θεωρίας συνάγεται το ακόλουθο συμπέρασμα. Αν σε ένα σωματίο σ ασκείται σταθερή σε μέτρο και κατεύθυνση δύναμη σ' όλο το χρονικό διάστημα $t \geq 0$, τότε το μέτρο της ταχύτητάς του, $|\mathbf{v}(t)|$, θα υπερβεί κάποια στιγμή οποιαδήποτε τιμή βάλουμε στο μυαλό μας.

Για ευκολία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αρχική ταχύτητα του σωμάτιου είναι μηδενική. Τότε $\mathbf{v}(t) = (\mathbf{F}/m)t$ και άρα $|\mathbf{v}(t)| = (|\mathbf{F}|/m)t$. Συνεπώς, αν το C δηλώνει τον τυχαίο θετικό αριθμό, τότε $|\mathbf{v}(t)| \geq C$, όταν $t \geq (mC)/|\mathbf{F}|$. Με άλλα λόγια, όσο μικρή σε μέγεθος κι αν είναι η δύναμη, αρκεί να περιμένουμε αρκετά για να δούμε το μέτρο της ταχύτητας του σωμάτιου να φτάνει και να ξεπερνάει τον (οσοδήποτε μεγάλο) θετικό αριθμό C .

Από την άλλη μεριά, η Νευτωνική Μηχανική φαίνεται να είναι μια πολύ επιτυχής θεωρία όταν εφαρμόζεται σε συστήματα σωμάτων των οποίων οι ταχύτητες είναι μικρές σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, η θεωρία για την δυναμική των σωμάτων, η οποία πρέπει να αντικαταστήσει εκείνη του Νεύτωνα, ώστε να είναι συμβατή με την Ειδική Σχετικότητα (ΕΣ), θα πρέπει να διατηρήσει και κάποια χαρακτηριστικά της τελευταίας. Αναρωτιέται, λοιπόν, κανείς αν υπάρχει τρόπος να κάνει συμβατή με την ΕΣ την θεμελιακή εξίσωση $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ της Νευτωνικής θεωρίας.

Από τις εκφράσεις που υιοθετήσαμε για την 4-ταχύτητα και την 4-επιτάχυνση ενός σωματίου σ ως προς κάποιο ΑΣΑ Σ φαίνεται ότι μια φυσική γενίκευση της βασικής εξίσωσης $\mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{F}$ της Νευτωνικής μηχανικής είναι η

$$(6.1) \quad \boxed{\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}}$$

όπου \vec{F} το 4-διάνυσμα της δύναμης που ασκείται στο σωματίο. Αυτήν ακριβώς την εξίσωση πρότεινε ο Minkowski ως θεμέλιο της Σχετικιστικής Μηχανικής, δηλαδή της θεωρίας για τη δυναμική των σωματίων που ταιριάζει στη δομή του χωρόχρονου της ΕΣ. Μένει να εξετάσουμε αναλυτικά τις συνέπειες της πρότασης του Minkowski, ιδιαίτερα σε ότι αφορά την σημασία του 4-διανύσματος της δύναμης.

Ξεκινάμε, λοιπόν, με την παρατήρηση ότι η έκφραση που κάθε φορά συγκεκριμενοποιεί την δύναμη \vec{F} οφείλει να σέβεται την ακόλουθη συνθήκη:

$$(6.2) \quad \boxed{\eta(\vec{F}, \vec{u}) \equiv \eta_{jk} F^j u^k = 0}$$

Εδώ, $\vec{u} \equiv \vec{u}(\tau)$ είναι το 4-διάνυσμα της στιγμιαίας ταχύτητας του σωματίου που υφίσταται την δύναμη \vec{F} . Η αναγκαιότητα αυτής της συνθήκης είναι άμεση απόρροια της εξίσωσης (6.1) και του γεγονότος ότι, ως προς το εσωτερικό γινόμενο Minkowski, η ίδια η 4-επιτάχυνση $\vec{a} \equiv \vec{a}(\tau)$ είναι πάντοτε ορθογώνια προς την 4-ταχύτητα \vec{u} :

$$(6.3) \quad \eta_{jk} a^j u^k = 0$$

Ένας τρόπος για να εξασφαλιστεί η αυτόματη τήρηση της συνθήκης (6.2) είναι να έχει το διάνυσμα \vec{F} την ακόλουθη δομή:

(i) Οι συνιστώσες του \vec{F} είναι γραμμικός συνδυασμός των συνιστωσών του \vec{u} :

$$(6.4) \quad F^j = \lambda F^j_m u^m$$

(ii) Οι ποσότητες

$$(6.5) \quad F_{ij} := \eta_{ik} F^k_j,$$

που ορίζονται αμέσως μόλις δοθούν οι συντελεστές F^j_k , έχουν την εξής αντισυμμετρική ιδιότητα

$$(6.6) \quad F_{ij} = -F_{ji}.$$

Απόδειξη: Από την (6.5) και με απλές μεταθέσεις των παραγόντων και αλλαγές των συμβόλων των αθροιστικών δεικτών βρίσκουμε ότι

$$(6.7) \quad F_{mn} u^m u^n = -F_{nm} u^m u^n - F_{nm} u^n u^m = -F_{mn} u^m u^n$$

Δηλαδή, από την (6.5) έπεται ότι

$$(6.8) \quad F_{mn} u^m u^n = 0.$$

Συνακόλουθα,

$$(6.9) \quad \eta_{jk} F^j u^k = \eta_{jk} \lambda F^j_m u^m u^k = \lambda \eta_{kj} F^j_m u^m u^k = \lambda F_{km} u^m u^k = 0.$$

Συγκεκριμένο παράδειγμα δύναμης αυτής της μορφής αποτελεί η ηλεκτρομαγνητική. Πιο συγκεκριμένα, όταν ένα σωματίο σ μάζας m είναι ηλεκτρικά φορτισμένο και το φορτίο του είναι ίσο με q , τότε η δύναμη που υφίσταται από τα υπόλοιπα ηλεκτρικά φορτισμένα σώματα του περιβάλλοντός του είναι ίση με

$$(6.10) \quad F_e^j = q F^j_k u^k.$$

Οι συντελεστές $\{F^j_k\}$, που είναι συναρτήσεις του χωροχρονικού διανύσματος θέσης, \vec{x} , ονομάζονται *συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου*. Το πώς ακριβώς τα υπόλοιπα ηλεκτρικά φορτισμένα σώματα του περιβάλλοντος του σ παράγουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα το εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα (Κίνηση σε σταθερό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο)

Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματίου σ που έχει μάζα m και φορτίο q είναι της μορφής

$$(6.11) \quad \ddot{x}^j(\tau) = (q/m) F^j_k[x^m(\tau)] \dot{x}^k(\tau)$$

Όταν το πεδίο είναι σταθερό, τότε αυτές γίνονται

$$(6.12) \quad \dot{u}^j(\tau) = (q/m) F^j_k u^k(\tau), \quad \dot{x}^j(\tau) = u^j(\tau).$$

Αν υποθέσουμε ότι οι μη μηδενικές συνιστώσες είναι οι F^1_2 , F^3_4 και όσες προκύπτουν από τη σχέση $F_{jk} = -F_{kj}$, (δηλαδή ότι υπάρχει ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στην κατεύθυνση $x^3 \equiv z$, μόνο), τότε οι εξισώσεις ανάγονται στις

$$(6.13\alpha) \quad \dot{u}^1(\tau) = (q/m) F^1_2 u^2(\tau) \equiv b u^2(\tau),$$

$$(6.13\beta) \quad \dot{u}^2(\tau) = (q/m) F^2_1 u^1(\tau) \equiv -b u^1(\tau),$$

$$(6.13\gamma) \quad \dot{u}^3(\tau) = (q/m) F^3_4 u^4(\tau) \equiv e u^4(\tau),$$

$$(6.13\delta) \quad \dot{u}^4(\tau) = (q/m) F^4_3 u^3(\tau) \equiv e u^3(\tau).$$

Ο συνδυασμός των (6.13α) και (6.13β) δίνει την

$$(6.14) \quad \ddot{u}^1(\tau) = b \dot{u}^2(\tau) = -b^2 u^1(\tau).$$

Ανάλογα, από τον συνδυασμό των (6.13γ) και (6.13δ) έπεται ότι

$$(6.15) \quad \ddot{u}^3(\tau) = e \dot{u}^4(\tau) = e^2 u^3(\tau).$$

Κατά συνέπεια,

$$(6.16\alpha) \quad u^1(\tau) = A \sin [b (\tau - \tau_0)],$$

$$(6.16\beta) \quad u^2(\tau) = A \cos[b (\tau - \tau_0)],$$

και

$$(6.17\alpha) \quad u^3(\tau) = C \sinh (e \tau) + D \cosh(e \tau),$$

$$(6.17\beta) \quad u^4(\tau) = C \cosh(e \tau) + D \sinh (e \tau).$$

Είναι φανερό ότι η σταθερή ολοκλήρωσης τ_0 μπορεί επιλεγεί ίση με το μηδέν, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Οι υπόλοιπες τρεις σταθερές ολοκλήρωσης δεν μπορούν να επιλεγούν τελείως αυθαίρετα, αφού η βασική συνθήκη $\eta_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = \eta_{jk} u^j u^k = -1$ τώρα γίνεται

$$(6.18) \quad A^2 + D^2 - C^2 = -1 \Leftrightarrow C^2 = A^2 + D^2 + 1.$$

Από τις (6.16), (6.17) αμέσως έπεται ότι

$$(6.19\alpha) \quad x^1(\tau) = (A/b) \cos (b \tau) + C^1,$$

$$(6.19\beta) \quad x^2(\tau) = -(A/b) \sin (b \tau) + C^2,$$

$$(6.19\gamma) \quad x^3(\tau) = (C/e) \cosh(e \tau) + (D/e) \sinh (e \tau) + C^3,$$

$$(6.19\delta) \quad x^4(\tau) = (C/e) \sinh (e \tau) + (D/e) \cosh(e \tau) + C^4.$$

όπου $\{C^j\}$ σταθερές ολοκλήρωσης. Από τις αρχικές σχέσεις

$$(6.20\alpha) \quad x^1(0) = (A/b) + C^1,$$

$$(6.20\beta) \quad x^2(0) = C^2,$$

$$(6.20\gamma) \quad x^3(0) = (C/e) + C^3,$$

$$(6.20\delta) \quad x^4(0) = (D/e) + C^4.$$

έπεται ότι δε χάνουμε σε γενικότητα αν θέσουμε

$$(6.21) \quad C^1 = C^2 = 0, \quad C^3 = -C/e, \quad C^4 = -D/e.$$

Με αυτές τις επιλογές καταλήγουμε στις εκφράσεις

$$(6.22\alpha) \quad x^1(\tau) = r \cos (b \tau), \quad r := A/b,$$

$$(6.22\beta) \quad x^2(\tau) = -r \sin (b \tau),$$

$$(6.22\gamma) \quad x^3(\tau) = [(C/e) - 1] \cosh(e \tau) + (D/e) \sinh (e \tau),$$

$$(6.22\delta) \quad x^4(\tau) = (C/e) \sinh (e \tau) + [(D/e) - 1] \cosh(e \tau).$$

Από αυτές συνάγεται ότι το φορτισμένο σωματίο σ διαγράφει έναν κυλινδρικό έλικα ακτίνα r .

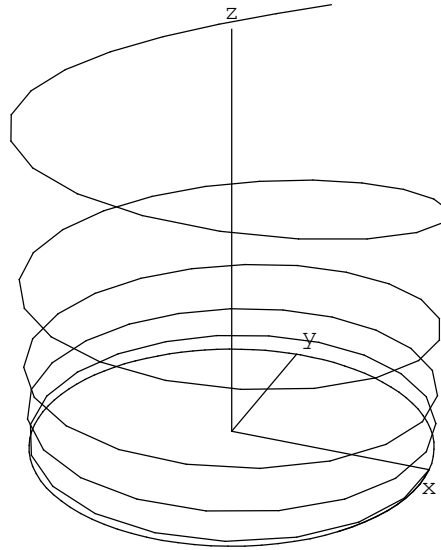
Οι συνιστώσες της συνήθους ταχύτητας δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$(6.23\alpha) \quad v^1(\tau) = \frac{u^1(\tau)}{u^4(\tau)} = \frac{b r \sin(b \tau)}{C \cosh(e \tau) + (D-e) \sinh(e \tau)},$$

$$(6.23\beta) \quad v^2(\tau) = \frac{u^2(\tau)}{u^4(\tau)} = \frac{b r \cos(b \tau)}{C \cosh(e \tau) + (D-e) \sinh(e \tau)},$$

$$(6.23\gamma) \quad v^3(\tau) = \frac{u^3(\tau)}{u^4(\tau)} = \frac{(C-e) \sinh(e \tau) + D \cosh(e \tau)}{C \cosh(e \tau) + (D-e) \sinh(e \tau)} = \frac{(C-e) \tanh(e \tau) + D}{C + (D-e) \tanh(e \tau)}.$$

Το επόμενο σχήμα δείχνει ένα τμήμα της ελικοειδούς τροχιάς του φορτισμένου σωματίου σ που αντιστοιχεί στην κοσμική καμπύλη (6.22)



Σχ. 6.1

7.7 Νόμοι διατήρησης ορμής ενέργειας

Όπως είδαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, ένα από τα βασικά θεωρήματα της Νευτωνικής Μηχανικής λέει ότι η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματίων δεν αλλάζει με τον χρόνο, αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα είναι μηδενική. Αυτό το αποτέλεσμα συνήθως αναφέρεται ως *Νόμος της διατήρησης της ορμής*.

Το απλούστερο σύστημα αποτελείται από δύο σωματία, σ_1 και σ_2 , που έχουν μάζα m_1 και m_2 , αντίστοιχα. Αν οι στιγμιαίες ταχύτητές τους είναι $\mathbf{v}_1(t)$ και $\mathbf{v}_2(t)$, αντίστοιχα, τότε οι στιγμιαίες ορμές τους δίνονται από τις εκφράσεις $\mathbf{p}_1(t) = m_1 \mathbf{v}_1(t)$ και $\mathbf{p}_2(t) = m_2 \mathbf{v}_2(t)$.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, το χρονικό διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$ κι ας θέσουμε

$$(7.1) \quad \mathbf{p}_1 := \mathbf{p}_1(t_1), \quad \mathbf{p}_1^* := \mathbf{p}_1(t_2)$$

$$(7.2) \quad \mathbf{p}_2 := \mathbf{p}_2(t_1), \quad \mathbf{p}_2^* := \mathbf{p}_2(t_2)$$

Αν λοιπόν κατά το χρονικό διάστημα $I = [t_1, t_2]$ η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που υφίσταται το σύστημα $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ μηδενίζεται, τότε ο νόμος της διατήρησης της ορμής συνεπάγεται

ότι η ολική ορμή του συστήματος τη στιγμή t_2 είναι ίδια μ' εκείνη που είχε το σύστημα τη στιγμή t_1 :

$$(7.3) \quad \mathbf{p}_{ολ}(t_1) = \mathbf{p}_{ολ}(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* .$$

Κάτι τέτοιο ισχύει γ.π. όταν μια μπάλα του μπιλιάρδου χτυπάει μιαν άλλη, οπότε το I παριστάνει το διάστημα κατά το οποίο οι δυο μπάλες βρίσκονται σε επαφή. Κατά την επαφή τους, η μια μπάλα πιέζει την άλλη με αποτέλεσμα να την επιταχύνει και άρα να αλλάζει την ορμή της. Αν είχαμε μιαν ακριβή περιγραφή της χρονικής εξέλιξης αυτής της δύναμης, θα ήμασταν σε θέση να υπολογίσουμε και τη συνολική αλλαγή της ορμής καθεμιάς από τις δυο μπάλες σ_1 και σ_2 . Ωστόσο, αυτή η αλλαγή μπορεί να υπολογιστεί και από τη σχέση (7.3), με την προϋπόθεση ότι έχουμε στη διάθεσή μας περισσότερη πληροφορία.

Για να φανεί καθαρά το τι εννοούμε, ας γράψουμε αναλυτικότερα τη σχέση (7.3) στη μορφή

$$(7.4) \quad m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1^* + m_2 \mathbf{v}_2^* .$$

Είναι φανερό ότι, αν γνωρίζουμε μόνο τις ποσότητες m_1 , m_2 , \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 , τότε δεν αρκεί η τελευταία εξίσωση για να προσδιορίσουμε και τις δυο "άγνωστες", \mathbf{v}_1^* και \mathbf{v}_2^* . Η (7.4) αποτελείται από τρεις μόνο εξισώσεις, ενώ οι άγνωστες ποσότητες είναι έξι -οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{v}_1^* και οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{v}_2^* . Χρειαζόμαστε τρεις εξισώσεις ακόμα.

Μια από τις υπόλοιπες εξισώσεις προκύπτει από το αξίωμα της φυσικής που λέγεται *Νόμος της διατήρησης της ενέργειας*: Η μείωση (αύξηση) της μηχανικής ενέργειας ενός συστήματος είναι ίση με την αύξηση (μείωση, αντίστοιχα) της ενέργειας του περιβάλλοντός του. Με άλλα λόγια, αν $E_{ολ}$, E' είναι η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος στην αρχή και στο τέλος, αντίστοιχα, του διαστήματος I , τότε η διαφορά τους,

$$(7.5) \quad \Delta E_{ολ} := E_{ολ}^* - E_{ολ},$$

είναι ένα ποσό της ενέργειας που εισάγεται στο σύστημα από το πουθενά, όταν $\Delta E_{ολ} > 0$, ούτε εξαφανίζεται, όταν $\Delta E_{ολ} < 0$. Δίνεται στο σύστημα από τα άλλα σώματα του σύμπαντος, στην πρώτη περίπτωση, ή απορροφάται από αυτά, στη δεύτερη, σε διαφορετική ίσως μορφή -γ.π. στη μορφή θερμικής ενέργειας.

Θυμίζουμε ότι, στη Νευτωνική Μηχανική, με *ολική μηχανική ενέργεια* ενός σώματιου σ εννοούμε το άθροισμα

$$(7.6) \quad E := T + V$$

όπου

$$(7.7) \quad T := \frac{1}{2} m \, |\mathbf{v}|^2$$

η *κινητική* και V η *δυναμική ενέργεια* του σ . Η τελευταία εξαρτιέται από τη στιγμιαία θέση, \mathbf{x} , του σ και άλλες φυσικές παραμέτρους, αλλά στο παρόν εδάφιο η ακριβής μορφή της συνάρτησης V δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Κι αυτό γιατί εκείνο που μας λείπει είναι η πληροφορία που οδηγεί σε μια εξίσωση συμπληρωματική της (7.3). Για τη διατύπωση, λοιπόν, μιας τέτοιας εξίσωσης αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την αλλαγή,

$$(7.8) \quad \Delta T_{ολ} := T_{ολ}^* - T_{ολ},$$

της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά το χρονικό διάστημα I.

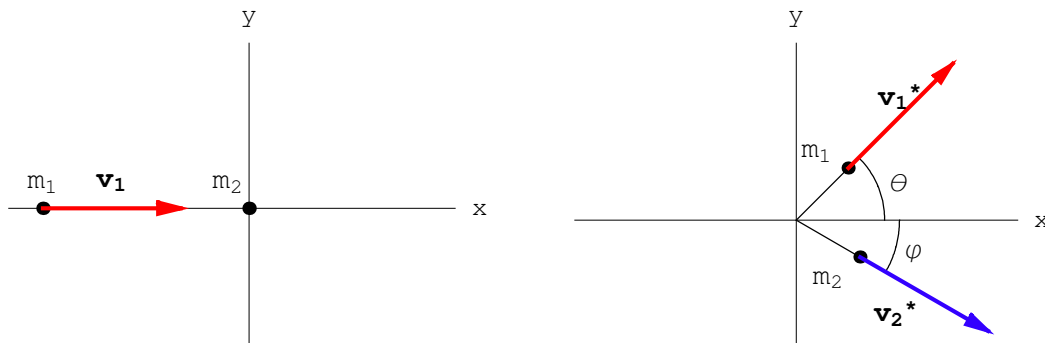
Αν γ.π. $\Delta T_{ολ} = 0$, οπότε λέμε ότι έχουμε *διατήρηση της κινητικής ενέργειας*, τότε για το σύστημα με το οποίο ξεκινήσαμε τη συζήτησή μας ισχύει και η εξίσωση

$$(7.9) \quad T_{ολ} = T_{ολ}^* \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 |v_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |v_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 |v_1^*|^2 + \frac{1}{2} m_2 |v_2^*|^2.$$

Παράδειγμα

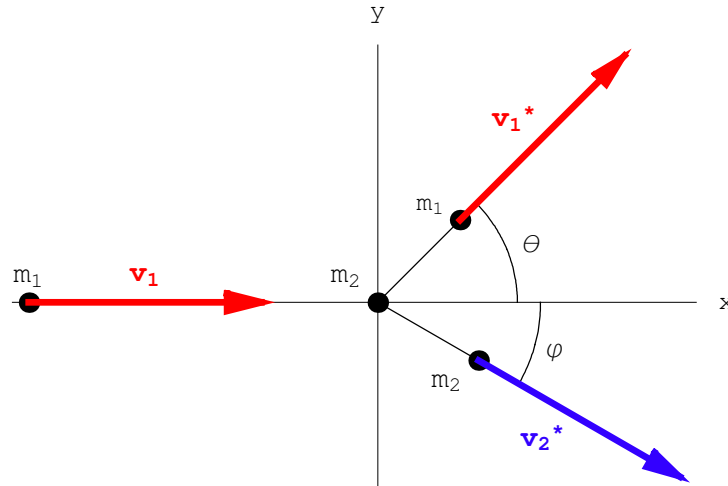
Ας υποθέσουμε ότι τα σωματίδια σ_1 και σ_2 παριστάνουν δυο μπάλες μπιλιάρδου ίδιας μάζας, m , που συγκρούονται και βρίσκονται σε επαφή κατά το απειροελάχιστο διάστημα $t_1 \leq t \leq t_2$. Αν τη στιγμή t_1 η μπάλα σ_1 κινείται με ταχύτητα v_1 προς την μπάλα σ_2 και αυτή ακινητεί, ποιά είναι θα είναι η ταχύτητά τους στο τέλος της σύγκρουσης;

Για ευκολία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μπάλα σ_1 κινείται αρχικά στην κατεύθυνση του θετικού άξονα x και πως η σ_2 βρίσκεται στο σημείο $(0, 0)$ του Καρτεσιανού συστήματος αξόνων $x - y$. Τότε καταλήγουμε στην εικόνα στα αριστερά του επόμενου σχήματος. Στα δεξιά του ίδιου σχήματος απεικονίζεται η κατάσταση που προκύπτει αμέσως μετά τη σύγκρουση των δυο σωματίων.



Σχ. 7.1

Συνήθως, η κατάσταση που επικρατεί λίγο πριν από τη σύγκρουση καθώς κι εκείνη που ισχύει αμέσως μετά παρουσιάζονται σε ένα ενιαίο σχήμα, σαν αυτό που ακολουθεί.



Σχ. 7.2

Το αποτέλεσμα της σύγκρουσης είναι να αλλάξει η ορμή και η κινητική ενέργεια καθεμιάς μπάλας χωριστά, αλλά η συνολική τους ορμή παραμένει αμετάβλητη. Αφού $m_1 = m_2 = m$ και $\mathbf{v}_2 = 0$, η εξίσωση (7. 4) που εκφράζει τη διατήρηση της ορμής γίνεται

$$(7. 10) \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^* + \mathbf{v}_2^*$$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι έχουμε να κάνουμε με *ελαστική κρούση*, πράγμα που σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει αμετάβλητη. Τότε η εξίσωση (7. 9) που εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$(7. 11) \quad |\mathbf{v}_1|^2 = |\mathbf{v}_1^*|^2 + |\mathbf{v}_2^*|^2$$

Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι στην ουσία δισδιάστατο. Τα σωμάτια σ_1 και σ_2 περιορίζονται να κινούνται στο επίπεδο του ορίζει η επιφάνεια του τραπέζιου του μπιλιάρδου. Αν λοιπόν θεωρήσουμε την αρχική ταχύτητα της μπάλας σ_1 ως γνωστή, τότε οι άγνωστες του προβλήματος είναι τέσσερες -οι συνιστώσες (v_{1x}^*, v_{1y}^*) του διανύσματος \mathbf{v}_1^* και οι συνιστώσες (v_{2x}^*, v_{2y}^*) του διανύσματος \mathbf{v}_2^* .

Ας θέσουμε, τώρα,

$$(7. 12) \quad v_1 := |\mathbf{v}_1|, \quad v_1^* := |\mathbf{v}_1^*|, \quad v_2^* := |\mathbf{v}_2^*|$$

κι ας ονομάσουμε θ και φ τις γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα x τα διανύσματα \mathbf{v}_1^* και \mathbf{v}_2^* , αντίστοιχα, όπως στο σχήμα (η φ είναι θετική προς τη φορά των δεικτών ενός ρολογιού, αντίθετα από τη θ). Τότε η (7. 10) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$(7. 13\alpha) \quad v_1 = v_{1x}^* + v_{2x}^* = v_1^* \cos \theta + v_2^* \cos \varphi,$$

$$(7. 13\beta) \quad 0 = v_{1y}^* + v_{2y}^* = v_1^* \sin \theta - v_2^* \sin \varphi.$$

Από την άλλη, η εξ. (7. 11) γίνεται

$$(7. 14) \quad v_1^2 = v_1^{*2} + v_2^{*2}$$

Μ' αυτό τον τρόπο η τετράδα των αγνώστων $(v_{1,x}^*, v_{1,y}^*, v_{2,x}^*, v_{2,y}^*)$ έδωσε τη θέση της στην τετράδα $(v_1^*, v_2^*, \varphi, \theta)$. Είναι φανερό ότι ένα από τα μέλη της τελευταίας πρέπει να θεωρηθεί ως γνωστό για να έχει πιθανότητα το σύστημα των εξ. (7. 13)-(7. 14) να καθορίσει τα υπόλοιπα τρία.

Τώρα, τετραγωνίζοντας τις (7. 13) και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (7. 14) βρίσκουμε ότι

$$(7. 15) \quad v_1^* v_2^* (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) \equiv v_1^* v_2^* \cos (\varphi + \theta) = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι $v_1^* v_2^* \neq 0$, τότε η (7. 15) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\varphi + \theta = \pm \pi/2$. Στην πρώτη περίπτωση $\sin \varphi = \cos \theta$, $\cos \varphi = \sin \theta$, οπότε οι (7. 13) γίνονται

$$(7. 16\alpha) \quad v_1 = v_1^* \cos \theta + v_2^* \sin \theta,$$

$$(7. 16\beta) \quad 0 = v_1^* \sin \theta - v_2^* \cos \theta.$$

Από αυτές έπεται ότι

$$(7. 17) \quad v_2^* = \sin \theta v_1, \quad v_1^* = \cos \theta v_1.$$

Σημειώστε ότι αυτή η λύση είναι αποδεκτή μόνο για $0 \leq \theta \leq \pi/2$, γιατί οι ποσότητες v_1, v_1^* και v_2^* είναι, από τον ορισμό τους, μη αρνητικές.

Στην περίπτωση που $\varphi + \theta = -\pi/2$, έχουμε $\sin \varphi = \cos \theta$, $\cos \varphi = -\sin \theta$, οπότε οι

(7. 13) γίνονται

$$(7. 18\alpha) \quad v_1 = v_1^* \cos \theta - v_2^* \sin \theta,$$

$$(7. 18\beta) \quad 0 = v_1^* \sin \theta + v_2^* \cos \theta.$$

Αυτές δίνουν τη λύση

$$(7. 19) \quad v_2^* = -\sin \theta v_1, \quad v_1^* = \cos \theta v_1,$$

που ισχύει για $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε τις δυο ακραίες περιπτώσεις $\theta = 0$ και $\theta = \pm \pi/2$. Στην πρώτη απ' αυτές, έχουμε $v_1^* = v_1$, $v_2^* = 0$ που δηλώνουν ότι η μπάλα σ_1 δε χτύπησε τελικά τη σ_2 . Στην περίπτωση που $\theta = \pm \pi/2$ παίρνουμε τις τιμές $v_1^* = 0$, $v_2^* = v_1$. Αυτές δηλώνουν ότι το αποτέλεσμα της σύγκρουσης είναι το ν' ακινητοποιηθεί η προσπίπτουσα μπάλα σ_1 και η αρχικά ακίνητη σ_2 ν' αποκτήσει την ταχύτητα που είχε η σ_1 . Θα πρέπει να τονιστεί ότι από όλες τις λύσεις που περιγράφονται από τις (7. 17) και (7. 19) μόνο αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή $\theta = 0$ μπορεί να θεωρηθεί ως ρεαλιστική, αν απολυτοποιήσουμε την υπόθεση ότι οι μπάλες σ_1 και σ_2 είναι σωμάτια ή υλικά σημεία και δεχτούμε ότι δυο υλικά σημεία μπορούν να επιδρούν το ένα στο άλλο μόνο στην κατεύθυνση της ευθείας που κάθε στιγμή ορίζουν.

Στο πλαίσιο του χωρόχρονου Minkowski, η ορμή και η ενέργεια ενός σωματίου συναποτελούν το 4-διάνυσμα της ορμής-ενέργειας, \vec{p} . Συνακόλουθα, κατά το μετασχηματισμό Lorentz $L: x^j \rightarrow x^{j'} = L^j_k x^k$, οι συνιστώσες του \vec{p} αλλάζουν, σύμφωνα με τον τύπο

$$(7.20) \quad p^{j'} = L^j_k p^k.$$

Όταν ο μετασχηματισμός είναι ειδικού τύπου, τότε η σχέση $x^{j'} = L^j_k x^k$ παίρνει τη μορφή

$$(7.21) \quad \boxed{x' = \gamma(x - \beta w), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad w' = \gamma(w - \beta x)}$$

όπου

$$(7.22) \quad \boxed{\beta := \frac{V}{c}, \quad \gamma \equiv \gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

οπότε και ο τύπος (7.20) γίνεται

$$(7.23) \quad \boxed{p_{x'} = \gamma(p_x - \beta \frac{E}{c}), \quad p_{y'} = p_y, \quad p_{z'} = p_z, \quad E' = \gamma(E - \beta c p_x)}$$

Αυτές οι παρατηρήσεις σημαίνουν ότι, στο πλαίσιο της Ειδικής Σχετικότητας, δεν μπορούμε να μιλάμε για τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας ξεχωριστά. Γιατί, αν στο ΑΣΑ Σ γ.π. το σωματίο σ ακινητεί, οπότε η ορμή του μηδενίζεται, τότε στο ΑΣΑ Σ' , που κινείται με ταχύτητα V στην κατεύθυνση του άξονα x ως προς το Σ , το σ έχει μη μηδενική ορμή. Πιο συγκεκριμένα, από την (7.23) έπεται ότι $p_{x'} = -\beta \gamma E / c = -\beta \gamma m c = -\gamma m V$.

Όταν στη διαδικασία που εξετάζουμε, γ.π. σύγκρουση, εμπλέκονται δύο σωματίδια, τα οποία διατηρούν την ταυτότητά τους μέχρι και το τέλος της διαδικασίας, τότε ο νόμος της διατήρησης της ορμής-ενέργειας παίρνει τη μορφή

$$(7.24) \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*$$

όπου $\vec{p}_\alpha, \vec{p}_\alpha^*$, με $\alpha = 1, 2$, είναι το 4-διάνυσμα της ορμής-ενέργειας του σωματίου σ_α στην αρχή και στο τέλος της διαδικασίας, αντίστοιχα. Αρχικά, μπορούμε να ξεχωρίσουμε αυτή την εξίσωση σε δύο μέρη, με το πρώτο,

$$(7.25) \quad \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1^* + \mathbf{P}_2^*,$$

να αφορά την ορμή και το δεύτερο,

$$(7.26) \quad E_1 + E_2 = E_1^* + E_2^*,$$

την ενέργεια του συστήματος. Στην περίπτωση που και τα δύο σωματίδια είναι έμμαζα, τότε η (7.25) μπορεί να γραφτεί αναλυτικότερα στη μορφή

$$(7.27) \quad m_1 \gamma_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \gamma_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \gamma_1^* \mathbf{v}_1^* + m_2 \gamma_2^* \mathbf{v}_2^*,$$

όπου

$$(7.28) \quad \gamma_\alpha \equiv \gamma(\beta_\alpha) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta_\alpha^2}}, \quad \beta_\alpha := \frac{v_\alpha}{c}, \quad v_\alpha := |\mathbf{v}_\alpha|, \quad \alpha = 1, 2.$$

Ανάλογα, η εξ. (7. 26) παίρνει τη μορφή

$$(7. 29) \quad m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 = m_1 \gamma_1^* + m_2 \gamma_2^*.$$

Γενικά, μπορεί να μην είναι βολικό να κάνουμε τους σχετικούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τις τελευταίες αναλυτικές εκφράσεις όπου εμφανίζεται ρητά η συνήθης ταχύτητα των σωματίων. Συχνά είναι βολικότερο να διατηρήσουμε ως ρητές παραμέτρους του προβλήματος τις τρεις συνιστώσες του χωρικού τμήματος \mathbf{P} το τετραδιανύσματος \vec{p} . Τότε, εργαζόμαστε με τις τρεις εξισώσεις (7. 25) και την (7. 25), στη μορφή που παίρνει η τελευταία με βάση τη σχέση

$$(7. 30) \quad E_\alpha = c \sqrt{m^2 c^2 + |\mathbf{P}_\alpha|^2}$$

(βλ. εξ. (4. 23)). Οι λεπτομέρειες θα αναδειχτούν στα επόμενα παραδείγματα.

Σημείωση. Οι επιτρεπτές αντιδράσεις δεν είναι απλώς εκείνες που σέβονται την αρχή της διατήρησης της ορμής-ενέργειας. Στη φύση παρατηρείται να ισχύουν και άλλοι νόμοι διατήρησης, με πιο γνωστό εκείνον της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Συνεπώς, από τη διάσπαση ενός πρωτονίου γ.π. δεν είναι δυνατό να παραχθεί ένα νετρόνιο και ένα φωτόνιο. Γιατί το μητρικό σωματίο έχει μία μονάδα ηλεκτρικού φορτίου (=το ελάχιστο φορτίο που φέρει ένα ελεύθερο σωματίο = σε απόλυτη τιμή, το φορτίο ενός ηλεκτρονίου) και τα προϊόντα της διάσπασης θα είχαν συνολικά μηδενικό φορτίο.

Ορισμένοι νόμοι διατήρησης είναι το ίδιο γενικοί όπως αυτός της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Άλλοι πάλι παρατηρείται να ισχύουν σε μια κατηγορία μόνο αντιδράσεων. Η διατήρηση του βαρυονικού αριθμού θεωρείται ότι ανήκει στην πρώτη κατηγορία, ενώ εκείνος της διατήρησης της parity (ισοτιμίας, συμμετρίας δεξιόστροφων και αριστερόστροφων συστημάτων ή δεξοχειρων και αριστερόχειρων) ανήκει στην κατηγορία εκείνων που έχουν περιορισμένη ισχύ. Δεν τηρείται σε διασπάσεις που συμβαίνουν μέσω των ασθενών αλληλεπιδράσεων.

Παράδειγμα

Θα ξεκινήσουμε με την ανάλυση μονοδιάστατων προβλημάτων. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την περίπτωση που μελετήσαμε νωρίτερα, όπου μια μπάλα μπιλιάρδου, σ_1 , προσπέφτει με ταχύτητα v_1 στη μπάλα σ_2 . Θα υποθέσουμε ότι τόσο πριν, όσο και μετά από, τη σύγκρουση οι μπάλες κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία, που μπορούμε να ταυτίσουμε με τον άξονα x .

Με αυτές τις υποθέσεις, οι εξισώσεις που εκφράζουν τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας γίνονται αρχικά

$$(7. 31) \quad m_1 \gamma_1 v_1 + m_2 \gamma_2 v_2 = m_1 \gamma_1^* v_1^* + m_2 \gamma_2^* v_2^*$$

και

$$(7. 32) \quad m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 = m_1 \gamma_1^* + m_2 \gamma_2^*$$

αντίστοιχα.

Από την άποψη των απαιτούμενων υπολογισμών, το σύστημα των δυο τελευταίων εξισώσεων φαίνεται, αλλά δεν είναι, απλό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ποσότητες γ_α είναι αρκετά περίπλοκες συναρτήσεις των αντίστοιχων ταχυτήτων. Γι αυτό στρεφόμαστε στην αντικατάσταση των ταχυτήτων από τις ορμές και αντί για τις (7. 31) και (7. 32) έχουμε να αντιμετωπίσουμε τις

$$(7. 33) \quad \sqrt{m_1^2 + P_1^2} m_1^2 + \sqrt{m_2^2 + P_2^2} = \sqrt{m_1^2 + P_1'^2} + \sqrt{m_2^2 + P_2'^2}$$

και

$$(7. 34) \quad P_1 + P_2 = P_1^* + P_2^*,$$

αντίστοιχα, όπου θέσαμε $c = 1$, για ευκολία.

Για να περιορίσουμε την πολυπλοκότητα των υπολογισμών, θα εξετάσουμε ορισμένες ειδικότερες περιπτώσεις, αρχίζοντας από την

$$(i) \quad m_1 = m_2 = m.$$

Σ' αυτή την περίπτωση η (7. 33) ανάγεται στην

$$(7. 35) \quad \sqrt{m^2 + P_1^2} + \sqrt{m^2 + P_2^2} = \sqrt{m^2 + P_1^{*2}} + \sqrt{m^2 + P_2^{*2}}$$

Θα πρέπει να είναι φανερό από τη συμμετρία των εξ. (7. 34)-(7. 35) ότι οι λύσεις τους είναι

$$(7. 36) \quad P_1^* = P_1, \quad P_2^* = P_2 \quad \text{και} \quad P_1^* = P_2, \quad P_2^* = P_1.$$

Προφανώς, η πρώτη απ' αυτές τις λύσεις σημαίνει ότι τα δυο σωματίδια δεν αλληλεπίδρασαν καθόλου.

$$(ii) \quad v_2 = 0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση οι (7. 33) και (7. 34) ανάγονται στις

$$(7. 37) \quad \sqrt{m_1^2 + P_1^2} + m_2 = \sqrt{m_1^2 + P_1^{*2}} + \sqrt{m_2^2 + P_2^{*2}}$$

και

$$(7. 38) \quad P_1 = P_1^* + P_2^*$$

αντίστοιχα.

Για ευκολία στους παραπέρα υπολογισμούς θέτουμε

$$(7. 39) \quad m_1 = m, \quad m_2 = M, \quad P_1 = \pi, \quad P_1^* = p \quad \text{και} \quad P_2^* = P,$$

οπότε οι προς επίλυση εξισώσεις γίνονται

$$(7. 40\alpha) \quad \sqrt{m^2 + \pi^2} + M = \sqrt{m^2 + p^2} + \sqrt{M^2 + P^2}$$

$$(7. 40\beta) \quad \pi = p + P$$

Με απλούς αλλά χρονοβόρους αλγεβρικούς χειρισμούς, που ξεκινάνε με τον τετραγωνισμό και των δύο μελών του, οδηγείται κανείς στην ακόλουθη μη τετριμμένη λύση του συστήματος (7. 40α) - (7. 40β):

$$(7. 41\alpha) \quad P = \frac{\pi (m^2 - M^2) \{m^2 + M (-2\sqrt{\pi^2 + m^2} + M)\}}{m^4 - 4\pi^2 M^2 - 2m^2 M^2 + M^4},$$

$$(7. 41\beta) \quad P = \frac{2\pi M \{m^2 (\sqrt{\pi^2 + m^2} - M) + M [-2\pi^2 + M (-\sqrt{\pi^2 + m^2} + M)]\}}{m^4 - 4\pi^2 M^2 - 2m^2 M^2 + M^4}$$

Αυτή μπορεί να γραφτεί στην απλούστερη μορφή

$$(7. 42) \quad P = \frac{(m^2 - M^2)\pi}{m^2 + M^2 + 2M e}, \quad P = \frac{2 M (e + M)\pi}{m^2 + M^2 + 2M e},$$

με την εισαγωγή της ενέργειας $e := \sqrt{\pi^2 + m^2}$ του σ_1 .

Αξίζει να σημειωθεί ότι, για μικρές ταχύτητες του προσπίποντος σωματίου σ_1 ,

$$(7. 43) \quad e \simeq m + \frac{\pi^2}{2m},$$

οπότε η (7. 42) γίνεται

$$(7. 44) \quad P \simeq \frac{(m^2 - M^2)}{(m + M)^2 + (M/m)\pi^2} \pi, \quad P \simeq \frac{2 M (m + M) + (M/m)\pi^2}{(m + M)^2 + (M/m)\pi^2} \pi.$$

Παράδειγμα (πλαστική σύγκρουση ή σύντηξη, διάσπαση)

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίο σ_1 που πέφτει με ταχύτητα u_1 πάνω στο σ_2 ενώνεται με το τελευταίο, με αποτέλεσμα να σχηματιστεί ένα σωματίο σ μάζας μ . Τότε οι εξισώσεις (7. 40) δίνουν τη θέση τους στις

$$(7. 45\alpha) \quad \sqrt{m^2 + \pi^2} + M = \sqrt{\mu^2 + P^2}$$

$$(7. 45\beta) \quad \pi = P$$

Από αυτές συνάγεται αμέσως ότι η μάζα του νέου σωματίου είναι ίση με

$$(7. 46) \quad \mu = \sqrt{m^2 + M^2 + 2M \sqrt{\pi^2 + m^2}} = \sqrt{m^2 + M^2 + 2M e}$$

Για μη σχετικιστικές ταχύτητες, όταν δηλαδή ισχύει η (7. 43), η τελευταία έκφραση γίνεται

$$(7. 47) \quad \mu \simeq m + M + \frac{M}{m + M} \frac{\pi^2}{2m}.$$

Σημειώστε ότι ο όρος $\frac{\pi^2}{2m}$ αντιπροσωπεύει τη Νευτωνική κινητική ενέργεια του σωματίου σ_1 . Αν υποθέσουμε ότι η μάζα M του ακίνητου σωματίου είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα m του σ_1 , τότε ο συντελεστής $M/(m + M)$ δεν διαφέρει ουσιαστικά από τη μονάδα. Σ' αυτή την περίπτωση η (7. 47) γίνεται

$$(7. 48) \quad \mu \simeq m + M + \frac{\pi^2}{2m},$$

που δηλώνει ότι η μάζα του σωματίου που σχηματίστηκε ως αποτέλεσμα της σύγκρουσης υπερβαίνει το άθροισμα των μαζών των σωματίων που συγκρούστηκαν κατά $\frac{\pi^2}{2m} \equiv \frac{\pi^2}{2mc^2}$. Πρόκειται για τη μάζα που αντιστοιχεί στη Νευτωνική κινητική ενέργεια του σ_1 .

Η διαδικασία που περιγράψαμε σ' αυτό το παράδειγμα ονομάζεται *πλαστική ή τελείως ανελαστική σύγκρουση* των σωματίων σ_1 και σ_2 . Συχνά αναφέρεται και ως *σύντηξη* των σ_1 και σ_2 . Αν την αντιστρέψουμε χρονικά, τότε θα καταλήξουμε στην ακόλουθη εικόνα: Ένα σωματίο σ μάζας μ και (σχετικιστικής) ορμής P σπάει κάποια στιγμή σε δύο, με αποτέλεσμα να εμφανιστούν τα σωματία σ_1 και σ_2 , μάζας m και M , αντίστοιχα. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται *διάσπαση* (ενός σωματίου σε δύο).

Παράδειγμα (Απορρόφηση και εκπομπή φωτονίων)

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το σωματίο σ_1 του προηγούμενου παραδείγματος, το οποίο προσκρούει στο σ_2 κι ενώνεται μαζί του, είναι ένα φωτόνιο. Τότε οι εξισώσεις (7. 45) εξακολουθούν να ισχύουν, με τη διαφορά ότι η μάζα του σ_1 μηδενίζεται. Έτσι καταλήγουμε στις σχέσεις

$$(7. 49\alpha) \quad \pi + M = \sqrt{\mu^2 + P^2},$$

$$(7. 49\beta) \quad \pi = P.$$

Θυμίζουμε ότι το 4-διάνυσμα ορμής-ενέργειας ενός φωτονίου που αντιστοιχεί σε ακτινοβολία συχνότητας f δίνεται την έκφραση

$$(7. 50) \quad \vec{p}_\varphi = (\hbar \mathbf{k}, E/c), \quad |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \equiv \frac{2\pi f}{c}, \quad E = \hbar\omega = hf.$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε και αφού έχουμε θέσει $c = 1$,

$$(7. 51) \quad \pi = E = hf,$$

οπότε η (7. 49α) γίνεται

$$(7. 52) \quad hf + M = \sqrt{\mu^2 + (hf)^2}.$$

Συνεπώς, η μάζα του σωματίου στο οποίο μετασχηματίζεται το σ_2 με την απορρόφηση του φωτονίου σ_1 δίνεται από τον τύπο

$$(7. 53) \quad \mu = M \sqrt{1 + 2(hf/M)}.$$

Όταν η ενέργεια του απορροφούμενου φωτονίου είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας $M c^2$ του σ_2 , όταν δηλαδή $hf \ll M$, τότε ο τύπος (7. 53) γίνεται

$$(7. 54) \quad \mu \simeq M + hf.$$

Από αυτόν φαίνεται καθαρά ότι, στις μονάδες όπου $c = 1$, η αύξηση της μάζας του σ_2 είναι ίση προς την ενέργεια του φωτονίου που αυτό το έμμαζο σωματίο απορρόφησε.

Παράδειγμα (Σκέδαση Compton)

Ας θεωρήσουμε το γενικότερο παράδειγμα όπου ένα φωτόνιο, ας το πούμε σ_1 , προσκρούει στο ακίνητο σωματίο σ_2 μάζας m , με αποτέλεσμα να αλλάξει η συχνότητά του και η κατεύθυνση προς την οποία κινείται. Τότε οι εξισώσεις που εκφράζουν τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας του συστήματος $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$(7.55) \quad h f_0 + m = h f + m \gamma$$

$$(7.56) \quad \hbar \mathbf{k}_0 = \hbar \mathbf{k} + m \gamma \mathbf{v}$$

όπου \mathbf{k}_0, \mathbf{k} το κυματόνισμα του φωτονίου πριν και μετά τη σύγκρουση, αντίστοιχα, \mathbf{v} η ταχύτητα που αποκτάει το σ_2 εξαιτίας της πρόσπτωσης του φωτονίου και

$$(7.57) \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v := |\mathbf{v}|.$$

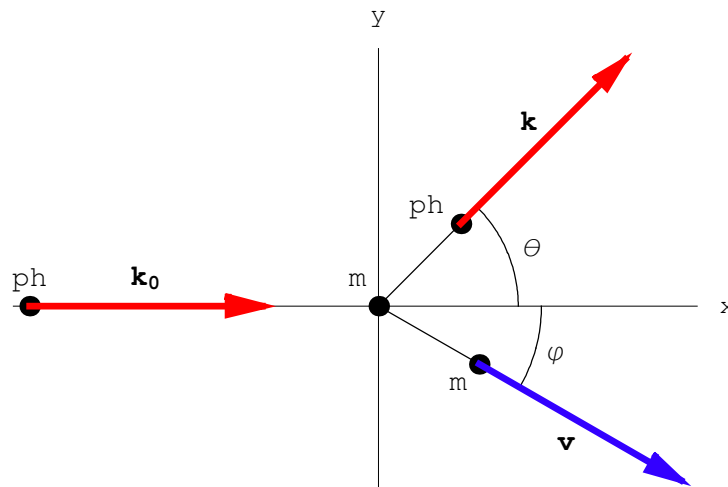
Χωρίς να περιορίζουμε τη γενικότητα της ανάλυσής μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, πριν από τη σύγκρουση, το σωματίο σ_2 βρισκόταν στην αρχή των Καρτεσιανών αξόνων $x - y - z$ του ΑΣΑ που περιγράφει τη σύγκρουση, ενώ το φωτόνιο εκινιόταν κατά μήκος του αρνητικού άξονα x . Με αυτή την υπόθεση η εξίσωση (7.56) γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$(7.58) \quad \hbar k_0 = \hbar k^1 + m \gamma v^1 \quad 0 = \hbar k^2 + m \gamma v^2, \quad 0 = \hbar k^3 + m \gamma v^3.$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις αμέσως έπεται ότι

$$(7.59) \quad k^2 = -(m \gamma / \hbar) v^2, \quad k^3 = -(m \gamma / \hbar) v^3.$$

Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα \mathbf{k} και \mathbf{v} είναι συνεπίεδα. Άρα μπορούμε να σκεφτούμε μια στροφή του συστήματος $x - y - z$ γύρω από τον άξονα x , τέτοια που το νέο επίπεδο $x - y$ να ταυτίζεται με το επίπεδο που ορίζουν τα \mathbf{k} και \mathbf{v} .



Σχ. 7.3

Στο νέο σύστημα αξόνων η τρίτη συνιστώσα αυτών των διανυσμάτων θα μηδενίζεται ταυτοτικά. Ισοδύναμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει από την αρχή το σύστημα

$x - y - z$ έτσι που τα διανύσματα \mathbf{k} και \mathbf{v} να περιέχονται στο επίπεδο $x - y$. Σ' αυτή την περίπτωση, η τρίτη από της εξ. (7. 58) είναι κενή και οι υπόλοιπες δύο μπορούν να γραφτούν ως

$$(7. 60) \quad (\hbar k_0 / m) = (\hbar k / m) \cos\theta + \gamma v \cos\varphi, \quad 0 = (\hbar k / m) \sin\theta - \gamma v \sin\varphi,$$

όπου

$$(7. 61) \quad k := |\mathbf{k}| = \sqrt{(k^1)^2 + (k^2)^2}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\varphi = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι το σωματίο σ_2 αποκτάει ταχύτητα στην κατεύθυνση στην οποία εκινιόταν το φωτόνιο πριν από τη σύγκρουση, τότε από τη δεύτερη των (7. 60) έπεται ότι $\sin\theta = 0$. Συνεπώς $\theta = 0$ ή π , οπότε $\cos\theta = \pm 1$, αντίστοιχα, και η πρώτη των (7. 60) γίνεται

$$(7. 62) \quad (\hbar k_0 / m) = \pm (\hbar k / m) + \gamma v.$$

Ισοδύναμα,

$$(7. 63) \quad \gamma v = (\hbar / m) (k_0 \mp k) = (h / m) (f_0 \mp f).$$

Από την άλλη η (7. 55) είναι ισοδύναμη με την

$$(7. 64) \quad \gamma = (h / m) (f_0 - f) + 1.$$

Προφανώς, όταν $\theta = 0$, οι εξ. (7. 63) και (7. 64) είναι συμβατές μόνο όταν $f = f_0$ και $v = 0$. Αυτή η λύση αντιστοιχεί στην περίπτωση που, τελικά, το φωτόνιο δεν αλληλεπίδρασε με το σωματίο σ_2 . Αντίθετα, όταν $\theta = \pi$, τότε η λύση του συστήματος (7. 63) - (7. 64) δίνεται από τις σχέσεις

$$(7. 65) \quad f = \frac{f_0}{1 + 2(h/m)f_0},$$

$$(7. 66) \quad v = \frac{2l_0(1+l_0)}{1+2l_0(1+l_0)}, \quad l_0 := \frac{hf_0}{m}.$$

Σημειώστε ότι η ποσότητα l_0 παριστάνει το λόγο της ενέργειας του φωτονίου προς την ενέργεια ηρεμίας ($m \equiv mc^2$) του σωματίου σ_2 . Όταν $l_0 \ll 1$, τότε οι (7. 65), (7.66) ανάγονται στις $f \simeq f_0$, $v \simeq 2l_0$.

Αν, όμως, η γωνία φ δε είναι μηδενική, τότε η δεύτερη των (7. 60) γίνεται

$$(7. 67) \quad \gamma v = l \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}, \quad l := \frac{hf}{m}$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για την ποσότητα γv στην πρώτη των (7. 60) οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(7. 68) \quad \cot\varphi = \frac{1-\xi \cos\theta}{\xi \sin\theta}, \quad \xi := \frac{l}{l_0} = \frac{f}{f_0}$$

Από την άλλη, με το συμβολισμό που έχουμε εισαγάγει, η εξ. (7. 55) γράφεται σαν

$$(7. 69) \quad \gamma - 1 = (h/m) f_0 [1 - (f/f_0)] = l_0 (1 - \xi).$$

Μένει, λοιπόν, να λύσουμε το σύστημα των εξ. (7. 67)-(7. 69) για να έχουμε ολοκληρώσει την ανάλυση του προβλήματος.

Αρχίζουμε με τον τετραγωνισμό της (7. 67) που δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα, αν ληφθεί υπόψη η (7. 68):

$$(7. 70) \quad (\gamma v)^2 = l^2 \sin^2 \theta \frac{1}{\sin^2 \varphi} \equiv l^2 \sin^2 \theta (1 + \cot^2 \varphi) \\ = l^2 \sin^2 \theta \left[1 + \left(\frac{1 - \xi \cos \theta}{\xi \sin \theta} \right)^2 \right] = l^2 \frac{\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1}{\xi^2}$$

Όμως,

$$(7. 71) \quad (\gamma v)^2 \equiv \frac{v^2}{1-v^2} = \frac{1}{1-v^2} - 1 \equiv \gamma^2 - 1.$$

Συνεπώς, η (7. 70) γράφεται σαν

$$(7. 72) \quad \gamma^2 - 1 = l^2 \frac{\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1}{\xi^2}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (7. 69) και (7. 72), βρίσκουμε ότι

$$(7. 73) \quad \gamma + 1 = l_0 \frac{\xi^2 - 2\xi \cos \theta + 1}{(1-\xi)}.$$

Από το συνδυασμό των (7. 69), (7. 73) συνάγεται ότι

$$(7. 74) \quad \xi = \frac{1}{1+l_0 (1-\cos\theta)}.$$

Ισοδύναμα,

$$(7. 75) \quad \boxed{f = \frac{f_0}{1+(h f_0/m) (1-\cos\theta)}}$$

Τέλος, απλές αλγεβρικές πράξεις οδηγούν στις ακόλουθες εκφράσεις για τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του σ_2 με τον άξονα x και το μέτρο αυτής της ταχύτητας, αντίστοιχα:

$$(7. 76) \quad \tan \varphi = \frac{\cot(\theta/2)}{1+l_0},$$

$$(7. 77) \quad v = \frac{2 l_0 \sin(\theta/2) \sqrt{1+l_0(2+l_0) \sin^2(\theta/2)}}{1+2 l_0(1+l_0) \sin^2(\theta/2)}.$$

Προφανώς, όταν $\theta = \pi$, τα τελευταία αποτελέσματα ανάγονται σ' εκείνα που βρήκαμε νωρίτερα.

Πυρηνική διάσπαση και σύντηξη

Οι διαδικασίες που περιγράψαμε στα προηγούμενα παραδείγματα όχι μόνο δεν είναι σπάνιες στη φύση αλλά αποτελούν και τη βάση της ζωής πάνω στη γη. Κι αυτό γιατί η διαρκής σύντηξη πρωτονίων (πυρήνων του υδρογόνου) είναι ο βασικός μηχανισμός παραγωγής ενέργειας στο εσωτερικό του ήλιου. Ακριβέστερα, αυτό που συμβαίνει στο κεντρικό τμήμα του ήλιου είναι ότι, πυρήνες υδρογόνου (δηλαδή πρωτόνια) και των ισότοπων του υδρογόνου δευτέρου

(πρωτόνιο+νετρόνιο) και τρίτιου (πρωτόνιο+2 νετρόνια) συγκρούονται αδιάκοπα, με αποτέλεσμα ορισμένοι απ' αυτούς να ενώνονται και να σχηματίζουν αυτό που λέμε (πυρήνα του στοιχείου) "ήλιο" (2 πρωτόνια+2 νετρόνια).

Αρχικά δίνεται η εντύπωση ότι η σύντηξη είναι διαδικασία που απορροφά ενέργεια από το σώμα που συναποτελούν τα συντηκόμενα σωματίδια, αφού, στα παραδείγματα που μελετήσαμε, η μάζα του σωματίου που σχηματίζεται είναι μεγαλύτερη από τη μάζα των συζύγων. Η ενέργεια που αντιστοιχεί στην επιπλέον μάζα προέρχεται, όπως είδαμε, από την κινητική ενέργεια των συντηκόμενων σωματίων.

Εκείνο που συμβαίνει στην πραγματικότητα είναι ότι η μάζα του σχηματιζόμενου σωματίου είναι μικρότερη από το άθροισμα των συντηκόμενων. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να περιγραφεί με μια από τις ακόλουθες δυο, ισοδύναμες, εικόνες.

(i) Το σωματίο που προκύπτει από τη σύντηξη έχει αρχικά μάζα μεγαλύτερη από το άθροισμα των μαζών των σωματίων που ενώνονται. Όμως αυτό το σωματίο είναι ασταθές και γι αυτό αποβάλλει ενέργεια, με τη μορφή γ.π. φωτονίων, τόση όσο χρειάζεται για να μείνει με μάζα μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των σωματίων από τα οποία σχηματίστηκε. Αυτή η διαδικασία μπορεί να ονομαστεί σύντηξη-διάσπαση.

(ii) Η σύντηξη δύο, γ.π., σωματίων είναι μια σύγκρουση που έχει ως άμεσο αποτέλεσμα το σχηματισμό δύο νέων σωματίων, ενός έμμαζου που η μάζα του είναι μικρότερη από το άθροισμα των μαζών των σωματίων από τα οποία σχηματίστηκε κι ενός άμαζου. Το δεύτερο είναι το φωτόνιο της προηγούμενης εικόνας.

Σε τελική ανάλυση, βέβαια, η διαδικασία που περιγράψαμε δεν οδηγεί στην παραγωγή (πυρηνικής) ενέργειας από το μηδέν, παρά είναι ένας μηχανισμός μετατροπής κάποιων μορφών ενέργειας σε άλλες.

Οι διαδικασίες σύγκρουσης, σύντηξης και διάσπασης των πυρηνικών και στοιχειωδών σωματίων ονομάζονται συλλογικά *αντιδράσεις*. Η αναπαράσταση μιας αντίδρασης γίνεται, συνήθως, με τον ακόλουθο τρόπο. Τα αρχικά σωματίδια τοποθετούνται στην αριστερή πλευρά του συμβόλου \rightarrow και τα προϊόντα της αντίδρασης στα δεξιά. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, συχνά, τα σωματίδια που εμφανίζονται μετά την αντίδραση δεν είναι τα ίδια με τα αρχικά, ούτε στην υφή ούτε στον αριθμό. Η έκφραση $e + p \rightarrow e + p$ γ.π. παριστάνει τη σύγκρουση ενός ηλεκτρονίου με ένα πρωτόνιο. Η $n + p \rightarrow d + \gamma$ παριστάνει την ανελαστική σύγκρουση ενός νετρόνιου με ένα πρωτόνιο που έχει ως αποτέλεσμα την ένωσή τους και την εκπομπή ενός φωτονίου (ακτίνας γ). Το σύμπλοκο d πρωτονίου-νετρόνιου αποτελεί τον πυρήνα ενός ισότοπου του συνηθισμένου υδρογόνου H που λέγεται δευτέριο. Τέλος, η έκφραση $n \rightarrow e + p + \bar{\nu}$ παριστάνει τη διάσπαση ενός νετρόνιου σε ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο και αντινεutrino.

Η μονάδα ενέργειας που χρησιμοποιείται συνήθως στις πυρηνικές αντιδράσεις είναι το MeV (μέγα ηλεκτρονιο-βόλτ). Η σχέση του με τη μονάδα ενέργειας $\text{erg} = \text{gr} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$ δίνεται από τον τύπο

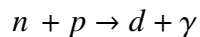
$$(7.78) \quad 1 \text{ MeV} = 1,602 \times 10^{-26} \text{ ergs}$$

Στους πίνακες με τα χαρακτηριστικά των πυρηνικών και στοιχειωδών σωματίων, δίνεται συνήθως η ενέργεια ηρεμίας, mc^2 , και όχι η ίδια η μάζα τους. Παράδειγμα:

Σωματίο	Σύμβολο	mc^2 σε MeV
ηλεκτρόνιο	e	0, 511
πρωτόνιο	p	938, 256
νετρόνιο	n	939, 550
φωτόνιο (ακτίνα γάμμα)	γ	0
νετρίνιο	ν	0
πιόνιο (ουδέτερο)	π^0	135
πιόνιο (φορτισμένο)	π^\pm	139, 6
μιόνιο	μ	105, 7
δευτέριο (υδρογόνο)	H^2	1.875, 580
τρίτιο (υδρογόνο)	H^3	2.808, 873
άλφα (ήλιο)	He^4	3.727, 315

Παράδειγμα

Σ' έναν πυρηνικό αντιδραστήρα, νετρόνια μικρής κινητικής ενέργειας -της τάξης του ενός eV- συγκρούονται με πρωτόνια με αποτέλεσμα τον σχηματισμό πυρήνων δευτερίου και την εκπομπή ακτινοβολίας. Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική κινητική ενέργεια των προϊόντων αυτής της αντίδρασης

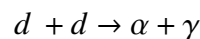


Λύση

Από τον προηγούμενο πίνακα βρίσκουμε ότι τα αντιδρώντα σωματίια, n και p , έχουν συνολική ενέργεια ηρεμίας $938, 256 + 939, 550 = 1877, 806 \text{ MeV}$. Αυτό το άθροισμα υπερβαίνει την ενέργεια ηρεμίας του δευτερίου, d , κατά $1877, 806 - 1.875, 580 = 2, 226 \text{ MeV}$. Επειδή η κινητική ενέργεια των νετρονίων είναι αμελητέα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνολική κινητική ενέργεια των προϊόντων της αντίδρασης δίνεται από την παραπάνω διαφορά των $2, 226 \text{ MeV}$.

Παράδειγμα

Στο εσωτερικό του ήλιου δύο πυρήνες δευτερίου (βαριού υδρογόνου) ενώνονται για να σχηματίσουν έναν πυρήνα του στοιχείου "ήλιο", ή σωματίο άλφα. Να εκτιμηθεί η ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτονίων, αν υποθεθεί ότι τα αρχικά και τα παραγόμενα έμμεσα σωματίια της αντίδρασης



έχουν αμελητέα κινητική ενέργεια.

Λύση

Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι δυο πυρήνες υδρογόνου έχουν ενέργεια ηρεμίας $2 \times 1.875, 580 = 3751.16 \text{MeV}$, ενώ η ενέργεια ηρεμίας του πυρήνα του ήλιου (He^4) είναι $3.727, 315 \text{MeV}$. Άρα τα παραγόμενα φωτόνια μεταφέρουν ενέργεια ίση προς $23, 845 \text{MeV}$.

8. Ειδική Σχετικότητα και κλασική θεωρία ηλεκτρο- μαγνητισμού

8.1 Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το επίπεδο \mathbb{R}^2 και τύπο $f(x, y) = 2xy$. Επειδή τα στοιχεία του \mathbb{R} ονομάζονται και **βαθμωτά**, η παραπάνω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **βαθμωτό πεδίο** του \mathbb{R}^2 .

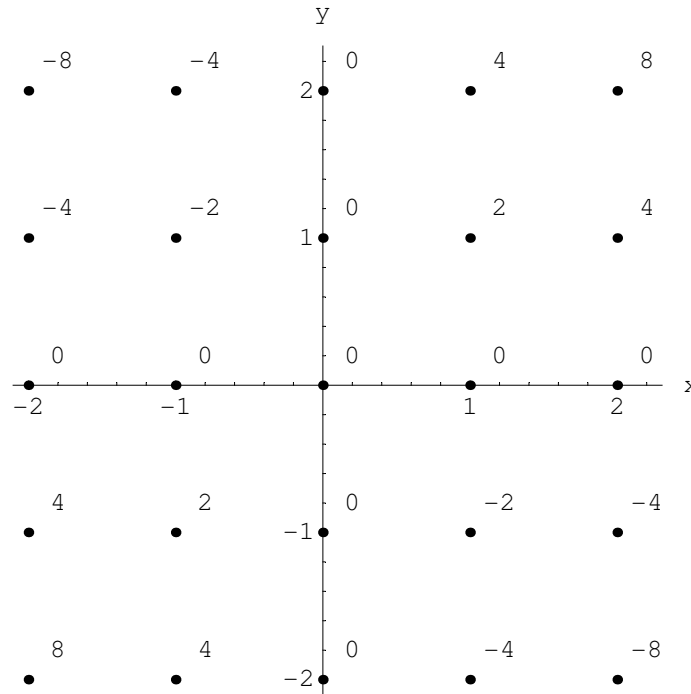
Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε βαθμωτά πεδία που ορίζονται μόνο σε μια περιοχή του επιπέδου, αντί σε ολόκληρο τον \mathbb{R}^2 . Ένα παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x, y) = 1 + x + y$ και πεδίο ορισμού την ορθογώνια περιοχή

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Συχνά, βαθμωτά πεδία αυτού του είδους χρησιμεύουν για την αναπαράσταση μιας φυσικής ποσότητας, γ.π. της θερμοκρασίας, σε μια γεωγραφική περιοχή που αντιστοιχεί στη γεωμετρική περιοχή Ω .

Άλλοτε, πάλι, ο περιορισμός σε κάποιο γνήσιο υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^2 επιβάλλεται από το γεγονός ότι ο τύπος της συνάρτησης που υπεισέρχεται στον ορισμό του πεδίου δεν έχει νόημα σε όλα τα σημεία του επιπέδου. Για παράδειγμα, ο τύπος $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ δεν έχει νόημα στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Συνεπώς, ο τύπος $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του βαθμωτού πεδίου $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ στην περιοχή $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ή σε κάποιο τμήμα αυτής της περιοχής, όχι όμως και σ' ολόκληρο τον \mathbb{R}^2 . Ανάλογα, ο τύπος $\varphi(x, y) = 1/(x - y)$ δεν έχει νόημα κατά μήκος της ευθείας $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Άρα με βάση τον τύπο $\varphi(x, y) = 1/(x - y)$ μπορούμε να ορίσουμε ένα βαθμωτό πεδίο στο υποσύνολο $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ή σε κάποια μικρότερη περιοχή του \mathbb{R}^2 .

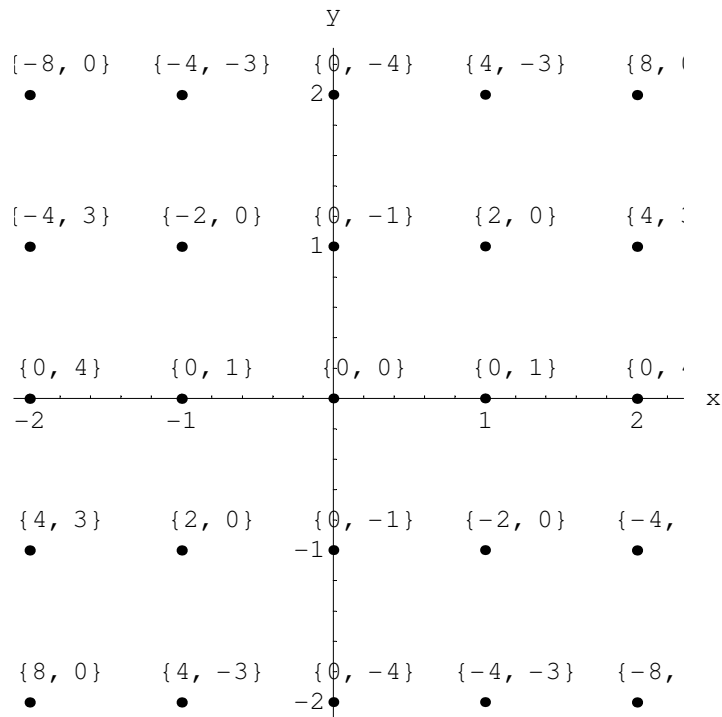
Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να δώσουμε μια γραφική αναπαράσταση ενός βαθμωτού πεδίου μιας περιοχής Ω του \mathbb{R}^2 . Ένας απ' αυτούς έγκειται στο να καταγράψουμε την τιμή της συνάρτησης $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ σε ορισμένα από τα σημεία της Ω , όπως γίνεται στο ακόλουθο σχήμα για την $f(x, y) = 2xy$.



Σχ. 1.1

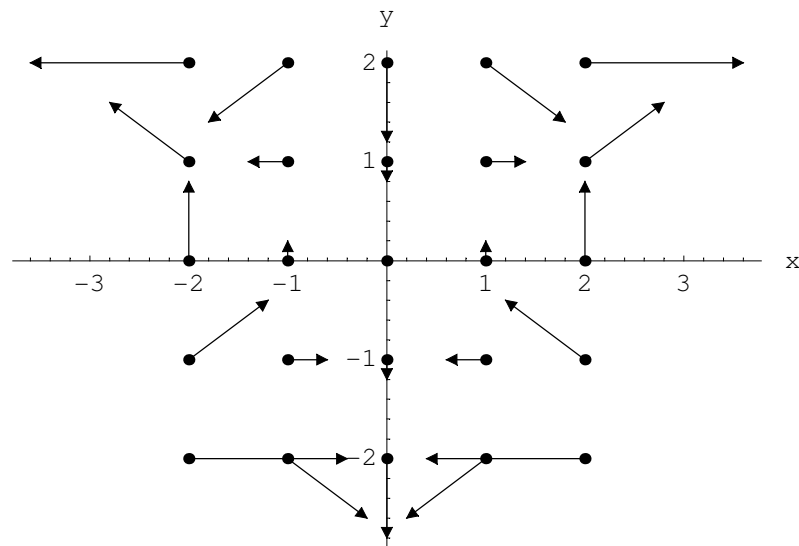
Πολλές φυσικές ποσότητες που αφορούν μια επίπεδη φυσική περιοχή προσδιορίζονται με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων και όχι μιας μόνο. Ας σκεφτούμε το παράδειγμα ενός λεπτού στρώματος κάποιου υγρού που βρίσκεται πάνω σε μια επίπεδη μεταλλική πλάκα. Για να προσδιορίσουμε την ταχύτητα των στοιχείων του υγρού, θα πρέπει να εργαστούμε ως εξής. Θεωρούμε αρχικά ότι η μεταλλική πλάκα αντιστοιχεί στην περιοχή Ω του \mathbb{R}^2 . Στη συνέχεια, δίνουμε δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού την περιοχή Ω , ας πούμε τις $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, και λέμε ότι το στοιχείο του υγρού που βρίσκεται στο σημείο (x, y) της Ω έχει ταχύτητα $\mathbf{v}(x, y)$, με συνιστώσα στην κατεύθυνση x τον αριθμό $f(x, y)$ και συνιστώσα στην κατεύθυνση y τον αριθμό $g(x, y)$. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα \mathbf{v} είναι μια συνάρτηση που η τιμή της στο σημείο $(x, y) \in \Omega$ είναι το ζευγάρι $\mathbf{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, δηλαδή ένα διάνυσμα. Αυτό το γεγονός περιγράφεται λέγοντας ότι η ταχύτητα είναι ένα **διανυσματικό πεδίο** και δηλώνεται με την έκφραση $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Για να κατασκευάσουμε μια γραφική παράσταση ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, μπορούμε να ακολουθήσουμε το παράδειγμα της γραφικής παράστασης του βαθμωτού πεδίου που δώσαμε νωρίτερα. Πιο συγκεκριμένα, αν η συνάρτηση $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τις $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, τότε αρκεί να δώσουμε τις τιμές της \mathbf{v} σε ορισμένα σημεία της περιοχής Ω . Αυτό γίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από τον τύπο $f(x, y) = 2xy$, ενώ η $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τον τύπο $g(x, y) = x^2 - y^2$, οπότε $\mathbf{v}(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (2xy, x^2 - y^2)$.



Σχ. 1.2

Εναλλακτικά, μπορούμε στα επιλεγμένα σημεία της περιοχής Ω να κατασκευάσουμε βελάκια με οριζόντια συνιστώσα τον αριθμό $f(x, y)$ και κάθετη συνιστώσα τον $g(x, y)$, όπως στο επόμενο σχήμα.



Σχ. 1.3

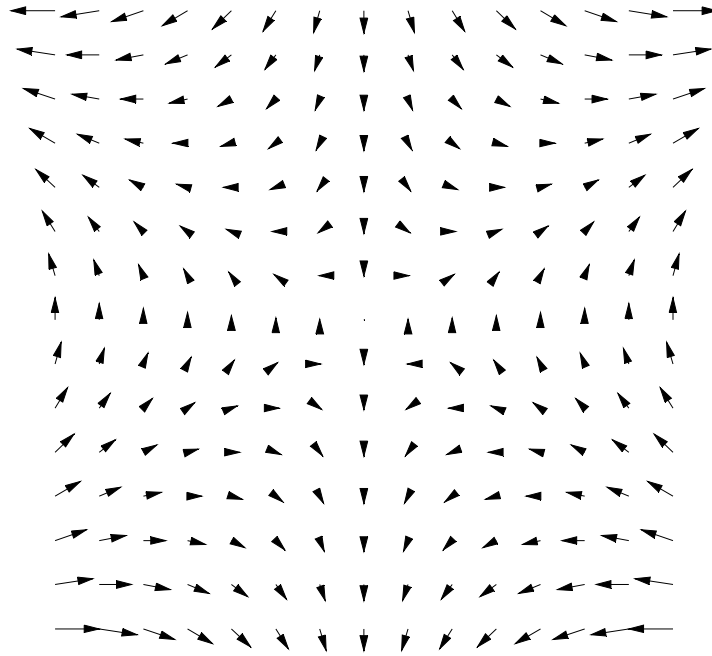
Με τη βοήθεια των σύγχρονων υπολογιστών, ακόμα και "προσωπικών" (PCs), μπορούμε να κατασκευάσουμε σχήματα που, σαν το προηγούμενο, δείχνουν βέλη που παριστάνουν τις τιμές του πεδίου σε ορισμένα, αλλά πολύ περισσότερα σημεία. Τα αποτελέσματα

τέτοιων κατασκευών φαίνονται στα δύο επόμενα σχήματα. Και τα δύο αντιστοιχούν στο παραπάνω διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v}(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$, αλλά στο πρώτο περιγράφεται η περιοχή

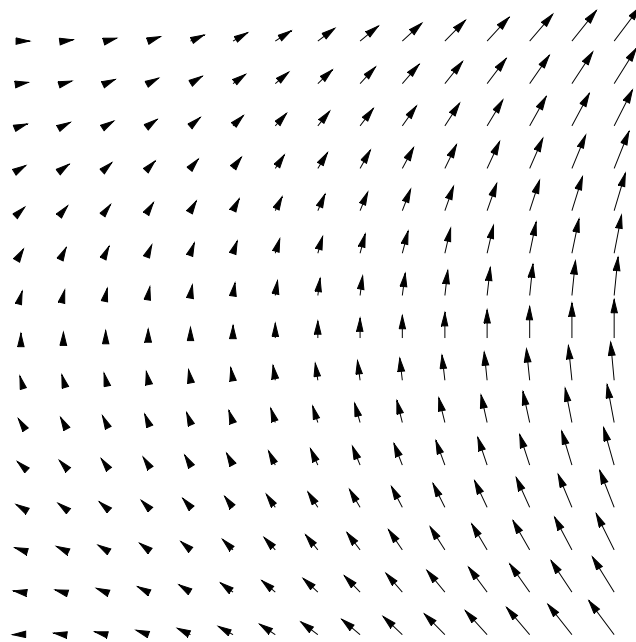
$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\},$$

ενώ στο δεύτερο η περιοχή

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x \leq 6, -2 \leq y \leq 2\}.$$



Σχ. 1.4



Σχ. 1.5

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να ορίσουμε βαθμωτά και διανυσματικά πεδία σε μια περιοχή Ω του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 . Σαν παράδειγμα βαθμωτού πεδίου που ορίζεται σε ολόκληρο τον \mathbb{R}^3 , μπορούμε να πάρουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x y z$, ή την $r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Με τη βοήθεια της τελευταίας, μπορούμε να προσδιορίσουμε την περιοχή Ω ανάμεσα σε δυο ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a και b , αντίστοιχα, γράφοντας

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < r(x, y, z) < b\}.$$

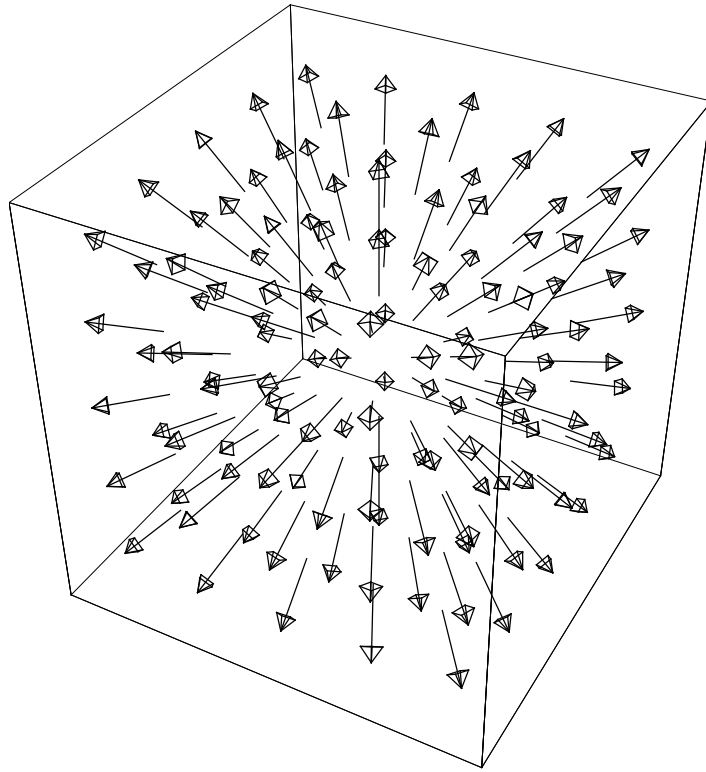
Τότε η συνάρτηση $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x, y, z) = 1/[r(x, y, z) - a][b - r(x, y, z)]$ ορίζει ένα βαθμωτό πεδίο στην περιοχή Ω .

Ένα διανυσματικό πεδίο στην περιοχή Ω του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 ορίζεται μέσω τριών βαθμωτών πεδίων της ίδιας περιοχής. Για παράδειγμα, οι παραπάνω συναρτήσεις $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, και $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουν το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\mathbf{v}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$.

Πιο συγκεκριμένα, αν $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ και οι τύποι των f, g, h είναι $f(x, y, z) = x y z$, $g(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και $h(x, y, z) = x - y + z$, αντίστοιχα, τότε $\mathbf{v}(x, y, z) = (x y z, 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x - y + z)$.

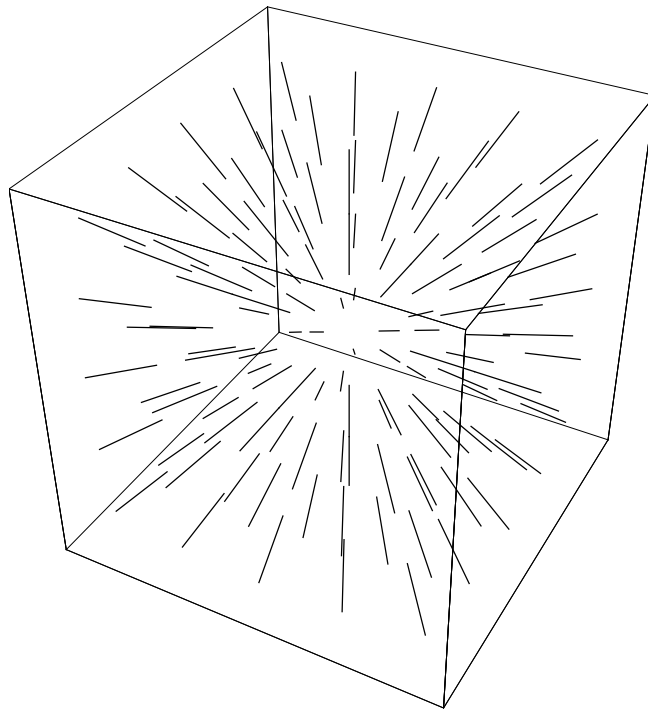
Το επόμενο σχήμα παριστάνει το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} = (x/r, y/r, z/r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, στην κυβική περιοχή

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2, r \neq 0\}$$



Σχ. 1.6

Αν παραλείψουμε την κεφαλές των βελών, το ίδιο σχήμα παίρνει την ακόλουθη μορφή:



Σχ. 1.7

Ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν σε κάθε σημείο της περιοχής Ω του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 . Με άλλα λόγια, ας υποθέσουμε ότι ορίζονται οι συναρτήσεις $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, και $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \partial_x \varphi(x, y, z)$, $g(x, y, z) = \partial_y \varphi(x, y, z)$ και $h(x, y, z) = \partial_z \varphi(x, y, z)$, αντίστοιχα.

Τότε ορίζεται αυτόματα και το διανυσματικό πεδίο $\text{grad } \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\text{grad } \varphi(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$. Αυτό το πεδίο ονομάζεται **κλίση του βαθμωτού πεδίου** φ και συχνά συμβολίζεται με $\nabla \varphi$. Έτσι, σε κάθε ομαλό βαθμωτό πεδίο $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστοιχεί το διανυσματικό πεδίο $\nabla \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου

$$(1.1) \quad \nabla \varphi(x, y, z) \equiv \text{grad } \varphi(x, y, z) := (\partial_x \varphi(x, y, z), \partial_y \varphi(x, y, z), \partial_z \varphi(x, y, z)).$$

Αν γ.π. $\varphi(x, y, z) = x y z$, τότε $\nabla \varphi(x, y, z) \equiv \text{grad } \varphi(x, y, z) = (y z, x z, x y)$.

Με ανάλογο τρόπο σε κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ αντιστοιχεί ένα βαθμωτό πεδίο, το $\text{div } \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, που ονομάζεται **απόκλιση** του \mathbf{v} . Η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου \mathbf{v} συμβολίζεται και με $\nabla \cdot \mathbf{v}$ και ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Αν $\mathbf{v}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$, τότε

$$(1.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, z) \equiv \text{div } \mathbf{v}(x, y, z) := \partial_x f(x, y, z) + \partial_y g(x, y, z) + \partial_z h(x, y, z).$$

Αν γ.π. $\mathbf{v}(x, y, z) = (x y, y z, z x)$, τότε $\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, z) \equiv \text{div } \mathbf{v}(x, y, z) = y + z + x$.

Σε κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ αντιστοιχεί αυτόματα και ένα διανυσματικό πεδίο, το $\text{curl } \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, που ονομάζεται **στροβιλισμός** του \mathbf{v} . Ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου \mathbf{v} , που συμβολίζεται και με $\nabla \times \mathbf{v}$, ορίζεται ως εξής.

Αν $\mathbf{v}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$, τότε

$$(1.3) \quad \nabla \times \mathbf{v} \equiv \text{curl } \mathbf{v} := (\partial_y h - \partial_z g, \partial_z f - \partial_x h, \partial_x g - \partial_y f)$$

Έτσι, ο στροβιλισμός του παραπάνω διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v}(x, y, z) = (x y, y z, z x)$ δίνεται από τον τύπο $\nabla \times \mathbf{v}(x, y, z) \equiv \text{curl } \mathbf{v}(x, y, z) = (-y, -z, -x) \equiv -(y, z, x)$.

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω διαδικασίες παραγωγής ενός πεδίου από ένα άλλο μπορούν να συνδυαστούν για να δώσουν ολόκληρες αλυσίδες από πεδία που ορίζονται στην ίδια περιοχή Ω του \mathbb{R}^3 . Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι οι παράγωγοι των συναρτήσεων που υπεισέρχονται στον ορισμό κάθε κρίκου της αλυσίδας υπάρχουν. Διαφορετικά, κάθε κρίκος ορίζεται σε όλο και μικρότερα υποσύνολα της περιοχής Ω .

Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης $\partial_x^2 \varphi$, $\partial_y^2 \varphi$ και $\partial_z^2 \varphi$ της συνάρτησης $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχουν σε κάθε σημείο της περιοχής Ω , τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε την απόκλιση της κλίσης του βαθμωτού πεδίου φ :

$$(1.4) \quad \nabla \cdot (\nabla \varphi) \equiv \text{div } (\text{grad } \varphi) := \partial_x (\partial_x \varphi) + \partial_y (\partial_y \varphi) + \partial_z (\partial_z \varphi) \equiv \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi$$

Ο τελευταίος συνδυασμός των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης ενός βαθμωτού πεδίου φ συναντιέται συχνά στην ανάλυση των πεδίων και γι αυτό αναφέρεται με ξεχωριστό

σύμβολο και όνομα. Λέγεται **πεδίο Laplace** (Λαπλάς) του φ και συμβολίζεται με $\nabla^2 \varphi$ ή με $\Delta \varphi$. Με άλλα λόγια,

$$(1.5) \quad \nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi := \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi .$$

Έτσι, η προηγούμενη σχέση μπορεί πλέον να γραφτεί σαν

$$(1.6) \quad \nabla \cdot (\nabla \varphi) \equiv \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = \nabla^2 \varphi .$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε το στροβιλισμό της κλίσης του βαθμωτού πεδίου $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους ορισμούς, βρίσκουμε ότι

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \nabla \times (\nabla \varphi) &\equiv \operatorname{curl} (\operatorname{grad} \varphi) \\ &= (\partial_y (\partial_z \varphi) - \partial_z (\partial_y \varphi), \partial_z (\partial_x \varphi) - \partial_x (\partial_z \varphi), \partial_x (\partial_y \varphi) - \partial_y (\partial_x \varphi)) \end{aligned}$$

Όμως, για μια συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης η σειρά παραγώγισης δεν παίζει κανένα ρόλο. Άρα, και οι τρεις συνιστώσες του τελευταίου διανύσματος μηδενίζονται ταυτοτικά. Με άλλα λόγια,

$$(1.8) \quad \nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \operatorname{curl} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

Δηλαδή, ο στροβιλισμός της κλίσης ενός βαθμωτού πεδίου $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μηδενικός σε κάθε σημείο της περιοχής Ω όπου το πεδίο φ είναι ομαλό.

Παράδειγμα

(α) Ας θεωρήσουμε το βαθμωτό πεδίο $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(1.9) \quad r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Η κλίση αυτού του πεδίου ορίζεται μόνο στο υποσύνολο $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ και δίνεται από την έκφραση

$$(1.10) \quad \nabla r(x, y, z) \equiv \operatorname{grad} r(x, y, z) = (x/r(x, y, z), y/r(x, y, z), z/r(x, y, z)) .$$

Από την ταυτότητα που μόλις αποδείξαμε έπεται αμέσως ότι $\nabla \times (\nabla r) \equiv \operatorname{curl} (\operatorname{grad} r) = 0$ σε κάθε σημείο της περιοχής Ω .

(β) Γενικεύοντας, ας θεωρήσουμε ένα βαθμωτό πεδίο $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(1.11) \quad \varphi(x, y, z) = F(r(x, y, z)),$$

όπου $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία ομαλή συνάρτηση και $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, όπως παραπάνω. Τότε,

$$(1.12) \quad \nabla \varphi(x, y, z) \equiv \operatorname{grad} \varphi(x, y, z) = F'(r) (x/r, y/r, z/r),$$

όπου $r = r(x, y, z)$ και $F'(r)$ η πρώτη παράγωγος της $F(r)$.

Ανάλογα με τον ακριβή τύπο της συνάρτησης F , το διανυσματικό πεδίο $\nabla \varphi$ ορίζεται σ' όλο τον \mathbb{R}^3 ή μόνο σε κάποιο υποσύνολό του. Αν γ.π. $F(r) = r^2$, τότε

$\varphi(x, y, z) = F(r(x, y, z)) = x^2 + y^2 + z^2$. Άρα η κλίση του πεδίου φ δίνεται από τον τύπο $\nabla\varphi(x, y, z) = 2(x, y, z)$ και ορίζεται σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^3 .

Αντίθετα, όταν $F(r) = 1/r$, τότε η κλίση του πεδίου φ ορίζεται μόνο στην περιοχή $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ και δίνεται από την έκφραση $\nabla\varphi(x, y, z) = -(x/r^3, y/r^3, z/r^3)$. Και στις δυο περιπτώσεις, $\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \text{curl}(\text{grad } \varphi) = 0$.

Συγκεκριμένο φυσικό παράδειγμα που αντιστοιχεί στην τελευταία περίπτωση είναι το **ηλεκτρικό δυναμικό** Φ που αντιστοιχεί σ' ένα σωματίο με φορτίο Q που ακινητεί στην αρχή των αξόνων:

$$(1.13) \quad \Phi(x, y, z) = \frac{Q}{r}$$

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} ορίζεται από τη σχέση

$$(1.14) \quad \mathbf{E}(x, y, z) := -\nabla\Phi(x, y, z).$$

Συνεπώς,

$$(1.15) \quad \mathbf{E}(x, y, z) := Q(x/r^3, y/r^3, z/r^3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} E_x &= Q \frac{x}{r^3} \\ E_y &= Q \frac{y}{r^3} \\ E_z &= Q \frac{z}{r^3} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τη φυσική θεωρία του ηλεκτρισμού, αν ένα σωματίο με φορτίο q βρίσκεται στο σημείο p με συντεταγμένες $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, τότε υφίσταται την δύναμη

$$(1.16) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = q\mathbf{E}(x, y, z) = Qq(x/r^3, y/r^3, z/r^3).$$

Αυτή η σχέση εκφράζει τον λεγόμενο **νόμο (του) Coulomb** (Κουλόμ). ■

Ας αναδιατυπώσουμε την πρόταση που αποδείξαμε παραπάνω: Αν δοθεί το ομαλό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ και υπάρχει βαθμωτό πεδίο $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιο που $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, τότε $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ σε κάθε σημείο της περιοχής Ω . Είναι σημαντικό ότι ισχύει, εν μέρει, και το αντίστροφο αυτής της πρότασης. Δηλαδή, αν ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο της περιοχής Ω , τότε υπάρχει βαθμωτό πεδίο $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιο που $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ σε κάθε σημείο ενός τμήματος Ω_1 της περιοχής Ω . Το πεδίο φ ονομάζεται σ' αυτή την περίπτωση **βαθμωτό δυναμικό του διανυσματικού πεδίου \mathbf{v}** .

Ένα άλλο πεδίο που μηδενίζεται ταυτοτικά είναι η απόκλιση του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου \mathbf{v} . Με άλλα λόγια, για κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ισχύει ότι

$$(1.17) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \equiv \text{div}(\text{curl } \mathbf{v}) = 0.$$

Αυτή η ταυτότητα αποδειγνεται εύκολα με βάση τους αντίστοιχους ορισμούς. Εδώ θα περιοριστούμε στο να την εκφράσουμε στη μορφή της ακόλουθης πρότασης. Αν δοθεί ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ και υπάρχει ένα άλλο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοιο που $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$, τότε $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ σε κάθε σημείο της περιοχής Ω . Και αυτής της πρότασης

ισχύει το αντίστροφο, με την εξής περιορισμένη έννοια. Αν η απόκλιση του ομαλού διανυσματικού πεδίου $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο της περιοχής Ω , αν δηλαδή $\nabla \cdot w = 0$, τότε υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο $v : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοιο που $w = \nabla \times v$ σε κάποιο τμήμα Ω_1 της περιοχής Ω . Σ' αυτή την περίπτωση, το πεδίο v ονομάζεται *διανυσματικό δυναμικό του πεδίου w* .

8.2 Θεωρία βαθμωτών και διανυσματικών πεδίων του \mathbb{R}^3

Ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί το ομαλό διανυσματικό πεδίο $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Τότε μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε το βαθμωτό πεδίο $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο τον

$$\alpha(x, y, z) = \nabla \cdot v(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

καθώς και το διανυσματικό πεδίο $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο τον

$$\sigma(x, y, z) = \nabla \times v(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

Το ερώτημα που αμέσως ανακύπτει από αυτή την κατασκευή είναι κατά πόσο είναι δυνατό να αντιστρέψουμε την παραπάνω διαδικασία. Με άλλα λόγια, αν υποτεθεί ότι μας δίνεται το βαθμωτό πεδίο $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μαζί με το διανυσματικό πεδίο $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, μπορούμε να βρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοιο που

$$(2.1) \quad \nabla \cdot v(x, y, z) = \rho(x, y, z) \text{ και } \nabla \times v(x, y, z) = w(x, y, z)$$

σε κάθε σημείο της περιοχής Ω ;

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το πρόβλημα που μόλις διατυπώσαμε ταυτίζεται, από μαθηματική άποψη, με την επίλυση ενός συστήματος από μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) πρώτης τάξης. Για να φανεί αυτό καθαρά, αρκεί να γράψουμε αναλυτικά τις συνιστώσες των πεδίων v, w καθώς και τις εκφράσεις για τις ποσότητες $\nabla \cdot v$ και $\nabla \times v$. Αν, λοιπόν,

$$(2.2) \quad v = (f, g, h) \text{ και } w = (a, b, c),$$

τότε οι εξισώσεις $\nabla \cdot v = \rho$, $\nabla \times v = w$ γράφονται αναλυτικά ως εξής (για ευκολία παραλείπουμε την ένδειξη (x, y, z)).

$$(2.3) \quad \nabla \cdot v = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \partial_x f + \partial_y g + \partial_z h = \rho$$

$$(2.4) \quad \nabla \times v = w \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \partial_y h - \partial_z g = a \\ \partial_z f - \partial_x h = b \\ \partial_x g - \partial_y f = c \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα φαίνεται υπερκαθορισμένο, με την έννοια ότι απαρτίζεται από τέσσερες εξισώσεις ενώ οι άγνωστες συναρτήσεις είναι μόνο τρεις. Πριν αντιμετωπίσουμε αυτό το ζήτημα, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις a, b, c δεν μπορούν να επιλέγονται τελείως ελεύθερα. Κι αυτό γιατί η ταυτότητα $\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$ συνεπάγεται ότι οι παραπάνω συναρτήσεις πρέπει να ικανοποιούν συνθήκη $\partial_x a + \partial_y b + \partial_z c = 0$. Όταν αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, η θεωρία των συστημάτων ΜΔΕ πρώτης τάξης μας εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης των εξ. (2.4)

Επανερχόμενοι στο αρχικό ζήτημα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει μια λύση \mathbf{v}_1 των εξισώσεων (2. 4) και ότι

$$(2. 5) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = \tau \neq \rho.$$

Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$(2. 6) \quad \bar{\mathbf{v}}_1 := \mathbf{v}_1 + \nabla \Psi,$$

όπου Ψ τυχαία ομαλή συνάρτηση και να παρατηρήσουμε αρχικά ότι

$$(2. 7) \quad \nabla \times \bar{\mathbf{v}}_1 = \nabla \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{w}.$$

Από την άλλη μεριά,

$$(2. 8) \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 = \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla(\nabla \Psi) = \tau + \nabla^2 \Psi$$

Αν, λοιπόν, η αρχικά τυχαία συνάρτηση Ψ επιλεγεί έτσι ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(2. 9) \quad \nabla^2 \Psi = \sigma := \rho - \tau,$$

τότε το πεδίο $\bar{\mathbf{v}}_1$ θα είναι λύση της ΜΔΕ

$$(2. 10) \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 = \rho.$$

Με άλλα λόγια το νέο πεδίο $\bar{\mathbf{v}}_1$ θα ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων (2. 3) και (2. 4).

Η μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) δεύτερης τάξης

$$(2. 11) \quad \nabla^2 \Psi = \sigma$$

είναι γνωστή ως *εξίσωση Poisson* (Πουασόν), ή ως *μη ομογενής εξίσωση Laplace*. Ένα βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας των ΜΔΕ είναι ότι, για οποιαδήποτε ομαλή συνάρτηση σ , η εξίσωση Poisson έχει πάντοτε λύση. Αυτό σημαίνει ότι και το σύστημα (2. 3) - (2. 4) έχει λύση, παρά το γεγονός ότι είναι υπερκαθορισμένο.

Θεωρούμε στη συνέχεια τα συστήματα

$$(2. 12) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{v}_1 = 0.$$

και

$$(2. 13) \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}.$$

Από την προηγούμενη ανάλυση έπεται ότι και τα δυο αυτά συστήματα έχουν λύση. Συνακόλουθα το διανυσματικό πεδίο

$$(2. 14) \quad \mathbf{v} := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων (2. 3) και (2. 4). Με άλλα λόγια, έχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση:

Κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο \mathbf{v} του \mathbb{R}^3 μπορεί να θεωρηθεί, τοπικά τουλάχιστον, σαν το άθροισμα δύο άλλων, των \mathbf{v}_1 και \mathbf{v}_2 , από τα οποία το πρώτο είναι *αστρόβιλο* ($\nabla \times \mathbf{v}_1 = 0$)

και το δεύτερο *ασυμπίεστο* ($\nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0$).

Ο τελευταίος όρος πηγάζει από τη φυσική των ρευστών, όπου ένα ρευστό ονομάζεται ασυμπίεστο όταν το διάνυσμα της ταχύτητάς του, \mathbf{v} , ικανοποιεί τη συνθήκη $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

8.3 Το στατικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Σύμφωνα με τη θεωρία που είχε ήδη αναπτυχθεί στα μέσα του 19^{ου} αιώνα, τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα που δεν παρουσιάζουν χρονική μεταβολή μπορούν να περιγραφτούν με τη βοήθεια ενός αστρόβιλου πεδίου, \mathbf{E} , κι ενός ασυμπίεστου, \mathbf{B} , που τα ονομάζουμε *ηλεκτρικό* και *μαγνητικό πεδίο*, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η απόκλιση του πρώτου και ο στροβιλισμός του δεύτερου μπορούν να προσδιοριστούν ελεύθερα, οπότε οι εξισώσεις που ικανοποιούν τα πεδία $\mathbf{E}(x, y, z)$, $\mathbf{B}(x, y, z)$ παίρνουν την ακόλουθη μορφή.

$$(3.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

$$(3.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Η συνάρτηση $\rho = \rho(x, y, z)$ ονομάζεται *πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου* και έχει διάσταση esu/cm^3 . Η μονάδα esu (electrostatic unit = ηλεκτροστατική μονάδα), που συμβολίζεται και με sCoul (static Coulomb = στατικό Κουλόμ(π)), ορίζεται με βάση τον τύπο $|F| = Qq/r^2$ για το μέτρο της δύναμης που ασκεί ένα σημειακό φορτίο Q σ' ένα δεύτερο q που βρίσκεται σε απόσταση r από το πρώτο. Αυτό σημαίνει ότι $(\text{esu})^2 = \text{cm}^2 \cdot \text{dyne} = \text{gr} \cdot \text{cm}^3/\text{sec}^2$.

Η σταθερή c έχει διάσταση ταχύτητας και, σε πάρα πολύ καλή προσέγγιση, είναι ίση με $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$. Όπως θα δούμε στο επόμενο εδάφιο, αντιπροσωπεύει την ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων - άρα και του φωτός - στο κενό.

Η συνάρτηση $\mathbf{J}(x, y, z)$ ονομάζεται *πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος*. Η διάστασή της είναι ίδια μ' εκείνη του γινόμενου (πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου) \times (ταχύτητα), δηλαδή $(\text{esu}/\text{cm}^3) \cdot (\text{cm}/\text{sec}) = \text{esu}/(\text{cm}^2 \cdot \text{sec})$.

Από τις εξισώσεις (3.1) και (3.2) έπεται ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν την ίδια διάσταση, esu/cm^2 .

Μια άλλη μορφή των εξισώσεων του στατικού ηλεκτρομαγνητισμού προκύπτει με την εισαγωγή δυναμικών για τα πεδία \mathbf{E} και \mathbf{B} . Για το πρώτο, παρατηρούμε ότι η εξίσωση $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα βαθμωτό πεδίο $\Phi(x, y, z)$, τέτοιο που

$$(3.3) \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi.$$

Σημειώνουμε ότι το αρνητικό πρόσημο σ' αυτή τη σχέση είναι απλώς καθιερωμένη σύμβαση και προχωράμε στην αντικατάστασή της στην $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση Poisson

$$(3.4) \quad \nabla^2\Phi = -4\pi\rho.$$

Ανάλογα, η εξίσωση $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}(x, y, z)$, τέτοιο που

$$(3.5) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για το μαγνητικό πεδίο στην εξίσωση $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$ δίνει την

$$(3.6) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Τώρα, είναι εύκολο να δειχτεί ότι

$$(3.7) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

όπου το σύμβολο $\nabla^2 \mathbf{A}$ έχει το ακόλουθο νόημα. Αν $\mathbf{A} = (X, Y, Z)$ τότε $\nabla^2 \mathbf{A} \equiv (\nabla^2 X, \nabla^2 Y, \nabla^2 Z)$. Κατά συνέπεια, η εξ. (3.6) είναι ισοδύναμη με την

$$(3.8) \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Θα δείξουμε ευθύς αμέσως ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το δυναμικό \mathbf{A} μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Με βάση αυτή την επιλογή, η εξίσωση (3.8) γίνεται

$$(3.9) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε βρει μια λύση της εξ. (3.6) που δεν ικανοποιεί τη συνθήκη $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Δηλαδή $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sigma \neq 0$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το δυναμικό $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$, όπου $\Psi(x, y, z)$ μια ομαλή συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση $\nabla^2 \Psi = -\sigma$. Κατά συνέπεια, θα έχουμε

$$(3.10) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Psi = 0.$$

και

$$(3.11) \quad \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Psi) = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Η αντικατάσταση της έκφρασης $\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla \Psi$ στο αριστερό μέλος της (3.8) δίνει

$$(3.12) \quad \nabla[\nabla \cdot (\mathbf{A}' - \nabla \Psi)] - \nabla^2 (\mathbf{A}' - \nabla \Psi) = -\nabla(\nabla^2 \Psi) - \nabla^2 \mathbf{A}' + \nabla^2 (\nabla \Psi) = -\nabla^2 \mathbf{A}'.$$

Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό \mathbf{A}' ικανοποιεί την (3.9). Από την άλλη, η (3.11) συνεπάγεται ότι

$$(3.13) \quad \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B},$$

και άρα έχει αποδειχτεί ότι το δυναμικό για το μαγνητικό πεδίο μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την (τριάδα των εξισώσεων Poisson) (3.9).

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου ενός σφαιρικού μη μεταλλικού

σώματος ακτίνας a είναι σταθερή. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου, όταν το συνολικό φορτίο της σφαίρας είναι Q .

Λύση

Θεωρούμε ότι το κέντρο της φορτισμένης σφαίρας ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων του Καρτεσιανού συστήματος x - y - z . Αφού ο όγκος της σφαίρας είναι ίσος με $V = (4/3)\pi a^3$, η πυκνότητα του φορτίου στο εσωτερικό της σφαίρας είναι ίση με $\rho_0 = 3Q/4\pi a^3$. Συνακόλουθα, η συνάρτηση $\rho(x, y, z)$ έχει την ακόλουθη μορφή

$$(3.14) \quad \rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Θα πρέπει να είναι προφανές ότι τόσο το ηλεκτρικό δυναμικό, Φ , όσο και το ηλεκτρικό πεδίο, \mathbf{E} , θα εξαρτώνται μόνο από την απόσταση r του τυχαίου σημείου (x, y, z) από το κέντρο της σφαίρας και όχι από τις επιμέρους τιμές των Καρτεσιανών συντεταγμένων του. Γι αυτό μεταφερόμαστε στις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) , οπότε η συνάρτηση του δυναμικού $\Phi(x, y, z)$ μετατρέπεται στην $\varphi(r, \theta, \varphi)$. Αφού, όπως επισημάναμε, το δυναμικό θα εξαρτιέται μόνο από το r , έπεται ότι $\varphi(r, \theta, \varphi) = \varphi(r)$.

Στις σφαιρικές συντεταγμένες ο τελεστής Laplace έχει την ακόλουθη μορφή

$$(3.15) \quad \nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $\varphi(r)$ πρέπει να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(3.16) \quad \varphi'' + 2\varphi'/r = \alpha(r) = \begin{cases} -4\pi\rho_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Θέτουμε $\varphi' = \psi$, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$(3.17) \quad \psi' + 2\psi/r = \alpha(r).$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (3.17) με r^2 , παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

$$(3.18) \quad r^2 \psi' + 2r\psi \equiv (r^2 \psi)' = r^2 \alpha(r).$$

Όταν $\alpha(r) = -4\pi\rho_0$, η λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$(3.19) \quad r^2 \psi = -\frac{4\pi\rho_0}{3} r^3 + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \psi = -\frac{4\pi\rho_0}{3} r + \frac{C_1}{r^2}.$$

Ολοκληρώνοντας άλλη μια φορά, βρίσκουμε ότι

$$(3.20) \quad \varphi(r) = -\frac{2\pi\rho_0}{3} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Προφανώς, αυτή η έκφραση δεν έχει νόημα για $r = 0$, παρά μόνο όταν $C_1 \equiv 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$(3.21) \quad \varphi(r) = -\frac{2\pi\rho_0}{3} r^2 + C_2 = -\frac{Q}{2a^3} r^2 + C_2, \quad r \leq a.$$

Ανάλογα,

$$(3.22) \quad \varphi(r) = -\frac{C_1}{r} + C_3, \quad r > a.$$

Χωρίς να επηρεάζεται το τελικό αποτέλεσμα, μπορούμε να θέσουμε $C_3 = 0$. Αν απαιτήσουμε η $\varphi(r)$ και η παράγωγός της να είναι συνεχείς στο $r = a$, τότε θα έχουμε και τις εξής συνθήκες:

$$(3.23) \quad -\frac{Q}{2a} + C_2 = -\frac{C_1}{a}, \quad -\frac{Q}{a^2} = \frac{C_1}{a^2}.$$

Άρα,

$$(3.24) \quad C_1 = -Q, \quad C_2 = \frac{3Q}{2a}$$

και η τελική μορφή της $\varphi(r)$ γίνεται

$$(3.25) \quad \varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2a^3} (3a^2 - r^2), & r \leq a \\ \frac{Q}{r}, & r \geq a \end{cases}$$

Αρκεί, τώρα, να θυμηθούμε τη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ για να διαπιστώσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα δίνεται από την ακόλουθη έκφραση.

$$(3.26) \quad \mathbf{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q}{a^3} \mathbf{r}, & r \leq a \\ \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, & r \geq a \end{cases}, \quad \mathbf{r} = (x, y, z),$$

Από τη σύγκριση αυτής της έκφρασης με την (3.15), συνάγεται ότι στο "κενό", δηλαδή στην περιοχή $r > a$, το πεδίο που παράγεται από τη φορτισμένη σφαίρα είναι ίδιο μ' εκείνο ενός σωμάτιου που βρίσκεται στο κέντρο της και έχει φορτίο ίσο προς το συνολικό φορτίο της σφαίρας.

Παράδειγμα

Θεωρούμε έναν κυλινδρικό αγωγό ρεύματος με ακτίνα διατομής a . Ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής πυκνότητας J_0 διατρέχει τον αγωγό στην κατεύθυνση του άξονα συμμετρίας του. Ζητείται να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου.

Λύση

Θεωρούμε ότι ο άξονας συμμετρίας του αγωγού ταυτίζεται με τον άξονα z του Καρτεσιανού συστήματος x - y - z . Έτσι, η διανυσματική συνάρτηση της πυκνότητας του ρεύματος παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$(3.27) \quad J_x(x, y, z) = J_y(x, y, z) = 0, \quad J_z(x, y, z) = \begin{cases} J_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Συνακόλουθα, η εξίσωση (3.9) γίνεται

$$(3.28) \quad \nabla^2 A_x = 0, \quad \nabla^2 A_y = 0, \quad \nabla^2 A_z = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} J_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Επειδή εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι το μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} , δε χάνουμε σε γενικότητα αν επιλέξουμε την τετριμμένη λύση $A_x(x, y, z) = A_y(x, y, z) = 0$ για τις δύο πρώτες των (3. 28). Από την άλλη, η κυλινδρική μορφή της πηγής (αγωγού) ωθεί στην εισαγωγή των κυλινδρικών συντεταγμένων (r, φ, z) . Σ' αυτές, ο τελεστής Laplace έχει την ακόλουθη μορφή

$$(3. 29) \quad \nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2.$$

Τώρα, αν $H(r, \varphi, z) = A_z(x, y, z)$, τότε από τα δοσμένα του προβλήματος αναμένουμε ότι $H(r, \varphi, z) = H(r)$. Συνεπώς, η τρίτη από τις ΜΔΕ (3. 27) ανάγεται στην

$$(3. 30) \quad H'' + \frac{1}{r} H' = \alpha(r) = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} J_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$(3. 31) \quad (r H')' = r \alpha(r).$$

Αυτή ολοκληρώνεται εύκολα και δίνει

$$(3. 32) \quad H(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{c} J_0 r^2 + C_1 \ln r + C_2, & r \leq a \\ C_3 \ln r + C_4, & r > a \end{cases}$$

Η λογαριθμική συνάρτηση απειρίζεται τόσο για $r \rightarrow 0$, όσο και για $r \rightarrow \infty$. Όμως, δεν ισχύει το ίδιο και για την παράγωγό της, που μας χρειάζεται για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου. Αυτή μηδενίζεται καθώς το $r \rightarrow \infty$. Γι αυτό, επιλέγουμε τη σταθερές ολοκλήρωσης C_1 να είναι ίση με το μηδέν. Επιπλέον, απαιτούμε από την $H(r)$ να είναι ομαλή στο $r = a$, πράγμα που ισοδυναμεί με τις ακόλουθες συνθήκες:

$$(3. 33) \quad -\frac{\pi}{c} J_0 a^2 + C_2 = C_3 \ln a + C_4, \quad -\frac{2\pi}{c} J_0 a = C_3 \frac{1}{a}$$

Κατά συνέπεια, η (3. 32) γίνεται

$$(3. 34) \quad H(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{c} J_0 r^2 + C_2, & r \leq a \\ -\frac{2\pi}{c} J_0 a^2 \ln(r/a) - \frac{\pi}{c} J_0 a^2 + C_2, & r > a \end{cases}$$

Το εμβαδόν της διατομής του αγωγού είναι ίσο με πa^2 . Το γινόμενο $I = \pi a^2 J_0$ δίνει το ρεύμα του αγωγού. Επιπλέον, δεν επηρεάζουμε το μαγνητικό πεδίο αν θέσουμε $C_2 = 0$. Από αυτές τις παρατηρήσεις έπεται ότι η λύση μας για το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} παίρνει την ακόλουθη τελική μορφή:

$$(3. 35) \quad A_x(x, y, z) = A_y(x, y, z) = 0, \quad A_z(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{I}{c} \left(\frac{r}{a}\right)^2, & r \leq a \\ -\frac{I}{c} [1 + 2 \ln(r/a)], & r > a \end{cases}$$

Τέλος, από τον τύπο $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ και τις (3. 35), βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου έχουν ως εξής:

$$(3. 36a) \quad B_x(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{2I}{c} \frac{y}{a^2}, & r \leq a \\ -\frac{2I}{c} \frac{y}{r^2}, & r > a \end{cases}$$

$$(3.36\beta) \quad B_y(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2I}{c} \frac{x}{a^2}, & r \leq a \\ \frac{2I}{c} \frac{x}{r^2}, & r > a \end{cases}$$

$$(3.36\gamma) \quad B_z(x, y, z) = 0.$$

8.4 Το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Όταν οι λεγόμενες *πηγές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου* ρ και \mathbf{J} αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, δεν μπορεί παρά και το ίδιο το πεδίο να μεταβάλλεται. Με άλλα λόγια, όταν $\rho = \rho(x, y, z, t)$ και $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, y, z, t)$, τότε υποχρεωτικά $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ και $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$. Το ερώτημα που προκύπτει σ' αυτή την περίπτωση είναι κατά πόσο οι εξισώσεις του χρονικά εξαρτημένου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι ίδιες μ' εκείνες του στατικού.

Κάτι τέτοιο δεν αποκλείεται από μαθηματική άποψη, αλλά θα σήμαινε ότι κάθε αλλαγή στην κατανομή των φορτίων και των ρευμάτων θα επέφερε μια ακαριαία αλλαγή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε όλη την περιοχή του \mathbb{R}^3 στην οποία αυτό το πεδίο οριζόταν αρχικά. Ισοδύναμα, το ηλεκτρικό πεδίο θα παρέμενε ανεξάρτητο από το ηλεκτρικό, οπότε μια τοπική αλλαγή του ενός δεν θα επηρέαζε το άλλο.

Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει τοπικά το ηλεκτρικό πεδίο εκφράζεται από την παράγωγό του ως προς το χρόνο, δηλαδή από την ποσότητα $\partial_t \mathbf{E}(x, y, z, t)$. Ανάλογα, ο ρυθμός αλλαγής του μαγνητικού πεδίου εκφράζεται από τη μερική παράγωγο $\partial_t \mathbf{B}(x, y, z, t)$. Έτσι, το ερώτημα αν οι τοπικές αλλαγές του ηλεκτρικού πεδίου επηρεάζουν το μαγνητικό και αντίστροφα ισοδυναμεί με το ερώτημα αν οι ποσότητες $\partial_t \mathbf{E}$ και $\partial_t \mathbf{B}$ υπεισέρχονται στις εξισώσεις πεδίου. Η απάντηση που δόθηκε στο τελευταίο ερώτημα από τους φυσικούς του 19^{ου} αιώνα είναι θετική και στην τελική της μορφή εκφράζεται από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων.

$$(4.1) \quad \boxed{\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \end{aligned}}$$

Αυτές είναι οι περίφημες *εξισώσεις (του) Maxwell*. Δύο από τις βασικές τους συνέπειες είναι ο νόμος της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου εκφράζεται από την εξίσωση

$$(4.2) \quad \boxed{\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0}$$

που αποδεικνύεται ως εξής. Με βάση την ταυτότητα $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$, η τελευταία από τις εξισώσεις Maxwell δίνει τη σχέση $4\pi \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\partial_t \mathbf{E}) = 0$. Αυτή γράφεται και σαν $4\pi \nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$, αφού η σειρά παραγωγίσισης μιας ομαλής συνάρτησης δεν επηρεάζει το

αποτέλεσμα. Τέλος, η χρήση της δεύτερης από τις εξισώσεις Maxwell οδηγεί αμέσως στην εξίσωση διατήρησης του φορτίου.

Για να δούμε τη δεύτερη συνέπεια των εξισώσεων Maxwell, ξεκινάμε από την $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ που συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα χρονικά εξαρτώμενο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, τέτοιο που

$$(4.3) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στην πρώτη εξίσωση Maxwell και, χρησιμοποιώντας την ισότητα $\partial_t (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\partial_t \mathbf{A})$, καταλήγουμε στην

$$(4.4) \quad \nabla \times (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}) = 0.$$

Αυτή, με τη σειρά της, συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα χρονικά εξαρτώμενο βαθμωτό πεδίο $\Phi(x, y, z, t)$, τέτοιο που

$$(4.5) \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \Phi.$$

(Το αρνητικό πρόσημο είναι θέμα σύμβασης). Ισοδύναμα,

$$(4.6) \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi.$$

Στο σημείο αυτό ανοίγουμε παρένθεση για να επισημάνουμε το εξής. Από τη στιγμή που έχουμε έναν τρόπο για να προσδιορίζουμε το ζευγάρι των δυναμικών (\mathbf{A}, Φ) , οι εξισώσεις (4.3) και (4.5) μας επιτρέπουν να βρίσκουμε τα πεδία \mathbf{E} και \mathbf{B} με απλή παραγωγή. Αλλά τρόπος για να προσδιορίζουμε το τα δυναμικά \mathbf{A}, Φ υπάρχει και δίνεται ευθύς αμέσως.

Η αντικατάσταση της έκφρασης (4.6) για το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} στη δεύτερη εξίσωση Maxwell δίνει την

$$(4.7) \quad \nabla \cdot (\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} + \nabla \Phi) = -4\pi \rho.$$

Όμως, $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi$. Άρα, η προηγούμενη αξίσωση γράφεται και σαν

$$(4.8) \quad \nabla \cdot (\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}) + \nabla^2 \Phi = -4\pi \rho.$$

Τέλος, η αντικατάσταση των εκφράσεων για τα πεδία \mathbf{E} και \mathbf{B} στην τελευταία εξίσωση Maxwell δίνει την

$$(4.9) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \partial_t (\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} + \nabla \Phi).$$

Η ταυτότητα $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ μας επιτρέπει να γράψουμε την τελευταία εξίσωση στη μορφή

$$(4.10) \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

και να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα.

Με δοσμένες τις συναρτήσεις ρ και \mathbf{J} , οι (4.8) και (4.10) αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων ΜΔΕ δεύτερης τάξης για την τετράδα των συναρτήσεων που ορίζουν τα δυναμικά \mathbf{A} και Φ . Επειδή αυτές οι εξισώσεις είναι συζευγμένες, η επίλυση του συστήματος (4.8)-(4.10)

είναι πολύ δύσκολη υπόθεση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως, τα πράγματα δεν είναι τόσο περίπλοκα όσο φαίνονται αρχικά. Για να το διαπιστώσουμε, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν έλειπε ο όρος $\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} + \nabla \Phi$ από την (4. 10) όχι μόνο αυτή η ίδια θα ήταν απλούστερη, αλλά θα έπαυε να είναι και συζευγμένη με την (4. 8).

Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν λύσεις του συστήματος (4. 8) και (4. 10) που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$(4. 11) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = 0}$$

Όταν ικανοποιείται αυτή τη συνθήκη, η εξ.(4. 10) γίνεται

$$(4. 12) \quad \boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}},$$

ενώ η (4. 8) ανάγεται στην

$$(4. 13) \quad \boxed{\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi = -4\pi \rho}.$$

Το αποτέλεσμα είναι καταπληκτικό! Γιατί, όχι μόνο άρθηκε η σύζευξη των τριών εξισώσεων για το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} από εκείνη για το βαθμωτό Φ , αλλά και οι τέσσερες εξισώσεις ανάχθηκαν σε μία - στην διαφορική *εξίσωση (του) d' Alembert* (Ντ' Αλαμπέρ)

$$(4. 14) \quad c^2 \nabla^2 u - \partial_t^2 u = f,$$

στην οποία η $f = f(x, y, z, t)$ είναι κάποια γνωστή συνάρτηση και η $u = u(x, y, z, t)$ άγνωστη.

Κι αυτό γιατί, όπως επανειλημμένα έχουμε τονίσει, η (4. 12) δεν είναι παρά μια συντομογραφία για τρεις εξισώσεις -μία για κάθε μια από τις τρεις συνιστώσες του πεδίου \mathbf{A} . Αν γ.π. συμβολίσουμε τις τελευταίες με (A_x, A_y, A_z) και τις αντίστοιχες συνιστώσες της πυκνότητας ρεύματος \mathbf{J} με (J_x, J_y, J_z) , τότε η (4. 12) αποτελεί την απλουστευμένη γραφή των τριών εξισώσεων

$$(4. 15\alpha) \quad c^2 \nabla^2 A_x - \partial_t^2 A_x = -4\pi c J_x$$

$$(4. 15\beta) \quad c^2 \nabla^2 A_y - \partial_t^2 A_y = -4\pi c J_y$$

$$(4. 15\gamma) \quad c^2 \nabla^2 A_z - \partial_t^2 A_z = -4\pi c J_z$$

Προφανώς, μένει να εξετάσουμε κατά πόσο οι λύσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη (4. 11) είναι αρκετά γενικές για να παριστάνουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από τις εξισώσεις Maxwell. Για το σκοπό αυτό ας υποθέσουμε ότι το ζευγάρι (\mathbf{A}, Φ) παριστάνει μια λύση του αρχικού (περίπλοκου) συστήματος εξισώσεων για τα δυναμικά και ότι αυτή η λύση δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (4. 11). Τότε το ζευγάρι (\mathbf{A}', Φ') όπου

$$(4. 16) \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Psi$$

θα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(4. 17) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \partial_t \Phi' = 0,$$

αν η συνάρτηση $\Psi(x, y, z, t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(4.18) \quad c^2 \nabla^2 \Psi - \partial_t^2 \Psi = 0.$$

Όμως αυτή δεν είναι παρά η κυματική εξίσωση που συναντήσαμε και αναλύσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο και η οποία έχει πάντα λύση. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση Ψ είναι μια λύση της κυματικής εξίσωσης και, από το αρχικό ζευγάρι δυναμικών (\mathbf{A}, Φ) , κατασκευάζουμε το (\mathbf{A}', Φ') σύμφωνα με τις (4.16). Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις

$$(4.19) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla \Psi, \quad \Phi = \Phi' + \frac{1}{c} \partial_t \Psi$$

στις εξισώσεις (4.8) και (4.10) και λαβαίνοντας υπόψη την (4.17), διαπιστώνουμε αμέσως ότι το ζευγάρι (\mathbf{A}', Φ') ικανοποιεί τις απλουστευμένες εξισώσεις (4.12) και (4.13) (άσκηση).

Από την άλλη μεριά,

$$(4.20) \quad \mathbf{B}' := \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B},$$

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}' &:= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}' - \nabla \Phi' = -\frac{1}{c} \partial_t (\mathbf{A} + \nabla \Psi) - \nabla (\Phi + \frac{1}{c} \partial_t \Psi) \\ &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, από την άποψη του υπολογισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, τα ζευγάρια (\mathbf{A}', Φ') και (\mathbf{A}, Φ) είναι ισοδύναμα. Όποιο από τα δύο κι αν χρησιμοποιήσουμε, θα καταλήξουμε στις ίδιες ακριβώς εκφράσεις για τα πεδία \mathbf{E} και \mathbf{B} . Αυτή η δυνατότητα επιλογής διαφορετικών ζευγαριών δυναμικών χωρίς επίπτωση στα πεδία \mathbf{E} και \mathbf{B} ονομάζεται *ελευθερία βαθμίδας* (gauge freedom) ή *συμμετρία βαθμίδας* (gauge symmetry) των εξισώσεων Maxwell. Αποτελεί μια από τις σημαντικότερες έννοιες της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.

Επανερχόμενοι στις εξ. (4.12) και (4.13), τονίζουμε και πάλι ότι τόσο το βαθμωτό δυναμικό Φ , όσο και κάθε μία από τις συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού \mathbf{A} , ικανοποιούν την εξίσωση d' Alembert (4.14). Όμως, η τελευταία ανάγεται στην (ομογενή) κυματική εξίσωση

$$(4.22) \quad c^2 \nabla^2 u - \partial_t^2 u = 0,$$

όταν ο λεγόμενος *όρος μη ομογένειας*, f , μηδενίζεται ταυτοτικά. Συνακόλουθα, σε μια χωρική περιοχή Ω στην οποία τόσο η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου ρ , όσο και η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος J , μηδενίζονται οι ΜΔΕ για τα δυναμικά ανάγονται στην εξ. (4.22). Αυτό σημαίνει ότι, στον κενό χώρο που περιβάλλει τα σώματα-φορείς των ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων, οι μεταβολές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου διαδίνονται με ταχύτητα ίση προς την σταθερή c που εμφανίζεται στην εξ. (4.22). Αυτή η ταχύτητα έχει μετρηθεί πειραματικά και έχει βρεθεί να είναι ίδια με την ταχύτητα με την οποία που διαδίνεται το φως στο κενό.

Γι αυτό λέμε ότι τα σώματα στα οποία παρουσιάζεται μεταβολή των ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίνονται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Τέτοια ακριβώς είναι τα κύματα που εκπέμπουν σήμερα οι κεραιές των ραδιοφωνικών και τηλεοπτικών σταθμών, οι κεραιές της κινητής τηλεφωνίας αλλά και τα κινητά τηλέφωνα. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όμως, εκπέμπονται και όταν γυρίζουμε τον διακόπτη του ρεύματος στο σπίτι μας για να ανάψουμε ή να σβήσουμε μια λάμπα, ή

οποιαδήποτε ηλεκτρική συσκευή. Τέλος, το ίδιο το φώς που εκπέμπει μια αναμμένη λάμπα ή οποιαδήποτε άλλη φωτεινή πηγή θεωρείται ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα που παράγεται από την αναταραχή των ηλεκτρικά φορτισμένων σωματίων (ηλεκτρονίων) που περιέχουν τα άτομα της πηγής.

8. 5 Μετασχηματισμοί Lorentz και εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell για του ηλεκτρο-μαγνητικό πεδίο $\mathbf{E}-\mathbf{B}$ που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, καθώς και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) για τα αντίστοιχα δυναμικά, διατυπώθηκαν χρησιμοποιώντας τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός συγκεκριμένου ΑΣΑ. Κατά συνέπεια, αμέσως ανακύπτει ως εύλογο το ερώτημα πώς συνδέονται οι περιγραφές που δίνουν για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δύο διαφορετικά ΑΣΑ. Για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα θα χρειαστεί να δώσουμε αρχικά μian άλλη διατύπωση των βασικών εξισώσεων -μια διατύπωση που ταιριάζει καλύτερα στο χωρόχρονο Minkowski, M , της Ειδικής Σχετικότητας.

Ξεκινάμε από την ακόλουθη παρατήρηση. Αφού οι εξισώσεις (4. 12) και (4. 13) που καθορίζουν τις χωροχρονικές μεταβολές των δυναμικών \mathbf{A} και Φ έχουν την ίδια μορφή, είναι εύκολο να τις εκφράσουμε με μία μόνο εξίσωση, ανάλογη προς την (4. 13) που δίνει τη συμπυκνωμένη έκφραση των τριών εξισώσεων για τις συνιστώσες του \mathbf{A} . Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε γι αυτό το σκοπό είναι να εισαγάγουμε τις τετράδες

$$(5.1) \quad \vec{A} \equiv (A^1, A^2, A^3, A^4) := (A_x, A_y, A_z, \Phi) \equiv (\mathbf{A}, \Phi)$$

και

$$(5.2) \quad \vec{J} \equiv (J^1, J^2, J^3, J^4) := (J_x, J_y, J_z, c \rho) \equiv (\mathbf{J}, c).$$

Γιατί τότε, οι τέσσερες ΜΔΕ που περιέχονται στις (4. 12) και (4. 13) γράφονται σαν

$$(5.3) \quad \nabla^2 A^j - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 A^j = -\frac{4\pi}{c} J^j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται σ' αυτές τις εξισώσεις εξαρτιώνται από τη χωροχρονική τετράδα $\vec{x} := (x^1, x^2, x^3, x^4) \equiv (x, y, z, ct)$. Αν, λοιπόν, συμβολίσουμε με $\partial_j \equiv \partial_{x^j}$ τον τελεστή της μερικής παραγώγου ως προς τη χωροχρονική συντεταγμένη x^j και θυμηθούμε τη σύμβαση Einstein, τότε θα συμπεράνουμε ότι

$$(5.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = \partial_j A^j \equiv \partial_{x^j} A^j.$$

Κατά συνέπεια, η συνθήκη (4. 11) που πρέπει να ικανοποιεί η τετράδα των δυναμικών μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(5.5) \quad \partial_j A^j = 0.$$

Ανάλογα, η εξ. (4. 2) που εκφράζει το νόμο της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(5.6) \quad \partial_j J^j = 0.$$

Ας θυμηθούμε επίσης ότι ως εσωτερικό γινόμενο Minkowski των τυχαίων (τετρα-)διανυσμάτων \vec{x} και \vec{y} ορίζεται ο αριθμός

$$(5.7) \quad \eta(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \eta_{jk} x^j y^k, \quad j, k = 1, 2, 3, 4,$$

Ο πίνακας

$$(5.8) \quad \eta = (\eta_{jk}) = \text{διαγ}(1, 1, 1, -1)$$

είναι προφανώς αντιστρέψιμος, αφού $\det(\eta) = -1$. Για λόγους που θα γίνουν εμφανείς στη συνέχεια, τα στοιχεία του αντίστροφου του η τα συμβολίζουμε με η^{jk} . Έτσι,

$$(5.9) \quad \eta^{-1} = (\eta^{jk}) = \text{διαγ}(1, 1, 1, -1).$$

Με αυτόν το συμβολισμό η ταυτότητα

$$(5.10) \quad \eta \eta^{-1} = \eta^{-1} \eta = I \equiv \text{διαγ}(1, 1, 1, 1)$$

μπορεί να γραφτεί σαν

$$(5.11) \quad \eta_{jk} \eta^{km} = \eta^{mk} \eta_{kj} = \delta_j^m \equiv \begin{cases} 1, & \text{αν } j = m \\ 0, & \text{αν } j \neq m \end{cases}$$

Σημειώστε τώρα ότι

$$(5.12) \quad \eta^{jk} \partial_j \partial_k = \partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2 + \partial_3 \partial_3 - \partial_4 \partial_4 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_4^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2.$$

Συνεπώς, η βασική εξίσωση (5.3) μπορεί να γραφτεί σαν

$$(5.13) \quad \eta^{mn} \partial_m \partial_n A^j = -\frac{4\pi}{c} J^j,$$

ή στη μορφή

$$(5.14) \quad \eta^{mn} \partial_m \partial_n \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Με τη βοήθεια των πινάκων η και η^{-1} μπορούμε να ανεβοκατεβάζουμε τους δείχτες των τετραδιανυσμάτων και άλλων παρόμοιων εκφράσεων. Αυτό μας επιτρέπει να απλοποιούμε πολλές από τις σύνθετες εκφράσεις που συναντάμε στην ανάλυση του ηλεκτρομαγνητικού και άλλων πεδίων στο χωρόχρονο Minkowski. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι με X^j παριστάνουμε τις συνιστώσες μιας τυχαίας τετράδας. Τότε η έκφραση $Y_j = \eta_{jk} X^k$ δίνει τις συνιστώσες μιας άλλης τετράδας. Αναλυτικότερα, $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = (X^1, X^2, X^3, -X^4)$. Από την άλλη μεριά, αν ορίσουμε μια νέα τετράδα με συνιστώσες $Z^j = \eta^{jk} Y_k$, τότε θα διαπιστώσουμε ότι αυτή ταυτίζεται τελικά με την \vec{X} , αφού $(Z^1, Z^2, Z^3, Z^4) = (Y_1, Y_2, Y_3, -Y_4)$.

Αυτή τη διαπίστωση μπορούμε να την εκφράσουμε και με την ακόλουθη αλυσίδα:

$$(5.15) \quad Y_j = \eta_{jk} X^k, \quad Z^j = \eta^{jk} Y_k \Rightarrow Z^j = \eta^{jk} Y_k = \eta^{jk} \eta_{km} X^m = \delta_m^j X^m = X^j.$$

Από τις πιο πάνω παρατηρήσεις έπεται ότι οι τετράδες με συνιστώσες X^j και $Y_j = \eta_{jk} X^k$ αλληλοκαθορίζονται μονοσήμαντα. Γι αυτό δε χρησιμοποιούμε τελικά διαφορετικό

σύμβολο για τη δεύτερη, παρά τη γράφουμε σαν X_j , και τη θεωρούμε σαν μιαν άλλη έκδοση της πρώτης -αυτή με κατεβασμένο τον δείκτη j . Αντίστροφα, το σύμβολο X^j θεωρείται ως η έκδοση με ανεβασμένο τον δείκτη της X^j . Σημειώστε ότι με αυτή τη σύμβαση,

$$(5.16) \quad F_j^k = \eta_{jm} F^{mk}, \quad F_{jk} = \eta_{kn} F_j^n = \eta_{jm} \eta_{kn} F^{mn}, \quad \text{κ.λ.π.}$$

Θεωρούμε τώρα το μετασχηματισμό Lorentz

$$(5.17) \quad x^j \rightarrow x^{j'} = f^j(\vec{x}) := L_m^j x^m.$$

Θυμίζουμε ότι ο πίνακας $L = (L_m^j)$ είναι αντιστρέψιμος και χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι

$$(5.18) \quad \eta_{jk} L_m^j L_n^k = \eta_{mn} \Leftrightarrow L_m^T \eta^j L_n^k = \eta_{mn} \Leftrightarrow L^T \eta L = \eta$$

Από την (5.17) αμέσως έπεται ότι

$$(5.19) \quad \partial_k f^j(\vec{x}) \equiv \partial_{x^k} f^j(\vec{x}) = \partial_k (L_m^j x^m) = L_m^j \partial_k (x^m) = L_m^j \delta_k^m = L_k^j$$

Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού (5.17) γράφεται σαν

$$(5.20) \quad x^{j'} \rightarrow x^j = \varphi^j(\vec{x}') = L^{-1j}_m x^{m'},$$

όπου L^{-1j}_m είναι τα στοιχεία του αντίστροφου, L^{-1} , του πίνακα L . Με τον ίδιο όπως παραπάνω τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(5.21) \quad \partial_{k'} \varphi^j(\vec{x}') \equiv \partial_{x'^k} \varphi^j(\vec{x}') = L^{-1j}_k$$

Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι η $F(\vec{x})$ είναι μια δοσμένη ομαλή συνάρτηση των συντεταγμένων x^j , τότε η σύνθεσή της με το μετασχηματισμό (5.20) οδηγεί στην

$$(5.22) \quad G(\vec{x}') := F(\varphi^j(\vec{x}')),$$

που είναι μια ομαλή συνάρτηση των συντεταγμένων $x^{j'}$. Σ' αυτή την περίπτωση

$$(5.23) \quad F(\vec{x}) = G(f^j(\vec{x})).$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας έπεται ότι

$$(5.24) \quad \partial_k F(\vec{x}) \equiv \partial_{x^k} F(\vec{x}) = \partial_{m'} G(f^j(\vec{x})) \partial_k f^{m'}(\vec{x}).$$

Αν λάβουμε υπόψη μας και την (5.19), η τελευταία σχέση γίνεται

$$(5.25) \quad \partial_k F(\vec{x}) \equiv \partial_{x^k} F(\vec{x}) = \partial_{m'} G(f^j(\vec{x})) L_k^m.$$

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(5.26) \quad \partial_{k'} G(\vec{x}') \equiv \partial_{x'^k} G(\vec{x}') = \partial_m F(\varphi^j(\vec{x}')) \partial_k \varphi^{m'}(\vec{x}') = \partial_m F(\varphi^j(\vec{x}')) L^{-1m}_k$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι, από ο ΑΣΑ Σ που χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες Minkowski x^j , μεταπηδάμε στο ΑΣΑ Σ' που χρησιμοποιεί τις συντεταγμένες Minkowski $x^{j'}$. Τότε τα δυναμικά $A^j(\vec{x})$ που ικανοποιούν τις ΜΔΕ (5. 5) και (5. 13) θα μετατραπούν στα

$$(5.27) \quad B^j(\vec{x}') := A^j(\varphi^l(\vec{x}')),$$

έτσι ώστε

$$(5.28) \quad A^j(\vec{x}) = B^j(f^l(\vec{x})).$$

Τότε από την (5.25) έπεται ότι οι μερικές παράγωγοι των δυναμικών που εμφανίζονται στις παραπάνω ΜΔΕ (5.5) και (5.13) θα αλλάξουν μορφή και θα γίνουν

$$(5.29) \quad \partial_m A^j(\vec{x}) = \partial_r B^j(f^l(\vec{x})) L'_m.$$

Για ευκολία, στους επόμενους υπολογισμούς θα γράφουμε την τελευταία σχέση σαν

$$(5.29') \quad \partial_m A^j = \partial_r B^j L'_m.$$

Με βάση αυτή τη σχέση, η εξ. (5.5) μετατρέπεται στην

$$(5.30) \quad \partial_r B^j L'_j = 0,$$

που δεν έχει την ίδια μορφή με την αρχική. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο να εισαγάγουμε τις ποσότητες $A^{j'}$ μέσω της

$$(5.31) \quad A^{j'} := L^j_k B^k,$$

έτσι ώστε οι B^j να γράφονται σαν

$$(5.32) \quad B^j = L^{-1j}_k A^k$$

Τότε το αριστερό μέλος της (5. 30) γίνεται

$$(5.33) \quad \partial_r B^j L'_j = \partial_r (L^{-1j}_k A^k) L'_j = \partial_r A^k L'_j L^{-1j}_k = \partial_r A^k \delta^r_k = \partial_r A^k$$

και η ίδια η (5. 30)

$$(5.34) \quad \partial_r A^k = 0.$$

Ας γράψουμε την (5. 31) αναλυτικά, λαβαίνοντας υπόψη τον ορισμό (5. 27) των B^j . Θα πάρουμε τη σχέση

$$(5.35) \quad A^{j'}(\vec{x}') := L^j_k B^k(\vec{x}') = L^j_k A^j(\varphi^l(\vec{x}')).$$

Αυτή η σχέση συνήθως γράφεται στη μορφή

$$(5.36) \quad \boxed{A^{j'}(\vec{x}') = L^j_k A^k(\vec{x})}$$

και αποτελεί τη βάση του ορισμού των διανυσματικών πεδίων του χώρου Minkowski. Πιο συγκεκριμένα, θα λέμε ότι ένα πεδίο στο χώρο Minkowski είναι **διανυσματικό** ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz αν οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται σύμφωνα με την (5.36).

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, έχουμε υιοθετήσει την υπόθεση ότι τα δυναμικά μετασχηματίζονται ως διανύσματα. Αυτή η υπόθεση συνεπάγεται ότι και οι συναρτήσεις J^j συναποτελούν ένα διάνυσμα ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz. Κι αυτό γιατί το αριστερό μέλος της εξ. (5. 13) γράφεται σαν

$$(5.37) \quad \eta^{mn} \partial_m \partial_n A^j = \eta^{mn} \partial_{r'} [\partial_{s'} (L^{-1j}_k A^{k'}) L^s_n] L^r_m = \eta^{mn} L^r_m L^s_n L^{-1j}_k \partial_{r'} \partial_{s'} A^{k'}$$

Αλλά από την (5. 18) και το γεγονός ότι $\eta^{jk} = \eta_{jk}$ αμέσως έπεται ότι

$$(5.38) \quad \eta^{mn} L^r_m L^s_n = L^r_m \eta^{mn} L^T_n{}^s = \eta^{rs}.$$

Κατά συνέπεια, η (5. 37) γίνεται

$$(5.39) \quad \eta^{mn} \partial_m \partial_n A^j = L^{-1j}_k \eta^{rs} \partial_{r'} \partial_{s'} A^{k'}$$

Άρα η εξ. (5. 13) μετασχηματίζεται στην

$$(5.40) \quad L^{-1j}_k \eta^{rs} \partial_{r'} \partial_{s'} A^{k'} = -\frac{4\pi}{c} J^j.$$

Ισοδύναμα,

$$(5.41) \quad \eta^{rs} \partial_{r'} \partial_{s'} A^{k'} = -\frac{4\pi}{c} J^{k'},$$

όπου

$$(5.42) \quad J^{k'} = L^k_m J^m.$$

Από την τελευταία αμέσως συνάγεται το συμπέρασμα ότι, όχι μόνο οι εξισώσεις που διέπουν τα δυναμικά δεν αλλάζουν μορφή κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz (σύγκρινε την (5. 41) με την (5. 13)), αλλά το ίδιο ισχύει και για το νόμο της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Ξεκινώντας ανάποδα, θεωρούμε την εξίσωση

$$(5.43) \quad \partial_{k'} J^{k'} = 0$$

που έχει την ίδια ακριβώς μορφή με την (5. 6). Από τις (5. 26) και (5. 42) συμπεραίνουμε ότι

$$(5.44) \quad \partial_{k'} J^{k'} = \partial_m [L^k_n J^n] L^{-1m}_k = \partial_m J^n L^{-1m}_k L^k_n = \partial_m J^n \delta^n_m = \partial_m J^m$$

και άρα η (5. 43) είναι ισοδύναμη με την (5. 6).

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\Phi(\vec{x})$ είναι ομαλή κι ας κατασκευάσουμε την τετράδα των μερικών παραγώγων της

$$(5.45) \quad H_j(\vec{x}) := \partial_j \Phi(\vec{x})$$

Αν

$$(5.46) \quad \Psi(\vec{x}') := \Phi(\varphi^j(\vec{x}')) \Leftrightarrow \Phi(\vec{x}) = \Psi(f^j(\vec{x})),$$

τότε (βλ. (5.26))

$$(5.47) \quad \partial_k \cdot \Psi(\vec{x}') \equiv \partial_{x^k} \cdot \Psi(\vec{x}') = \partial_m \Phi(\varphi^j(\vec{x}')) \partial_k \varphi^m(\vec{x}')$$

Αυτή η σχέση συνήθως γράφεται σαν

$$(5.48) \quad \boxed{H_k'(\vec{x}') = M_k^m H_m(\vec{x})}$$

όπου

$$(5.49) \quad H_k' := \partial_k \cdot \Psi(\vec{x}'), \quad M_k^m := \partial_k \varphi^m = L^{-1m}_k$$

Κάθε τετράδα $\{A_j\}$ της οποίας οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον τύπο (5.50) ονομάζεται επίσης **διάνυσμα** ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz. Ωστόσο, για να διακρίνεται από μια τετράδα $\{A^j\}$ που οι συνιστώσες της μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον τύπο (5.36), η $\{A_j\}$ ονομάζεται **συναλλοίωτο διάνυσμα**, ενώ η $\{A^j\}$ **ανταλλοίωτο**.

Γενικότερα, ένα διαταγμένο σύνολο από 4^{m+n} ποσότητες της μορφής $\{A^{j_1 j_2 \dots j_m}_{k_1 k_2 \dots k_n}\}$ ονομάζεται **τανυστής τάξης $m+n$** ως προς τους μετασχηματισμούς Lorentz, αν οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον τύπο

$$(5.50) \quad \boxed{A^{j_1 j_2 \dots j_m}_{k_1 k_2 \dots k_n}' = L^{j_1}_{a_1} L^{j_2}_{a_2} \dots L^{j_m}_{a_m} M_{k_1}^{b_1} M_{k_2}^{b_2} \dots M_{k_n}^{b_n} A^{a_1 a_2 \dots a_m}_{b_1 b_2 \dots b_n}}$$

Αν γ.π.

$$A^{j_k}' = L^j_a M_k^b A^a_b, \quad F_{jk}' = M_j^a M_k^b F_{ab}, \quad T^{j_{kl}'} = L^j_a M_k^b M_l^c T^a_{bc}$$

τότε τα σύνολα $\{A^a_b\}$, $\{F_{ab}\}$ και $\{T^a_{bc}\}$ απαρτίζουν τανυστές. Τα δύο πρώτα είναι τανυστές δεύτερης και το τελευταίο τρίτης τάξης. Με βάση αυτή την ορολογία, τα διανύσματα-συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα- είναι τανυστές πρώτης τάξης, ενώ τα βαθμωτά είναι μηδενικής.

Όπως είδαμε παραπάνω, οι μερικές παράγωγοι, $\{\partial_j \Phi(\vec{x})\}$ ενός βαθμωτού πεδίου αποτελούν ένα συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο (τανυστή πρώτης τάξης). Το ίδιο ισχύει και για την τετράδα $\{A_j(\vec{x})\}$ που αποτελείται από τις συνιστώσες με κατεβασμένο δείκτη ενός διανυσματικού πεδίου $\{A^j(\vec{x})\}$. Με άλλα λόγια, αν το $\{A^j(\vec{x})\}$ είναι ένα ανταλλοίωτο διανυσματικό πεδίο και $A_j(\vec{x}) = \eta_{jk} A^k(\vec{x})$, τότε οι τελευταίες συναποτελούν ένα συναλλοίωτο πεδίο.

Απόδειξη

Η (5.18) γράφεται σαν

$$(5.51) \quad L^T \eta = \eta L^{-1} \Leftrightarrow L^T_a{}^k \eta_{kj} = \eta_{ak} L^{-1k}_j \equiv \eta_{ak} M_j^k$$

Κατά συνέπεια,

$$(5.52) \quad \eta_{jk} L^T_a{}^k \eta^{ab} = \eta_{ak} M_j^k \eta^{ab} = M_j^k \delta_k^b = M_j^b.$$

Από την άλλη,

$$(5.53) \quad A_j '(\vec{x} ') := \eta_{jk} A^k '(\vec{x} ') = \eta_{jk} L_a^k A^a(\vec{x}) = \eta_{jk} L_a^k \eta^{ab} = \eta_{jk} L_a^k \eta^{ab} A_b(\vec{x}).$$

Ισοδύναμα,

$$(5.54) \quad A_j '(\vec{x} ') = M_j^b A_b(\vec{x}).$$

Επιπλέον, μπορεί εύκολα ν' αποδειχτεί ότι, αν το $\{A_j(\vec{x})\}$ είναι ένα συναλλοίωτο πεδίο, τότε οι συναρτήσεις

$$(5.55) \quad F_{jk} := \partial_j A_k - \partial_k A_j$$

συναποτελούν έναν τανυστή δεύτερης τάξης. Είναι προφανές ότι

$$(5.56) \quad F_{jk} = -F_{kj}$$

και άρα ο 4x4 πίνακας (F_{jk}) είναι αντισυμμετρικός. Συνακόλουθα, όλα τα στοιχεία του (F_{jk}) καθορίζονται από την εξάδα $\{F_{12}, F_{23}, F_{31}, F_{14}, F_{24}, F_{34}\}$.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το πεδίο $\{A_j(\vec{x})\}$ είναι η συναλλοίωτη έκδοση του διανυσματικού πεδίου $\{A^j(\vec{x})\}$ που ικανοποιεί τις εξ. (5.3) και (5.5) του ηλεκτρο-μαγνητισμού. Τότε

$$(5.57) \quad F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \equiv \partial_x A_y - \partial_y A_x \equiv (\nabla \times \mathbf{A})_z,$$

όπου $\nabla \times \mathbf{A}$ ο στροβιλισμός του "διανυσματικού δυναμικού" \mathbf{A} . Όμως, σύμφωνα με την (4. 3), η συνάρτηση $(\nabla \times \mathbf{A})_z$ αποτελεί τη z-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου \mathbf{B} . Με άλλα λόγια,

$$(5.58) \quad F_{12} = (\nabla \times \mathbf{A})_z = B_z$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(5.59) \quad F_{23} = (\nabla \times \mathbf{A})_x = B_x, \quad F_{31} = (\nabla \times \mathbf{A})_y = B_y$$

Από την άλλη μεριά,

$$(5.60) \quad F_{14} := \partial_1 A_4 - \partial_4 A_1 = -\partial_1 A^4 - \partial_4 A^1 = -\partial_x \Phi - \partial_{ct} A_x$$

Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με την (4. 6), συμπεραίνουμε ότι

$$(5.61) \quad F_{14} = -\partial_x \Phi - \frac{1}{c} \partial_t A_x = E_x$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(5.62) \quad F_{24} = -\partial_y \Phi - \frac{1}{c} \partial_t A_y = E_y, \quad F_{34} = -\partial_z \Phi - \frac{1}{c} \partial_t A_z = E_z$$

Συλλέγοντας τα τελευταία αποτελέσματα, καταλήγουμε ότι ο πίνακας (F_{jk}) του γράφεται με τον ακόλουθο τρόπο, συναρτήσει του ηλεκτρικού, \mathbf{E} , και μαγνητικού πεδίου, \mathbf{B} :

$$(5.63) \quad \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x \\ -B_z & 0 & B_x & E_y \\ B_y & -B_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τανυστής με συνιστώσες τις συναρτήσεις F_{jk} λέγεται **τανυστής Maxwell**, ή *τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου*. Η τανυστική του ιδιότητα μας επιτρέπει να βρίσκουμε εύκολα τις συνιστώσες του, άρα και τα πεδία E και B , σε οποιοδήποτε ΑΣΑ, αν τις γνωρίζουμε σε ένα μόνο. Προτού μελετήσουμε συγκεκριμένα παραδείγματα, θα σημειώσουμε ότι, με τη βοήθεια του τανυστή Maxwell, οι ίδιες οι εξισώσεις Maxwell, (4. 1), μπορούν να γραφτούν στην ακόλουθη μορφή:

$$(5.64) \quad \boxed{\begin{aligned} \partial_k F^{jk} &= \frac{4\pi}{c} J^j \\ \partial_j F_{kl} + \partial_k F_{lj} + \partial_l F_{jk} &= 0 \end{aligned}}$$

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι τα ΑΣΑ Σ και Σ' συνδέονται με τον ειδικό μετασχηματισμό Lorentz

$$(5.65) \quad x^j \rightarrow x^{j'} = L^j_k x^k,$$

όπου

$$(5.66) \quad (L^j_k) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta := \frac{v}{c}, \quad \gamma \equiv \gamma(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Με άλλα λόγια,

$$(5.67) \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^4), \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = \gamma(x^4 - \beta x^1)$$

Σ' αυτή την περίπτωση, οι πυκνότητες των ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων που καταγράφουν τα ΑΣΑ Σ και Σ' ικανοποιούν τη σχέση

$$(5.68) \quad J^{j'} = L^j_k J^k \Leftrightarrow \begin{aligned} J^{1'} &= \gamma(J^1 - \beta J^4) \\ J^{2'} &= J^2 \\ J^{3'} &= J^3 \\ J^{4'} &= \gamma(J^4 - \beta J^1) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} J_{x'} &= \gamma(J_x - v \rho) \\ J_{y'} &= J_y \\ J_{z'} &= J_z \\ \rho' &= \gamma(\rho - \frac{v}{c^2} J_x) \end{aligned}$$

Στην ίδια περίπτωση, οι συνιστώσες του τανυστή Maxwell ικανοποιούν τη σχέση

$$(5.69) \quad F_{jk}' = M_j^a M_k^b F_{ab} \Leftrightarrow F^{jk'} = L_a^j L_b^k F^{ab},$$

όπου

$$(5.70) \quad F^{ab} := \eta^{aj} \eta^{bk} F_{jk}$$

Από την τελευταία σχέση και την (6. 63) έπεται αμέσως ότι

$$(5.71) \quad (F^{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα, από την (5. 69) βρίσκουμε ότι

$$(5.72) \quad F^{1'2'} = L^1_a L^2_b F^{ab} = L^1_1 L^2_2 F^{1'2} + L^1_4 L^2_2 F^{4'2} = \gamma B_z - \beta \gamma E_x$$

Με άλλα λόγια,

$$(5.73) \quad B_z' = \gamma(B_z - \beta E_x)$$

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή Maxwell στο ΑΣΑ Σ', για να καταλήξουμε στον πίνακα

$$(5.74) \quad \begin{array}{ll} E_x' = E_x & B_x' = B_x \\ E_y' = \gamma(E_y - \beta B_z) & B_y' = \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E_z' = \gamma(E_z + \beta B_x) & B_z' = \gamma(B_z - \beta E_x) \end{array}$$

Από την (5. 74) φαίνεται καθαρά ότι, αν κατά το ΑΣΑ Σ υπάρχει μόνο ηλεκτρικό πεδίο σε κάποια περιοχή, τότε στο Σ' εμφανίζεται όχι μόνο ηλεκτρικό αλλά και μαγνητικό πεδίο. Γιατί, όταν $B=0$, η (5. 74) δίνει

$$(5.75) \quad \begin{array}{ll} E_x' = E_x & B_x' = 0 \\ E_y' = \gamma E_y & B_y' = -\beta \gamma E_z \\ E_z' = \gamma E_z & B_z' = -\beta \gamma E_x \end{array}$$

Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που, σύμφωνα με το Σ, σε μια περιοχή υπάρχει μόνο μαγνητικό πεδίο, αφού για $E=0$ η (5. 74) γίνεται

$$(5.76) \quad \begin{array}{ll} E_x' = 0 & B_x' = B_x \\ E_y' = -\beta \gamma B_z & B_y' = \gamma B_y \\ E_z' = -\beta \gamma B_x & B_z' = \gamma B_z \end{array}$$

Γενικότερα, μπορούμε να πούμε ότι η διάκριση σε ηλεκτρικό και μαγνητικό μέρος είναι σχετική -εξαρτάται δηλαδή από το ΑΣΑ που καταγράφει το πεδίο. Γι αυτό είναι ορθότερο να μιλάμε για ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ή πεδίο Maxwell που περιγράφεται από τον ομώνυμο τανυστή.

Παράδειγμα

Οι σχέσεις (5. 74) μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε εύκολα το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που παράγεται από ένα φορτισμένο σωματίο σ που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς κάποιο ΑΣΑ.

Για το σκοπό αυτό αρκεί να υπολογίσουμε το πεδίο που παράγεται από το σ σ' ένα ΑΣΑ όπου το σ ακινητεί. Ας υποθέσουμε γ.π. ότι το σ έχει ηλεκτρικό φορτίο Q κι ότι κινείται με ταχύτητα u κατά μήκος του άξονα x του ΑΣΑ Σ . Για ευκολία, θα υποθέσουμε ότι τη στιγμή $t = 0$ το σ βρίσκεται στο σημείο $x = 0$. Τότε η τροχιά του σ περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$(5.77) \quad x = ut, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Θεωρούμε, λοιπόν, το ΑΣΑ Σ' που κινείται με ταχύτητα $V = u$ ως προς το Σ κι έτσι ώστε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Lorentz να περιγράφεται από τις εξ. (5. 67). Αυτό σημαίνει ότι το σ παραμένει συνεχώς στην αρχή των χωρικών αξόνων του Σ' . Όπως γνωρίζουμε, σ' αυτή την περίπτωση το πεδίο που "βλέπει" το Σ' είναι αμιγώς ηλεκτρικό και περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$(5.78) \quad E_x'(\vec{x}') = Q \frac{x'}{r'^3}, \quad E_y'(\vec{x}') = Q \frac{y'}{r'^3}, \quad E_z'(\vec{x}') = Q \frac{z'}{r'^3},$$

όπου

$$(5.79) \quad r'^2 := x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \vec{x}' := (x', y', z', t').$$

Ισοδύναμα,

$$(5.80) \quad \mathbf{E}(\vec{x}') = Q \mathbf{r}' / r'^3, \quad \mathbf{r}' := (x', y', z')$$

Τώρα, είναι εύκολο ν' αποδειχτεί ότι ο αντίστροφος του μετασχηματισμού (5. 74) δίνεται από τις σχέσεις

$$(5.81) \quad \begin{aligned} E_x &= E_x' & B_x &= B_x' \\ E_y &= \gamma(E_y' + \beta B_z') & B_y &= \gamma(B_y' - \beta E_z') \\ E_z &= \gamma(E_z' - \beta B_x') & B_z &= \gamma(B_z' + \beta E_x') \end{aligned}$$

Συνεπώς, όταν το B' μηδενίζεται, όπως συμβαίνει στην περίπτωσή μας, τότε

$$(5.82) \quad \begin{aligned} E_x &= E_x' & B_x &= 0 \\ E_y &= \gamma E_y' & B_y &= \beta \gamma E_z' \\ E_z &= \gamma E_z' & B_z &= \beta \gamma E_x' \end{aligned}$$

Λαβαίνοντας υπόψη τη σχέση (5. 67) ανάμεσα στις συντεταγμένες των Σ και Σ' , καθώς και τις (5. 77) και (5. 78), συμπεραίνουμε ότι η αναλυτική έκφραση των συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που δίνονται από τις (5. 82) έχει ως εξής:

$$(5.83\alpha) \quad E_x(\vec{x}) = Q \frac{\gamma(x-ut)}{[\gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad B_x(\vec{x}) = 0$$

$$(5.83\beta) \quad E_y(\vec{x}) = Q \frac{\gamma y}{[\gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad B_y(\vec{x}) = -\beta E_z(\vec{x})$$

$$(5.83\gamma) \quad E_z(\vec{x}) = Q \frac{\gamma z}{[\gamma^2(x-ut)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad B_z(\vec{x}) = \beta E_y(\vec{x}).$$