

# Ανίχνευση Συντονισμών σε Διατηρητικές Απεικονίσεις με τη Χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων

Ι. Γ. Πεταλάς<sup>1\*</sup>, Χ. Γ. Αντωνόπουλος<sup>2†</sup>, Α. Χ. Μπούντης<sup>2‡</sup>,  
Μ. Ν. Βραχάτης<sup>1§</sup>

<sup>1</sup> Εργαστήριο Υπολογιστικής Νοημοσύνης (CI Lab),  
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών,  
Κέντρο Έρευνας Τεχνητής Νοημοσύνης Πανεπιστημίου Πατρών  
(UPAIRC).

<sup>2</sup> Κέντρο Έρευνας και Εφαρμογών Μη Γραμμικών Συστημάτων  
(CRANS), Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Σε αυτήν την εργασία θα παρουσιαστεί μια αριθμητική μέθοδος για την ανίχνευση συντονισμών σε διατηρητικές απεικονίσεις. Η προτεινόμενη μέθοδος ανάγει τον προσδιορισμό των συντονισμών σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, για τη λύση του οποίου χρησιμοποιούνται Εξελικτικοί Αλγόριθμοι, και συγκεκριμένα ο Διαφοροεξελικτικός Αλγόριθμος. Το κύριο χαρακτηριστικό της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι η απλότητα της και το γεγονός ότι μπορεί να εφαρμοστεί σε απεικονίσεις οποιασδήποτε διάστασης. Επίσης επειδή η ύπαρξη συντονισμών μπορεί να δώσει μια ένδειξη για την ολοκληρωσιμότητα ενός δυναμικού συστήματος, η προτεινόμενη μεθοδολογία έμμεσα μπορεί να αποτελέσει και μια ένδειξη για την ύπαρξη ολοκληρωσιμότητας σε διατηρητικές απεικονίσεις. Η μέθοδος εφαρμόζεται σε διατηρητικές απεικονίσεις 2 και 4 διαστάσεων με ικανοποιητικά αποτελέσματα.

---

\*Email: petalas@math.upatras.gr, Τηλ: 2610 997348, Φαξ: 2610 992965

†Email: antonop@math.upatras.gr, Τηλ: 2610 997490, Φαξ: 2610 997381

‡Email: bountis@math.upatras.gr, Τηλ: 2610 997381, Φαξ: 2610 997381

§Email: vrahatis@math.upatras.gr, Τηλ: 2610 997374, Φαξ: 2610 992965

# 1 Εισαγωγή

Όταν οι διατηρητικές απεικονίσεις είναι ολοκληρώσιμες ο χώρος φάσεων τους πληρούται από  $N$ -διάστατες ομαλές αναλλοίωτες επιφάνειες πάνω στις οποίες η κίνηση είναι πάντα κανονική (δηλαδή περιοδική ή ημιπεριοδική). Βέβαια, στις περισσότερες εφαρμογές αυτές οι απεικονίσεις είναι μη ολοκληρώσιμες και περιέχουν *συντονισμούς* (resonances) που χαρακτηρίζονται από αλυσίδες νησίδων κανονικής κίνησης γύρω από τα οποίες όμως, υπάρχουν περιοχές όπου η κίνηση δεν είναι κανονική ή είναι χαοτική (δηλαδή εξαιρετικά ευαίσθητη στην επιλογή των αρχικών συνθηκών). Επομένως, είναι σημαντικό, να αναπτυχθούν μέθοδοι για τον προσδιορισμό της θέσης και του πλάτους αυτών των συντονισμών, καθώς και για την εκτίμηση του μεγέθους και της έκτασης των χαοτικών περιοχών που υπάρχουν γύρω από αυτούς.

Η μεθοδολογία που προτείνεται ανάγει το πρόβλημα της ανίχνευσης συντονισμών μιας  $2N$ -άστατης διατηρητικής απεικόνισης σε ένα πρόβλημα ολικής βελτιστοποίησης. Η βασική στρατηγική της είναι η ακόλουθη: Αρχίζει από ένα κεντρικό ευσταθές σταθερό σημείο της απεικόνισης και εξετάζει διαδοχικές αύξουσες περιοχές γύρω από αυτό το σημείο. Οι περιοχές αυτές μπορεί να είναι κυκλικές ή ορθογώνιες. Μέσα σε καθεμιά από αυτές τις περιοχές η μέθοδος αναζητάει ένα σημείο, η επανάληψη του οποίου θα δώσει μια τροχιά η οποία μεγιστοποιεί την ποσότητα  $D$ , η οποία αναπαριστά την διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης απόστασης της παραγόμενης τροχιάς από το κεντρικό ελλειπτικό σημείο. Στη συνέχεια, δημιουργείται το διάγραμμα της ποσότητας  $D$  συναρτήσει της απόστασης των τροχιών από την αρχή, παρέχοντας αναλυτική πληροφορία σχετικά με την ανίχνευση και το πλάτος των συντονισμών, Εφόσον η μεθοδολογία μας αναγνωρίζει έμμεσα την ύπαρξη συντονισμών, μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσει πότε μια διατηρητική απεικόνιση είναι πλήρως ολοκληρώσιμη ή όχι.

Οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (ΕΑ) [1, 2], χρησιμοποιούνται για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης. Όπως είναι γνωστό, οι ΕΑ είναι στοχαστικοί αλγόριθμοι που διαθέτουν ένα σύνολο από υποψήφιες λύσεις του προβλήματος, που ονομάζεται πληθυσμός, και εξελίσσουν αυτόν τον πληθυσμό χρησιμοποιώντας μηχανισμούς που χρησιμοποιούνται από τη φύση για την εξέλιξη των οργανισμών όπως η διασταύρωση (ανασυνδυασμός), η μετάλλαξη και η επιλογή. Οι ΕΑ απαιτούν μόνο τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για να εφαρμοστούν και δεν απαιτούν κάποια πληροφορία για τις παραγώγους της. Το γεγονός αυτό μαζί με την απλότητα και την ευκολία που τους χαρακτηρίζει στην υλοποίηση τους στον υπολογιστή, τους έχει κάνει πολύ δημοφιλείς για πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης.

Όταν η υποεξέταση συνάρτηση είναι ομαλή και οι «κλασικές» μέθοδοι που έχουν σχεδιαστεί για τέτοιες συναρτήσεις είναι αποτελεσματικές τότε η χρήση

των ΕΑ δεν θα προσδώσει κάτι περισσότερο. Αντίθετα όμως στις περιπτώσεις όπου οι γνωστές κλασικές μέθοδοι αποτυγχάνουν ή δεν μπορούν να εφαρμοστούν έχει αποδειχτεί στην πράξη ότι οι ΕΑ μπορούν να επιτύχουν. Τέτοιες περιπτώσεις είναι όταν η αντικειμενική συνάρτηση είναι μη παραγωγίσιμη, υπάρχουν ασυνέχειες ή υπάρχουν πάρα πολλά τοπικά ακρότατα. Επίσης ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των ΕΑ είναι ότι λόγω της δομής τους μπορούν πολύ εύκολα να παραλληλοποιηθούν. Έτσι, μπορεί να γίνει αποτελεσματική αξιοποίηση των υπαρχόντων παράλληλων υπολογιστικών συστημάτων και να επιλυθούν περισσότερο αποδοτικά πολύπλοκα και απαιτητικά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Στην παρούσα εργασία από την κατηγορία των ΕΑ θα χρησιμοποιηθεί ο Διαφοροεξελικτικός Αλγόριθμος (ΔΑ) που εμφανίζεται γενικά πολύ αποτελεσματικός και αποδοτικός [9, 11].

Οι ενότητες του κεφαλαίου οργανώνονται ως εξής: Στην Ενότητα 2 δίνεται μια σύντομη περιγραφή του ΔΑ και στην Ενότητα 3 παρουσιάζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία για την ανίχνευση συντονισμών. Η Ενότητα 4 περιέχει πειραματικά αποτελέσματα για τις 2- και 4-διάστατες διατηρητικές απεικονίσεις στις οποίες εφαρμόστηκε η προτεινόμενη μέθοδος. Η εργασία ολοκληρώνεται στην Ενότητα 5 με τα συμπεράσματα που συνάχθηκαν.

## 2 Διαφοροεξελικτικός Αλγόριθμος

Ο Διαφοροεξελικτικός Αλγόριθμος (ΔΑ) [11] είναι ένας αλγόριθμος για ολική βελτιστοποίηση που ανήκει στην κατηγορία των ΕΑ. Βασίζεται σε έναν πληθυσμό από υποψήφιες λύσεις και εξελίσσει τις υποψήφιες λύσεις του, χρησιμοποιώντας ορισμένους τελεστές, με σκοπό να προσεγγίσει το ολικό βέλτιστο της υποεξέτασης συνάρτησης. Ο ΔΑ έχει εφαρμοστεί σε μια πληθώρα από προβλήματα ολικής βελτιστοποίησης με μεγάλη αποτελεσματικότητα [9].

Πιο συγκεκριμένα, ο ΔΑ έχει ένα πληθυσμό από άτομα τα οποία είναι  $N$ -διάστατα διανύσματα. Έστω με  $u_g^i$  συμβολίζεται το  $i$ -οστό άτομο του πληθυσμού στην  $g$ -οστή επανάληψη του αλγορίθμου. Τότε ο ΔΑ μπορεί να περιγραφεί από τα ακόλουθα τέσσερα βήματα:

- Βήμα 1. (Βήμα Αρχικοποίησης)** Αρχικοποίησε τυχαία τα άτομα του πληθυσμού. Θέσε τιμές στον παράγοντα μετάλλαξης  $F$ , και στον παράγοντα ανασυνδυασμό  $CR$ , σε σταθερές τιμές μέσα στο διάστημα  $[0, 1]$  και επέλεξε μια *αντικειμενική συνάρτηση* για το υποεξέταση πρόβλημα.
- Βήμα 2. (Βήμα Μετάλλαξης)** Μετάλλαξε κάθε άτομο  $u_g^i$  (που ονομάζεται άτομο-στόχος) του πληθυσμού για το σχηματισμό ενός διανύσματος

ς δοκιμής,  $v_{g+1}^i$ , εφαρμόζοντας έναν από τους ακόλουθους τελεστές,

$$v_{g+1}^i = u_g^{r1} + F(u_g^{r2} - u_g^{r3}), \quad \Delta A1$$

$$v_{g+1}^i = u_g^{r1} + F(u_g^{r1} - u_g^{r2}), \quad \Delta A2$$

$$v_{g+1}^i = u_g^{\text{best}} + F(u_g^{r1} - u_g^{r2}), \quad \Delta A3$$

$$v_{g+1}^i = u_g^i + F(u_g^i - u_g^{\text{best}}) + F(u_g^{r1} - u_g^{r2}), \quad \Delta A4$$

$$v_{g+1}^i = u_g^{\text{best}} + F(u_g^{r1} - u_g^{r2}) + F(u_g^{r3} - u_g^{r4}), \quad \Delta A5$$

$$v_{g+1}^i = u_g^{r1} + F(u_g^{r2} - u_g^{r3}) + F(u_g^{r4} - u_g^{r5}), \quad \Delta A6$$

όπου  $r1, r2, r3, r4$  είναι τυχαίοι ακέραιοι έτσι ώστε,  $r1 \neq r2 \neq r3 \neq r4 \neq i \neq \text{best}$ . Ο δείκτης  $\text{best}$  χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει το άτομο με την καλύτερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης στον τρέχοντα πληθυσμό.

**Βήμα 3. (Βήμα Ανασυνδυασμού (Διασταύρωσης))** Για κάθε στοιχείο του διανύσματος δοκιμής,  $v_{g+1}^i$ , επιλέγεται μια τυχαία τιμή,  $r \in [0, 1]$ . Αν  $r \leq CR$ , θέσε  $u_{g+1}^i = v_{g+1}^i$ , διαφορετικά θέσε  $u_{g+1}^i = u_g^i$ .

**Βήμα 4. (Βήμα Επιλογής)** Για κάθε άτομο του πληθυσμού  $u_{g+1}^i$ , εκτιμάται η τιμή του μέσω της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν η τιμή αυτή είναι καλύτερη από αυτή του ατόμου-στόχου  $u_g^i$ , τότε το άτομο  $u_{g+1}^i$  αντικαθιστά το άτομο-στόχο στην επόμενη επανάληψη. Διαφορετικά το άτομο-στόχος παραμένει στην επόμενη επανάληψη του αλγορίθμου. Αν το κριτήριο τερματισμού δεν έχει ικανοποιηθεί, τότε πηγαινε στο δεύτερο βήμα. Σαν κριτήριο τερματισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας προκαθορισμένος αριθμός επαναλήψεων ή μια τιμή στόχος της αντικειμενικής συνάρτησης.

### 3 Προτεινόμενη Μεθοδολογία

Η προτεινόμενη μεθοδολογία για τη συστηματική ανίχνευση των συντονισμών σε απεικονίσεις οποιασδήποτε διάστασης περιγράφεται από την παρακάτω διαδικασία: Ομόκεντροι κύκλοι δημιουργούνται με αυξανόμενη ακτίνα ξεκινώντας από το κεντρικό ελλειπτικό σημείο της απεικόνισης. Ο σκοπός είναι να βρεθεί ένα σημείο (αρχική συνθήκη για την απεικόνιση), στο εσωτερικό της περιοχής που εσωκλείεται από δύο ομόκεντρους κύκλους ( $r_1 < r_2$ ), για το οποίο η τροχιά έχει τη μέγιστη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης απόστασης υπολογισμένης από το κεντρικό ελλειπτικό σημείο. Έτσι, μετατρέπουμε το προαναφερθέν πρόβλημα σε αυτό της επίλυσης ενός προβλήματος μεγιστοποίησης για τη λύση του οποίου θα γίνει χρήση του ΔΑ.

Ο πληθυσμός του  $\Delta A$ , σε αυτήν την περίπτωση, είναι ένα σύνολο από σημεία που αρχικοποιούνται τυχαία σε ομόκεντρους κύκλους στο χώρο φάσεων της απεικόνισης. Ο υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης, για όλα τα άτομα του  $\Delta A$ , γίνεται με την ακόλουθη διαδικασία: Έστω ένα άτομο, που θα αποτελέσει αρχική συνθήκη για την επανάληψη της απεικόνισης για ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Έπειτα υπολογίζεται η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ της δημιουργούμενης τροχιάς και του κεντρικού ελλειπτικού σημείου της απεικόνισης. Η διαφορά αυτών των δυο αποστάσεων είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που θα συμβολίζεται με  $D$ . Ο πληθυσμός του  $\Delta A$ , στη συνέχεια, εξελίσσεται σύμφωνα με τα βήματα του  $\Delta A$ . Η έξοδος του  $\Delta A$  είναι ένα νέο άτομο που έχει ως τιμή την τρέχουσα μέγιστη διαφορά  $D$ . Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται σε όλες τις περιοχές που βρίσκονται μεταξύ συνεχόμενων κύκλων έτσι ώστε να καλύψουν όλο το χώρο φάσεων. Στο τέλος, τα αποτελέσματα εξόδου της προτεινόμενης μεθοδολογίας παρουσιάζονται με το διάγραμμα του  $D$  ως προς την απόσταση από την αρχή  $r$ , δηλαδή το  $D$  υπολογίζεται για όλους τους ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες  $r_1 < r_2$ .

Μια απλή εξέταση του δημιουργούμενου διαγράμματος, παρέχει χρήσιμες ενδείξεις για την ύπαρξη συντονισμών στην απεικόνιση που εξετάζεται. Όπως θα δούμε στην επόμενη Ενότητα 4, μικρά πλατώ καταδεικνύουν περιοχές του χώρου φάσεων της απεικόνισης όπου βρίσκονται συντονισμοί. Κάθε φορά που εντοπίζεται μια τέτοια συμπεριφορά γίνεται περαιτέρω μελέτη στο συγκεκριμένο κομμάτι του διαγράμματος, εξετάζοντας την μεγέθυνση της λεπτομερούς δομής του. Χρησιμοποιώντας τα σημεία που βρίσκονται στις μη ομαλές περιοχές του διαγράμματος ως αρχικές συνθήκες γίνονται επαναλήψεις της απεικόνισης και οι τροχιές που προκύπτουν δίνουν επιπρόσθετες πληροφορίες για την ύπαρξη συντονισμών στο χώρο φάσεων.

Τέλος, προτείνεται ότι αυτή η μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά ως μια αριθμητική ένδειξη για το πότε μια δοσμένη απεικόνιση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Για παράδειγμα, αν το διάγραμμα δεν παρουσιάζει πλατώ ή απότομες μεταβολές, τότε αυτή η συμπεριφορά μπορεί να λειτουργήσει σαν μια ισχυρή ένδειξη για την ολοκληρωσιμότητα της απεικόνισης.

Επομένως, τα σημεία κλειδιά της προτεινόμενης μεθοδολογίας μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- (1) Έχοντας σαν κέντρο το κεντρικό ελλειπτικό σημείο της απεικόνισης, ομόκεντροι κύκλοι δημιουργούνται με αύξουσες ακτίνες ( $r_1 < r_2 < \dots < r_i < r_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ).
- (2) Για κάθε περιοχή μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων πρέπει να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα  $D$  που παριστάνει τη διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης απόστασης μιας τροχιάς από το κεντρικό ελλειπτικό σημείο.

- (3) Χρησιμοποιείται ο  $\Delta A$  για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης.
- (4) Κάθε άτομο του  $\Delta A$  χρησιμοποιείται σαν ένα αρχικό σημείο για τις επαναλήψεις της απεικόνισης. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αντιστοιχεί στον υπολογισμό του  $D$ .
- (5) Η έξοδος του  $\Delta A$  θα είναι ένα σημείο που έχει τη μέγιστη τιμή του  $D$  για αυτήν την περιοχή της απεικόνισης.
- (6) Η έξοδος της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι ένα διάγραμμα του  $D$  ως προς την απόσταση  $r$  από την αρχή. Η μη ομαλή μορφή του διαγράμματος θα αποτελεί μια ένδειξη για την ύπαρξη συντονισμών.
- (7) Η προτεινόμενη μεθοδολογία μπορεί έμμεσα να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ολοκληρωσιμότητας μιας απεικόνισης.

## 4 Εφαρμογή της Προτεινόμενης Μεθοδολογίας

Η μεθοδολογία που περιγράφηκε αναλυτικά στην προηγούμενη ενότητα εφαρμόστηκε σε διάφορα παραδείγματα διατηρητικών απεικονίσεων 2 και 4 διαστάσεων. Σε όλα τα πειράματα που εκτελέστηκαν, ο πληθυσμός του  $\Delta A$  ήταν ίσος με 20 και οι παράγοντες διασταύρωσης και μετάλλαξης ήταν ίσοι με 0.5. Χρησιμοποιήθηκε ο τελεστής  $\Delta A_6$  και οι επαναλήψεις που χρησιμοποιήθηκαν στην κάθε απεικόνιση ήταν  $10^4$ . Στην Ενότητα 4.1, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τις δισδιάστατες απεικονίσεις και στην Ενότητα 4.2 τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις τετραδιάστατες απεικονίσεις.

### 4.1 Περίπτωση των 2-διάστατων Απεικονίσεων

Στα πειράματα αυτής της ενότητας χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω πέντε απεικονίσεις

- α) Η 2-διάστατη απεικόνιση του Hénon [3, 12, 13, 14], που δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x' &= \cos(2\pi v_x)x + \sin(2\pi v_x)(p_x + x^2), \\p'_x &= -\sin(2\pi v_x)x + \cos(2\pi v_x)(p_x + x^2),\end{aligned}$$

β) Η Standard απεικόνιση [6, 8]:

$$\begin{aligned}x' &= (x + y - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x)) \bmod \frac{1}{2}, \\y' &= (y - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x)) \bmod \frac{1}{2},\end{aligned}$$

γ) Η απεικόνιση του McMillan [5, 7]:

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x + (2\mu y)/(1 + y^2),\end{aligned}$$

δ) Η απεικόνιση του γινομένου (product map) [15]:

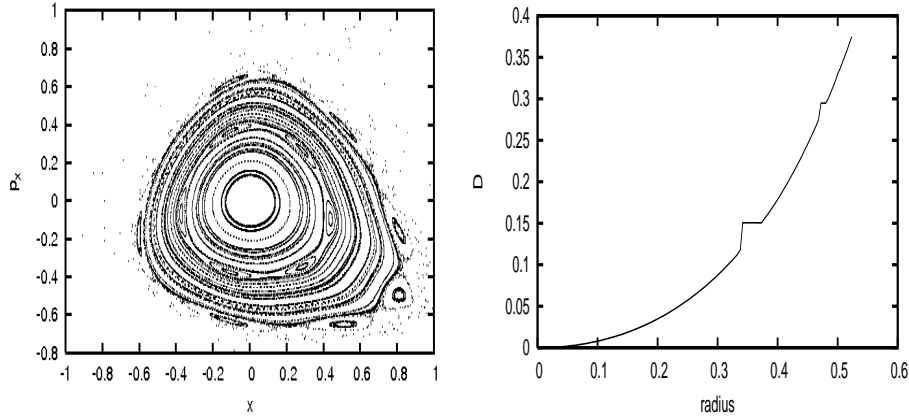
$$\begin{aligned}x' &= (x + 1/x)(1/y), \\y' &= x,\end{aligned}$$

ε) Και τέλος η απεικόνιση του Cohen [10] που δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x' &= \sqrt{1 + x^2} - y, \\y' &= x.\end{aligned}$$

Η 2-διάστατη απεικόνιση του Hénon είναι μια μη ολοκληρώσιμη συμπλεκτική απεικόνιση, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της δισδιάστατης betatronic κίνησης σε ένα μαγνητικό πλέγμα μια μηχανής επιταχυντή σωματιδίων.  $(x, p_x)$  είναι οι αποκαλούμενες Courant-Snyder συντεταγμένες και το γραμμικό κομμάτι της απεικόνισης είναι μια περιστροφή υπό μια σταθερή γωνία  $\omega = 2\pi\nu_x$  [3, 12]. Η Standard απεικόνιση [6] είναι επίσης συμπλεκτική με χαοτική συμπεριφορά για αρκετά μεγάλες τιμές του  $k$ ,  $k > 0$ . Στην περίπτωση όπου  $k = 0$ , η απεικόνιση είναι γραμμική και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ολοκληρώσιμη. Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση του McMillan είναι γνωστό ότι είναι ολοκληρώσιμη για όλες τις τιμές της παραμέτρου  $\mu$ , κατέχοντας μια οικογένεια από αναλλοίωτες καμπύλες που δίνονται από την εξίσωση  $I(x, y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 2\mu xy$ , ενώ οι απεικονίσεις του γινομένου και του Cohen δεν είναι γνωστό αν είναι ολοκληρώσιμες ή όχι. Αυτό που έχει αποδειχτεί για την απεικόνιση του Cohen είναι ότι δεν έχει πρώτο αλγεβρικό ολοκλήρωμα. Όσον αφορά τα βήματα με τα οποία αυξάνονται οι ακτίνες των ομόκεντρων κύκλων, για την απεικόνιση του Hénon το μήκος του βήματος είναι 0.005, για την Standard απεικόνιση και την απεικόνιση του Cohen είναι 0.003 ενώ για την απεικόνιση του McMillan και του γινομένου το μήκος βήματος που υιοθετήθηκε είναι 0.002.

Στα αριστερά του Σχήματος 1 παρουσιάζεται ο χώρος φάσεων της απεικόνισης του Hénon με συχνότητα  $\nu_x = 0.175$  και στα δεξιά του ίδιου σχήματος



Σχήμα 1: Ο χώρος φάσεων της απεικόνισης του Hénon για  $v_x = 0.175$  παρουσιάζεται αριστερά και στα δεξιά το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα για την ίδια συχνότητα  $v_x$ .

το αντίστοιχο διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα. Είναι ξεκάθαρο ότι κοντά στις ακτίνες 0.35 και 0.48 παρατηρούνται μικρά πλατώ. Μετά την τιμή της ακτίνας ίση με 0.5, οι τροχιές του αλγορίθμου εισέρχονται σε χαοτικές περιοχές του χώρου φάσεων με συνέπεια η τιμή του  $D$  να γίνεται άπειρη μετά από ένα μικρό αριθμό επαναλήψεων της απεικόνισης. Αυτά τα μικρά πλατώ αντιστοιχούν στις δύο αλυσίδες νησίδων της απεικόνισης του Hénon και εμφανίζονται στο Σχήμα 2.

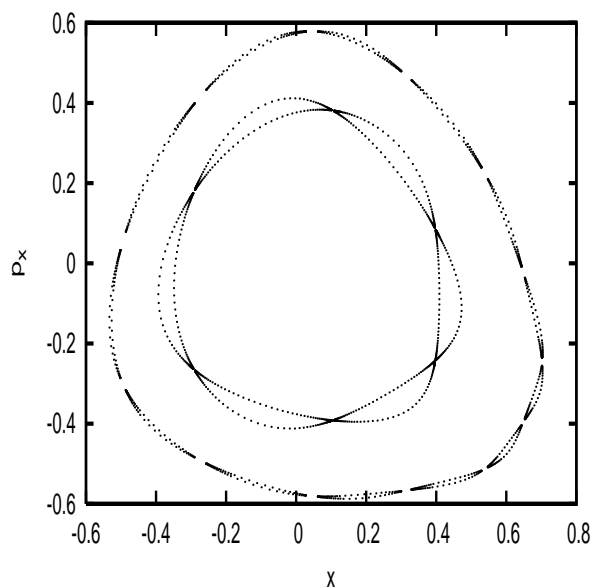
Η επανάληψη της απεικόνισης του Hénon με  $v_x = 0.175$  για 1000 επαναλήψεις, έχοντας σαν αρχική συνθήκη τα σημεία εξόδου που έδωσε ο ΔΑ για  $r = 0.35, 0.48$  οδηγεί στις δύο αλυσίδες νησίδων που φαίνονται στο Σχήμα 2. Οι τιμές αυτών των αρχικών συνθηκών παραθέτονται κάτω από το ίδιο σχήμα.

Στο Σχήμα 3 υπάρχει το διάγραμμα των αριθμών περιστροφής (rotation number) για την απεικόνιση του Hénon με  $v_x = 0.175$ , ως συνάρτηση της απόστασης τους από την αρχή, προχωρώντας κατά μήκος της  $x$ -κατεύθυνσης με ένα μικρό βήμα και εκτελώντας για κάθε σημείο επαναλήψεις της απεικόνισης. Ο αριθμός περιστροφής [8] ορίζεται από το ακόλουθο όριο

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i,$$

όπου  $\theta_i$  είναι διαδοχικές γωνίες που παράγονται σε κάθε  $i$ -οστή επανάληψη της απεικόνισης στο επίπεδο, και παριστάνει τη μέση γωνία μεταξύ των παραγόμενων σημείων και του κεντρικού σημείου της απεικόνισης. Όπως είναι γνωστό,



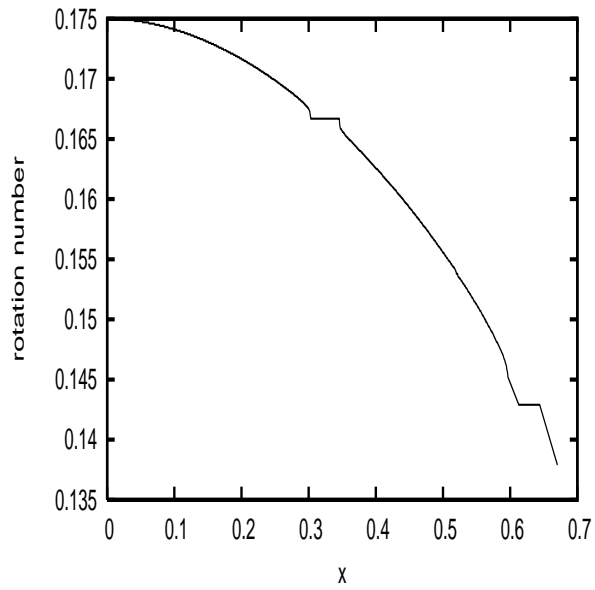


Σχήμα 2: Δύο αλυσίδες νησίδων που έχουν βρεθεί στην απεικόνιση του Hénon με  $v_x = 0.175$  έπειτα από επαναλήψεις της απεικόνισης χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες σημεία που εμφανίζονται κοντά στις ακτίνες 0.35 και 0.48 του διαγράμματος που εμφανίζεται στα δεξιά του Σχήματος 1. Οι αρχικές συνθήκες για αυτές τις δυο αλυσίδες των νησίδων είναι αντίστοιχα  $(x = -0.27996935, y = 0.20451539)$  και  $(x = -0.35738108, y = 0.31484934)$

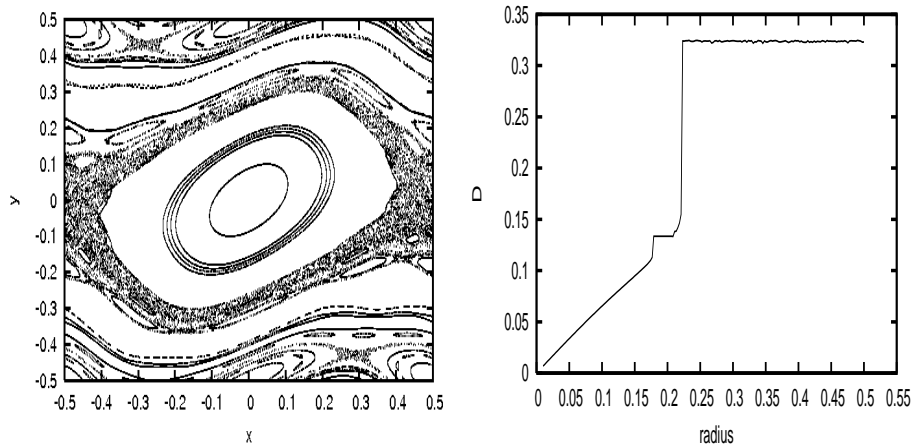
για τις περιοδικές τροχιές ο αριθμός περιστροφής είναι ίσος με το λόγο δυο θετικών ακραίων, για ημιπεριοδικές κινήσεις ο λόγος αυτός είναι μη ρητός, ενώ δεν ορίζεται για χαοτικές τροχιές. Περαιτέρω, προχωρώντας προς τα έξω από το κεντρικό ελλειπτικό σημείο, το  $\sigma$  είναι μια ομαλή, μονότονη συνάρτηση της ακτίνας  $r$  και δημιουργεί μικρά πλατώ σε περιοχές όπου υπάρχουν νησίδες περιοδικών τροχιών.

Παρατηρείται ότι αυτή η προσέγγιση αναγνωρίζει την πρώτη αλυσίδα των νησίδων με αριθμό περιστροφής  $1/6$  καθώς και την τελευταία με αριθμό περιστροφής  $1/7$  αλλά δεν αναγνωρίζει την αλυσίδα νησίδων που βρίσκονται ανάμεσα στις άλλες δυο, με αριθμό περιστροφής  $2/13$  η οποία όμως εντοπίζεται εύκολα από την προτεινόμενη μεθοδολογία. Βέβαια, ένα σοβαρό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν επεκτείνεται εύκολα σε περισσότερες από τις 2 διαστάσεις.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την προσέγγιση μας στην Standard απεικόνιση και το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα από το  $(0, 0)$  παρουσιάζεται στο Σχήμα 4. Το πρώτο πλατώ τοποθετείται κοντά σε μια απόσταση περίπου 0.18 από την αρχή. Ένα τελευταίο μεγάλο πλατώ ξεκινάει μετά από την τιμή ακτίνας

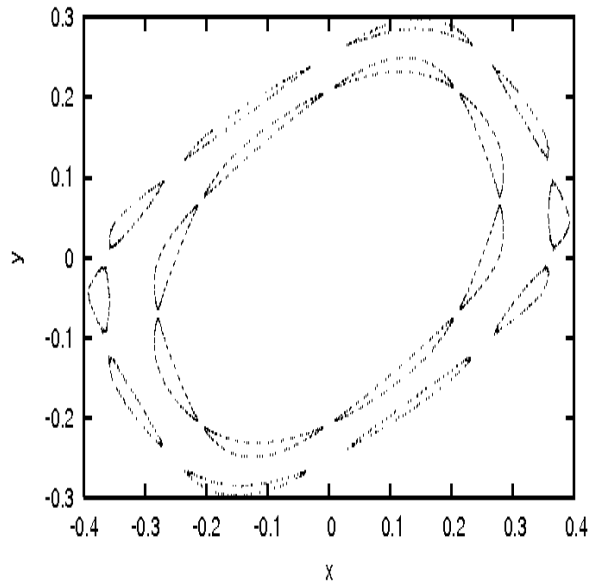


Σχήμα 3: Το διάγραμμα του αριθμού περιστροφής για την απεικόνιση του Hénon με  $v_x = 0.175$ .



Σχήμα 4: Ο χώρος φάσεων για την Standard απεικόνιση με  $k = 0.9$  παρουσιάζεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος ενώ στη δεξιά πλευρά το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα για την ίδια τιμή του  $k$ .

ίση με 0.22, που σημαίνει ότι οι τροχιές που εξετάζουμε έχουν σχεδόν την ίδια τιμή του  $D$ .

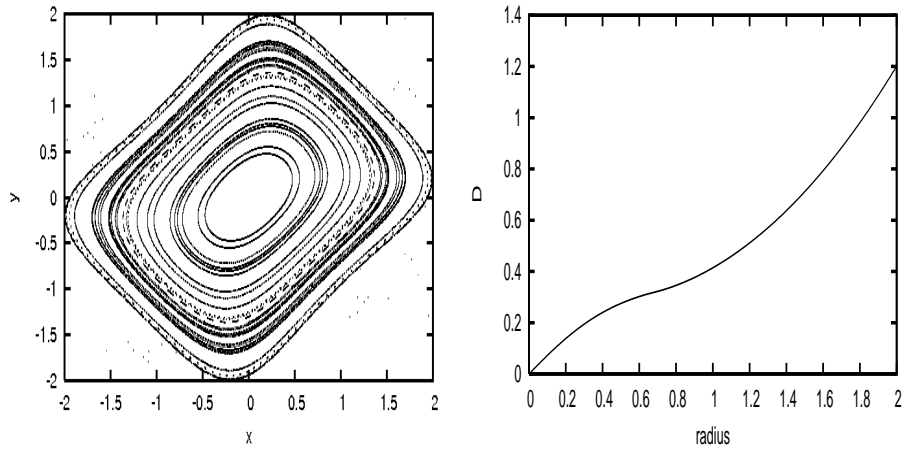


Σχήμα 5: Αλυσίδες των νησίδων που βρέθηκαν για τη Standard απεικόνιση με  $k = 0.9$ , χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες σημεία που εμφανίζονται στο χώρο φάσεων κοντά στις ακτίνες 0.19 και 0.23 του Σχήματος 4.

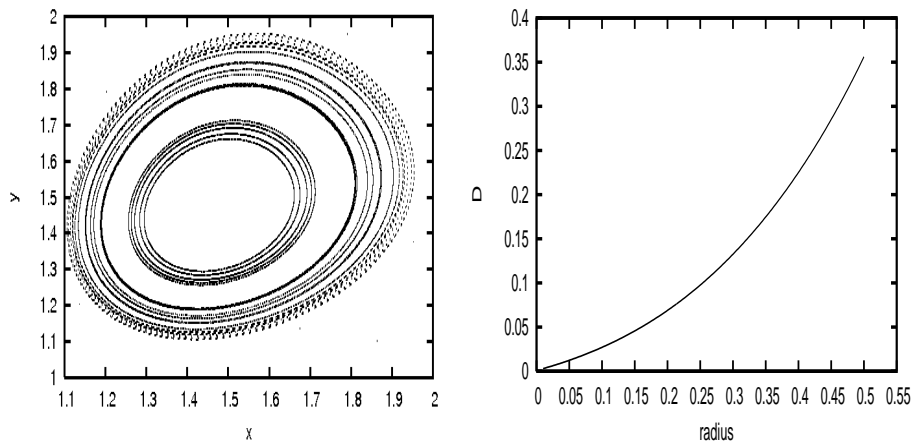
Για παράδειγμα, αν χρησιμοποιηθεί ως αρχική συνθήκη το σημείο που ήταν το αποτέλεσμα που βρέθηκε από τον  $\Delta A$  στην ακτίνα 0.19 (με  $x = -0.03810525$ ,  $y = 0.18686112$ ) και ένα σημείο κοντά στην ακτίνα 0.23 (με  $x = -0.16142492$ ,  $y = 0.16315651$ ) και γίνουν  $10^3$  επαναλήψεις της απεικόνισης προκύπτουν δύο αλυσίδες νησίδων που παρουσιάζονται στο Σχήμα 5 με αριθμούς περιστροφής  $1/8$  και  $1/10$  αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 6, από την άλλη μεριά, παρατηρούμε ότι το διάγραμμα του  $D$  ως προς το  $r$  για την απεικόνιση του McMillan προκύπτει μια ομαλή καμπύλη χωρίς μεταβολές ή ταλαντώσεις μέχρι η τιμή της ακτίνας να φτάσει στο εξωτερικό μέρος του χώρου φάσεων της απεικόνισης. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, αυτή η απεικόνιση είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως σε αυτήν την περίπτωση που δεν υπάρχουν συντονισμοί, το διάγραμμα που παράγεται από την προτεινόμενη μεθοδολογία παρέχει ισχυρή ένδειξη για την ολοκληρωσιμότητα της απεικόνισης.

Τέλος, τα Σχήματα 7 και 8 αντιστοιχούν στην απεικόνιση του γινομένου και του Cohen. Στη δεξιά πλευρά του Σχήματος 7, το διάγραμμα δεν δείχνει κάποια ένδειξη για την ύπαρξη συντονισμών στο χώρο φάσεων της απεικόνισης του γινομένου. Τα αποτελέσματα όμως που προέκυψαν για την απεικόνιση του Cohen είναι περισσότερο ενδιαφέροντα: Το διάγραμμα που παράγεται από την προτεινόμενη μεθοδολογία παρουσιάζεται στο Σχήμα 8. Δύο αλυσίδες



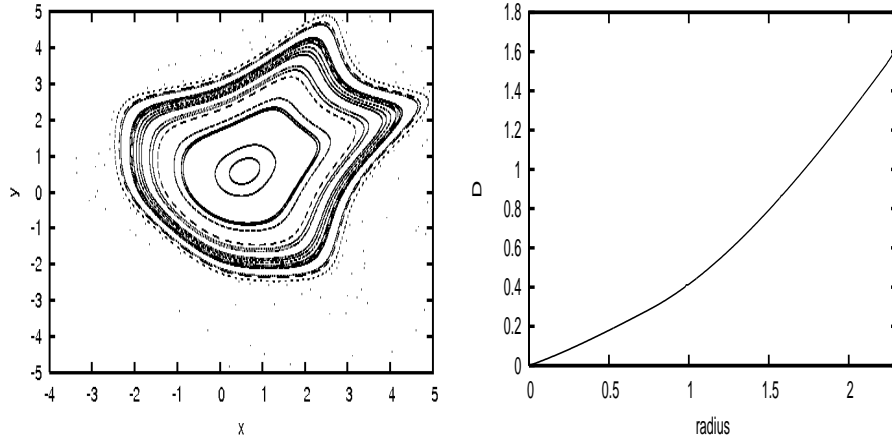
Σχήμα 6: Ο χώρος φάσεων της απεικόνισης του McMillan με  $\mu = 0.5$  παρουσιάζεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος και στην δεξιά πλευρά το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα για την ίδια τιμή του  $\mu$ .



Σχήμα 7: Ο χώρος φάσεων της απεικόνισης του γινομένου παρουσιάζεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος και στην δεξιά τους πλευρά το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα για την ίδια απεικόνιση.

νησίδων περιόδου 14 και 23 ανακαλύπτονται πολύ κοντά στις ακτίνες 1 και 1.58 από το κεντρικό σταθερό σημείο αντίστοιχα. Αν χρησιμοποιηθούν ως αρχικές συνθήκες τα σημεία που ήταν τα αποτελέσματα από τον  $\Delta A$  κοντά στην

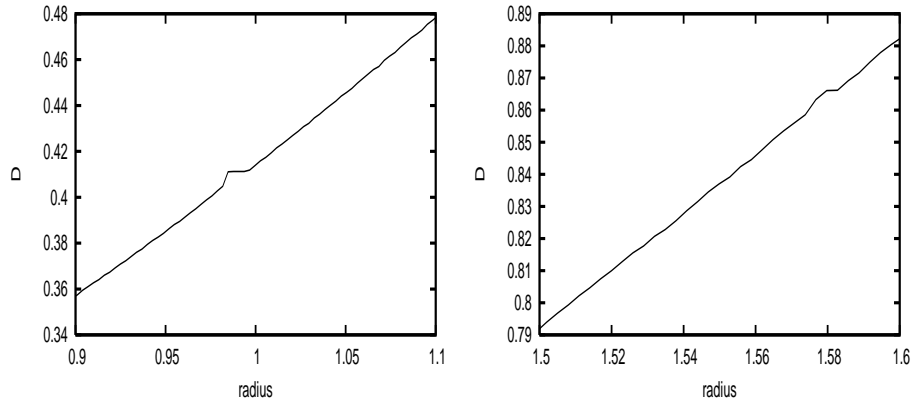
ακτίνα 1 ( $x = 1.38551745, y = 0.01315274$ ) και κοντά στην ακτίνα 1.58 ( $x = -0.11757663, y = 1.99341441$ ) και γίνουν  $10^3$  επαναλήψεις της απεικόνισης του Cohen εμφανίζονται οι νησίδες που απεικονίζονται στο Σχήμα 10.



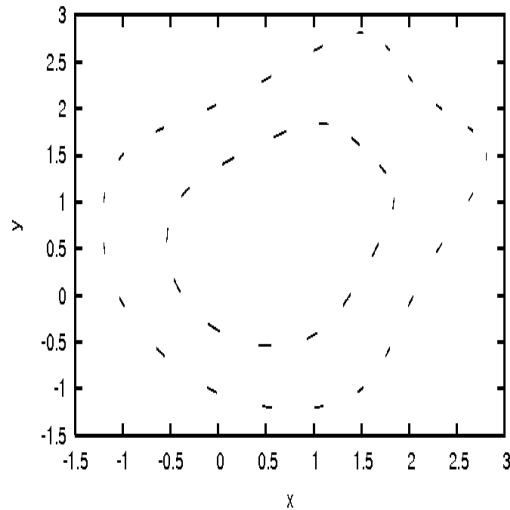
Σχήμα 8: Ο χώρος φάσεων της απεικόνισης του Cohen παρουσιάζεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος και στην δεξιά πλευρά το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα για την ίδια απεικόνιση.

Μεγεθύνοντας περαιτέρω το διάγραμμα που εμφανίζεται στην δεξιά πλευρά του Σχήματος 8, και κοντά στις παραπάνω ακτίνες, προκύπτουν τα δύο διαγράμματα του Σχήματος 9 αντίστοιχα. Μια λεπτομερέστερη μελέτη αυτών των περιοχών, αναδεικνύει την παρουσία σαγματικών σημείων με ιδιοτιμές πολύ κοντά αλλά όχι ίσες με την τιμή 1. Πιο συγκεκριμένα, για την τροχιά περιόδου 14 βρίσκουμε ότι το σαγματικό σημείο έχει συντεταγμένες  $x \approx 1.23590433, y \approx 1.80320245$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx 1.01226, \lambda_2 = 1/\lambda_1 \approx 0.98789$ , ενώ για την τροχιά περιόδου 23 το σαγματικό σημείο έχει συντεταγμένες  $x \approx 1.64966043, y \approx 2.76893060$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1 \approx 1.01227, \lambda_2 = 1/\lambda_1 \approx 0.98788$ . Οι αντίστοιχοι αριθμοί περιστροφής είναι  $3/14$  και  $5/23$ , ενώ αντίστοιχα ελλειπτικά σημεία είναι τα  $x = 0.02582572, y = -0.39650893$  και  $x = -0.06696497, y = 2.01814322$ .

Αυτά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η απεικόνιση του Cohen δεν είναι ολοκληρώσιμη με την έννοια ότι εμφανίζει πολλαπλούς συντονισμούς, κοντά σε σαγματικά σημεία όπου αναμένεται να εμφανισθεί χαοτική συμπεριφορά, αποκλείοντας την ύπαρξη μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας αναλλοίωτων καμπυλών που περιγράφουν την ολική δυναμική της απεικόνισης.



Σχήμα 9: Μια μεγέθυνση της δεξιάς πλευράς του Σχήματος 8 κοντά στην ακτίνα 1 παρουσιάζεται στην αριστερή πλευρά αυτού του σχήματος δείχνοντας το πλατώ που αντιστοιχεί στην  $3/14$  τροχιά, ενώ στην δεξιά πλευρά αυτού του σχήματος παρουσιάζεται μια μεγέθυνση της δεξιάς πλευράς του Σχήματος 8 κοντά στην ακτίνα 1.58 που δείχνει την ύπαρξη  $5/23$  συντονισμών.



Σχήμα 10: Οι δύο αλυσίδες των νησίδων που βρέθηκαν στην απεικόνιση του Cohen χρησιμοποιώντας αρχικές συνθήκες σημεία που βρέθηκαν στα δύο πλατώ του Σχήματος 9.

## 4.2 Περίπτωση 4-διάστατων Απεικονίσεων

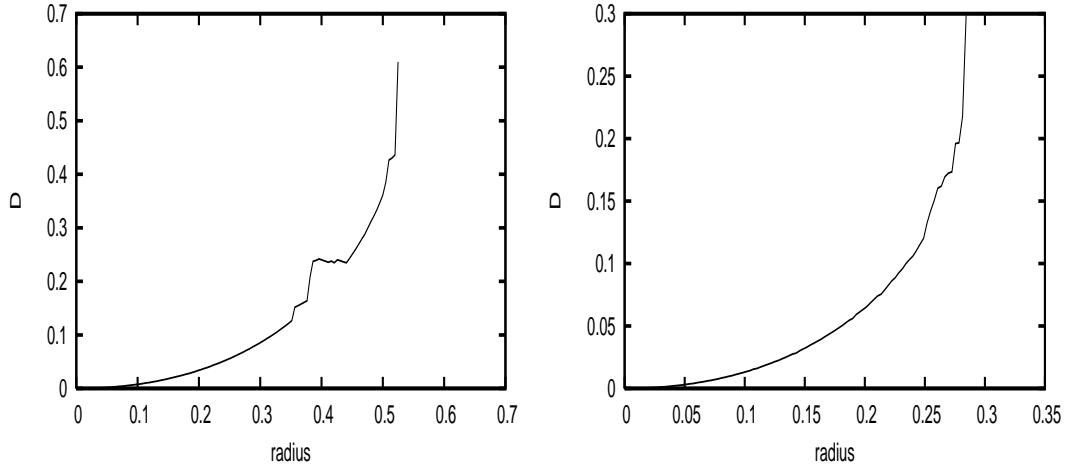
Σε αυτήν την τελευταία ενότητα θα εφαρμόσουμε την προτεινόμενη μεθοδολογία στην 4-διάστατη απεικόνιση του Hénon [3, 12, 14] που δίνεται από τις

εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x' &= \cos(2\pi v_x)x + \sin(2\pi v_x)(p_x + (x^2 - y^2)), \\p'_x &= -\sin(2\pi v_x)x + \cos(2\pi v_x)(p_x + (x^2 - y^2)), \\y' &= \cos(2\pi v_y)y + \sin(2\pi v_y)(p_y - 2xy), \\p'_y &= -\sin(2\pi v_y)y + \cos(2\pi v_y)(p_y - 2xy).\end{aligned}$$

Καθώς και σε μια 4-διάστατη απεικόνιση του McMillan [4] που δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2, \\x'_2 &= -x_1 + 2kx_2/(x_2^2 + y_2^2 + 1) + \varepsilon x_2, \\y'_1 &= y_2, \\y'_2 &= -y_1 + 2ky_2/(x_2^2 + y_2^2 + 1) + \varepsilon y_2.\end{aligned}$$

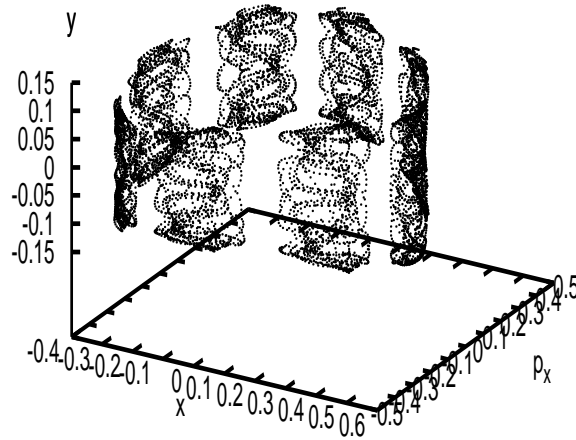


Σχήμα 11: Το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα για την 4-διάστατη απεικόνιση του Hénon με συχνότητες  $v_x = 0.61903$ ,  $v_y = 0.4152$  παρουσιάζεται στην αριστερή πλευρά του σχήματος και στην δεξιά πλευρά το ίδιο διάγραμμα για την ίδια απεικόνιση αλλά με συχνότητες  $v_x = 0.28$ ,  $v_y = 0.31$ .

Για αυτήν την εφαρμογή, χρησιμοποιήθηκαν δύο ζεύγη συχνοτήτων  $v_x = 0.61903$ ,  $v_y = 0.4152$  και  $v_x = 0.28$ ,  $v_y = 0.31$  αντίστοιχα. Τα παραγόμενα διαγράμματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας παρουσιάζονται στο Σχήμα 11. Το μήκος του βήματος της ακτίνας που χρησιμοποιήθηκε στην 4-διάστατη απεικόνιση του Hénon ήταν 0.005.

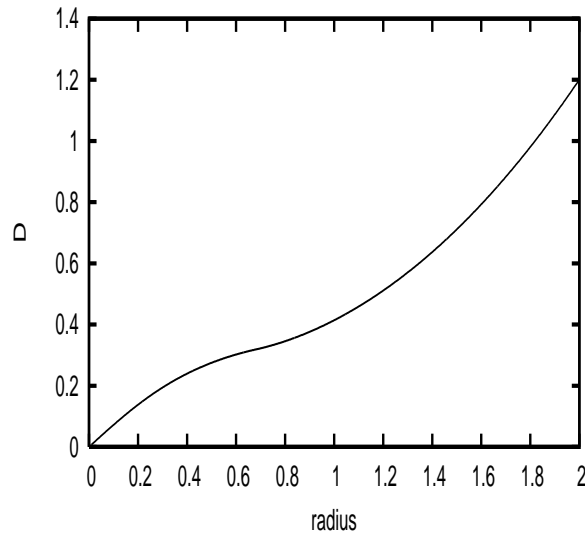
Πιο συγκεκριμένα, στην αριστερή πλευρά του Σχήματος 11 παρατηρείται ότι αν εφαρμοστεί η προτεινόμενη μεθοδολογία στην ακτίνα 0.35, το διάγραμμα παρουσιάζει μια μη ομαλή συμπεριφορά δείχνοντας μικρά πλατώ μέχρι την τιμή ακτίνας ίση με 0.5. Μετά από αυτήν την ακτίνα, εξαιτίας του χάους η τιμή του  $D$  πηγαίνει στο άπειρο. Παρόμοια αποτελέσματα παρουσιάζονται στην δεξιά πλευρά του Σχήματος 11. Τώρα, το διάγραμμα χάνει την ομαλότητα του μετά από την τιμή της ακτίνας ίση με 0.25 και προτού προσεγγίσει την τιμή 0.27 εμφανίζεται ισχυρό χάος στο χώρο φάσεων και η συνάρτηση του  $D$  παίρνει μεγάλες τιμές.

Έπειτα εξετάζεται περαιτέρω η 4-διάστατη απεικόνιση του Hénon, με συχνότητες  $v_x = 0.61903$ ,  $v_y = 0.4152$  και φαίνεται ότι μπορεί η προτεινόμενη μεθοδολογία να ανιχνεύσει συντονισμούς. Πιο συγκεκριμένα, εντοπίζονται περιοδικές τροχιές στη γειτονιά ενός σημείου που αντιστοιχεί στην αριστερή πλευρά του Σχήματος 11 κοντά στην ακτίνα 0.41, μια από τις οποίες έχει περίοδο 32 με αρχικές συνθήκες ( $x = 0.38384187$ ,  $p_x = -0.0736617$ ,  $y = 0.00000005$ ,  $p_y = -0.14620234$ ). Επαναλήψεις αυτού του σημείου για  $10^4$  επαναλήψεις δίνουν την τροχιά που φαίνεται στο Σχήμα 12 και μοιάζει με 8 τόρους.



Σχήμα 12: Οι 8 τόροι που παράγονται από την επανάληψη ενός σημείου κοντά σε αυτό με περίοδο 32 για την 4-διάστατη απεικόνιση του Hénon, με συχνότητες  $v_x = 0.61903$ ,  $v_y = 0.4152$ .



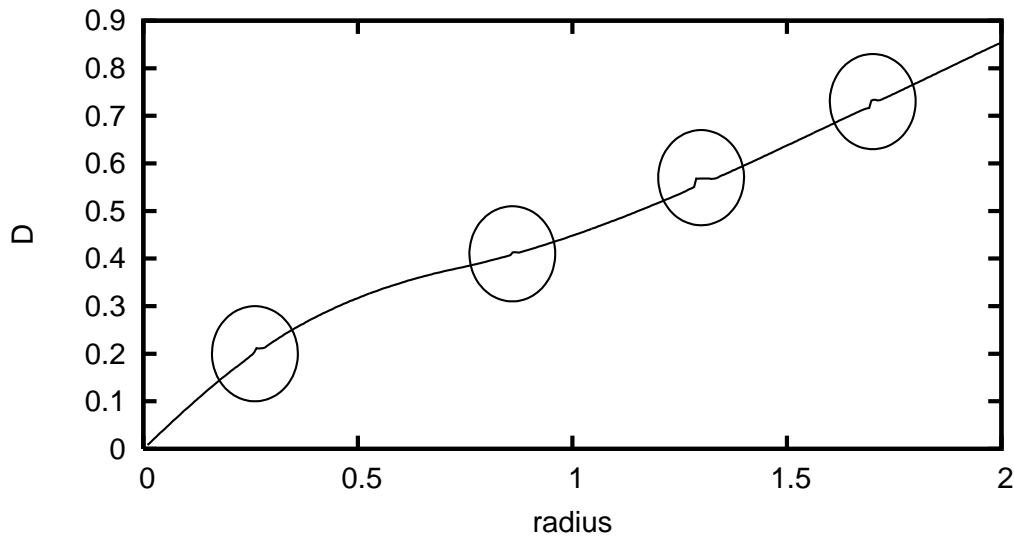


Σχήμα 13: Το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα που παράγεται από την προτεινόμενη μεθοδολογία για την 4-διάστατη απεικόνιση του McMillan με  $k = 0.5$  και  $\varepsilon = 0$ .

Στο Σχήμα 13 εκθέτουμε το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα για την 4-διάστατη απεικόνιση του McMillan με  $\varepsilon = 0$ . Το μήκος του βήματος της ακτίνας ήταν ίσο με 0.001. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη του διαγράμματος είναι ομαλή και όμοια με αυτήν που βρέθηκε για την 2-διάστατη απεικόνιση του McMillan που είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Αν τώρα η τιμή του  $\varepsilon$  είναι διάφορη του μηδενός και για παράδειγμα ίση με  $\varepsilon = 0.1$  τότε το αντίστοιχο διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα παρουσιάζεται στο Σχήμα 14. Σε αυτήν την περίπτωση όπου πλέον η απεικόνιση δεν είναι ολοκληρώσιμη, εμφανίζονται τέσσερα μικρά πλατώ στο διάγραμμα (εμφανίζονται κύκλοι γύρω από τα πλατώ), παρέχοντας μια ένδειξη για την ύπαρξη συντονισμών.

## 5 Συμπεράσματα

Μια νέα μεθοδολογία προτάθηκε για την ανίχνευση συντονισμών σε διατηρητικές απεικονίσεις. Είναι μια απλή μέθοδος που στηρίζεται στη λύση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με τη χρήση των ΕΑ και μπορεί να εφαρμοστεί σε διατηρητικές απεικονίσεις οποιασδήποτε διάστασης. Βασικά, η μέθοδος αυτή εισάγει μια συνάρτηση  $D(r)$  ως προς την απόσταση  $r$  από την αρχή της απεικόνισης της οποίας η ομαλότητα και μονοτονικότητα αναδεικνύει σημαντικές



Σχήμα 14: Το διάγραμμα του  $D$  ως προς την ακτίνα που παράγεται από την προτεινόμενη μεθοδολογία για την 4-διάστατη απεικόνιση του McMillan με  $k = 0.5$  και  $\varepsilon = 0.1$ .

ιδιότητες της δυναμικής της απεικόνισης. Στην παρούσα εργασία, η προτεινόμενη μεθοδολογία εφαρμόστηκε σε διάφορα παραδείγματα 2-διάστατων και 4-διάστατων διατηρητικών απεικονίσεων και τα αποτελέσματα που προέκυψαν δείχνουν την αποτελεσματικότητα και την αποδοτικότητα της προτεινόμενης μεθόδου για την ανίχνευση της τοποθεσίας των συντονισμών και τις σχετιζόμενες χαοτικές περιοχές. Τέλος, ένα επιπρόσθετο χαρακτηριστικό της προτεινόμενης μεθοδολογίας είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράσχει μια ισχυρή ένδειξη σε σχέση με το ερώτημα της ολοκληρωσιμότητας μιας δοσμένης απεικόνισης.

## Αναφορές

- [1] T. Back. *Evolutionary algorithms in theory and practice: Evolution strategies, evolutionary programming, genetic algorithms*. Oxford University Press, 1996.
- [2] T. Back, D. Fogel, and Z. Michalewicz. *Handbook of evolutionary computation*. Oxford University Press, 1997.

- [3] A. Bazzani, E. Todesco, G. Turchetti, and G. Servizi. *A normal form approach to the theory of nonlinear betatronic motion*. CERN, Yellow Reports, 94–02, 1994.
- [4] T. C. Bountis, A. Goriely, and M. Kollmann. A melnikov vector for n-dimensional mappings. *Physics Letters A*, 206:38–48, 1995.
- [5] M. L. Glasser, G. V. Papageorgiou, and T. C. Bountis. Melnikov’s function for two–dimensional mappings. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 49(3):692–703, 1989.
- [6] R. S. MacKay and J. D. Meiss, editors. *Hamiltonian dynamical systems*. Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [7] E. M. McMillan. A problem in the stability of periodic systems. In Britton E. and Odabasi H., editors, *Topics in Modern Physics. A Tribute to Condon E. U.*, pages 219–244. Colorado University Press, Boulder, 1971.
- [8] J. D. Meiss. Symplectic maps, variational principles and transport. *Reviews of Modern Physics*, 64(3):795–847, 1992.
- [9] K. V. Price, R. M. Storn, and J. A. Lampinen. *Differential evolution – A practical approach to global optimization*. Springer, 2005.
- [10] M. Rychlik and M. Torgerson. Algebraic non–integrability of the Cohen map. *New York Journal of Mathematics*, 4:57–74, 1998.
- [11] R. Storn and K. Price. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11:341–359, 1997.
- [12] E. Todesco and M. Giovannozzi. Dynamic apertures estimates and phase–space distortions in nonlinear betatron motion. *Physical Review E*, 53(4):4067–4076, 1996.
- [13] M. N. Vrahatis. An efficient method for locating and computing periodic orbits of nonlinear mappings. *Journal of Computational Physics*, 119:105–119, 1995.
- [14] M. N. Vrahatis, H. Isliker, and T. C. Bountis. Structure and breakdown of invariant tori in a 4–d mapping model of accelerator dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7:2707–2722, 1997.
- [15] Private Communication with V. G. Papageorgiou.