Άλγεβρα

Ασκήσεις στη Θεωρία Ομάδων

Σταύρος Αναστασίου
Παναγής Καραζέρης

Οι ασκήσεις που ακολουθούν είτε έχουν κατασκευαστεί εξ αρχής από τους διδάσκοντες, είτε πάρθηκαν από τα βιβλία που υπάρχουν στον «Εύδοξο». Εκτός από τα βιβλία αυτά, προτείνονται επίσης και τα παρακάτω, τα οποία διατίθενται ελεύθερα από τον «Κάλλιπο».

- Α. Μπεληγιάννης, «Μια Εισαγωγή στη Βασική Άλγεβρα», ΣΕΑΒ 2015.
- Α. Μπεληγιάννης, «Ασκήσεις Βασικής Άλγεβρας», ΣΕΑΒ 2015.

Ομάδες και υποομάδες

1. Εξετάστε ποια από τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ αποτελούν ομάδα, εάν εφοδιαστούν με την πράξη της πρόσθεσης.
2. Θεωρούμε τα σύνολα:
$$M(n\times n,\mathbb{R}) \text{ και } GL(n)=\{A\in M(n\times n,\mathbb{R}) \mid \det A\neq 0\},$$
εφοδιασμένα με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων. Να εξετάσετε εάν είναι ομάδες.
3. Να δείξετε ότι το $\mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ αποτελεί υποομάδα της $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.
4. Να δείξετε ότι η δομή $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$ είναι υποομάδα της $(\mathbb{R}^+,\cdot)$.

Γενικές ιδιότητες

1. Εάν G ομάδα με άρτιο (και πεπερασμένο) πλήθος στοιχείων και ταυτοτικό στοιχείο το e, να δείξετε ότι υπάρχει $a\in G$ τέτοιο, ώστε $a\cdot a=e$.
2. Έστω G ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $e\in G$. Εάν $\forall x\in G,\ x^2=e$, να δείξετε ότι η G είναι αβελιανή.
3. Έστω G ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $e\in G$. Αν η G διαθέτει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία να δείξετε ότι $\forall x\in G,\ \exists n>0 : x^n=e$.
4. Αποδείξτε ότι μία ομάδα, για κάθε δύο στοιχεία της οποίας ισχύει $(xy)^2=x^2y^2$, είναι αντιμεταθετική.

5. Δίνεται ένα σύνολο το οποίο είναι εφοδιασμένο με μία διμελή προσεταιριστική πράξη $\cdot$ για την οποία γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα στοιχείο e τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$, $e \cdot x = x$ (το e είναι μόνο από αριστερά ουδέτερο). Γνωρίζουμε επίσης ότι, για κάθε $x \in X$ υπάρχει $x' \in X$ ώστε $x' \cdot x = e$ (μόνο από αριστερά αντίστροφο). Αποδείξτε ότι αν για το $h \in X$ ισχύει $h \cdot h = h$, τότε $h = e$. (Υπόδειξη: Υπολογίστε με δύο διαφορετικούς τρόπους το στοιχείο $h' \cdot h \cdot h$)

6. Αποδείξτε ότι μία ομάδα G είναι αντιμεταθετική αν και μόνο αν η συνάρτηση $f\colon G \to G$ με $f(x) = x^{-1}$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Κυκλικές ομάδες

1. Αν G κυκλική ομάδα, με έναν γεννήτορα το $a \in G$, να δείξετε ότι και το a^{-1} είναι επίσης γεννήτορας της G.

2. Βρείτε όλους τους γεννήτορες της $(\mathbb{Z}_9, +)$.

3. Να βρεθεί η τάξη της κυκλικής υποομάδας του $\mathbb{Z}_5$ που παράγεται από το 4.

4. Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Να υπολογίσετε την κυκλική ομάδα $< -i >$.

5. Να δείξετε ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα με τάξη πρώτο αριθμό είναι κυκλική.

6. Αποδείξτε ότι η τομή μίας οποιασδήποτε οικογένειας κανονικών υποομάδων μίας ομάδας G είναι κανονική υποομάδα της G.

Ομάδες μεταθέσεων

1. Να γραφούν όλα τα στοιχεία της S_3.

2. Εάν $\sigma \in S_6$, όπου:
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$
να υπολογίσετε την κυκλική ομάδα $< \sigma >$.

3. Έστω $\sigma \in S_9$, όπου:
$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 9 & 4 & 2 & 8 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$
Να γραφεί ως γινόμενο ξένων κύκλων και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων. Είναι άρτια ή περιττή η σ;

4. Εστω ότι η μετάθεση α του συνόλου X αναλύεται ως γινόμενο $\alpha = \beta \cdot \gamma$, όπου β και γ είναι ξένες μεταξύ τους μεταθέσεις. Αποδείξτε ότι, αν η β δεν αφήνει σταθερό το στοιχείο $x \in X$, τότε για κάθε $n \geq 1$, $\alpha^n(x) = \beta^n(x)$.

5. Οι α και β είναι μεταθέσεις του συνόλου X οι οποίες δεν αφήνουν σταθερό το $x \in X$. Αποδείξτε ότι, αν $\alpha^n(x) = \beta^n(x)$, για κάθε $n \geq 1$, τότε $\alpha = \beta$.

6. Αποδείξτε ότι η αντίστροφη μίας μετάθεση που είναι κύκλος, είναι επίσης κύκλος.

7. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει μία αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : X \to Y$ τότε οι ομάδες μεταθέσεων S_X και S_Y των X και Y, αντίστοιχα, είναι ισόμορφες, δια του ισομορφισμού φ με $\varphi(g) = f \cdot g \cdot f^{-1}$.

Σύμπλοκα

1. Βρείτε όλα τα σύμπλοκα της ομάδας $< 3 >$ της ομάδας $\mathbb{Z}_{12}$.

2. Εάν H υποομάδα της ομάδας G και $a,\ b \in G$, εξετάστε εάν ισχύει ο ισχυρισμός $aH = bH \Rightarrow Ha = Hb$.

Ομομορφισμοί και ομάδες πηλίκα

1. Αν $\phi : G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων, να δείξετε ότι η $\mathrm{Im}(f)$ είναι υποομάδα της G'.

2. Έστω $\phi : G \to G'$ ομομορφισμός των ομάδων $G,\ G'$. Αν H κανονική υποομάδα της G να δείξετε ότι η $\phi(H)$ είναι κανονική υποομάδα της G'.

3. Εξετάστε εάν είναι ισόμορφες οι $S_4,\ S_3$.

4. Έστω G ομάδα και H υποομάδα της. Να δείξετε ότι, εάν $a,\ b \in G$, η σχέση $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί της G.

5. Βρείτε την τάξη της ομάδας $\mathbb{Z}_6/ < 3 >$.

6. Έστω G τυχαία ομάδα και $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$ ομομορφισμός τέτοιος, ώστε $\phi(1,0) = a,\ \phi(0,1) = b$. Υπολογίστε το στοιχείο $\phi(5,10)$.

7. Έστω $\phi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ ομομορφισμός τέτοιος, ώστε $\phi(1) = 2$. Υπολογίστε τον πυρήνα K της ϕ και γράψτε τα στοιχεία της ομάδας $\mathbb{Z}_{12}/K$. Είναι η τελευταία ισόμορφη της $\mathbb{Z}_3$;

8. Αποδείξτε ότι το σύνολο των συναρτήσεων

$$G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

είναι ομάδα με διμελή πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων και ότι είναι ισόμορφη με την ομάδα πινάκων της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

9. Αποδείξτε ότι η προσθετική ομάδα όλων των πολυωνύμων με συντελεστές στους ακέραιους αριθμούς $(\mathbb{Z}[x], +)$ είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των θετικών ρητών $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ μέσω της συνάρτησης που στέλνει το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ στο ρητό αριθμό $p_0^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_n^{a_n}$, όπου $p_0, ..., p_n$ είναι οι αρχικοί n πρώτοι αριθμοί 2, 3, ... κλπ.