Αναλυτική Μηχανική

Διδάσκων: Σταύρος Αναστασίου

1^0 φυλλάδιο ασκήσεων

1. Θεωρούμε την απεικόνιση $det : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\det(A) = |A|$. Να υπολογίσετε το διαφορικό της στο σημείο $Id \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

2. Έστω το συναρτησιακό $S : K \to \mathbb{R}$, $S(\gamma) = \int_0^1 (\gamma(t) + \dot{\gamma}(t))dt$, όπου $K := \{\gamma \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}) / \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1\}$. Να υπολογίσετε τα κρίσιμα σημεία του.

3. Θεωρούμε τα σημεία $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ του $\mathbb{R}^3$. Να αποδείξετε ότι από όλες τις καμπύλες, κλάσης C^2, που τα συνδέουν μόνο το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά μπορεί να έχει το ελάχιστο δυνατόν μήκος.

4. Να κατασκευάσετε απειροδιαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να μηδενίζεται παντού, εκτός από το διάστημα $(-1,1) \subset \mathbb{R}$.

5. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού των Μεταβολών.

6. Να κατασκευάσετε τις διαφορικές εξισώσεις ανάμεσα στις λύσεις των οποίων είναι και οι γεωδαισιακές καμπύλες της επιφάνειας $z = x^2 + y^2$ του $\mathbb{R}^3$.

7. Να διατυπωθεί και να λυθεί το πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης για τα σημεία $(0,0,1)$ και $(1,0,0)$ του $\mathbb{R}^3$.

8. Να διατυπώσετε την αρχή ελαχίστης δράσης του Hamilton και να εξηγήσετε, με απλά λόγια, πώς ξεκινώντας από αυτήν καταλήγουμε στις εξισώσεις Euler–Lagrange.

9. Να περιγράψετε το πρόβλημα του σφαιρικού εκκρεμούς και να κατασκευάσετε τις εξισώσεις της κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες. Έπειτα να γράψετε όσα ολοκληρώματα της κίνησης μπορείτε, για το πρόβλημα αυτό.

10. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_t(x,y) = (e^t x, e^t y)\}_{t \in \mathbb{R}}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ομάδα αμφιδιαφορομορφισμών του $\mathbb{R}^2$. Μπορείτε να βρείτε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αμετάβλητη από την ομάδα αυτήν;

11. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα της Noether.

12. Έστω ότι ένα φυσικό πρόβλημα περιγράφεται από τη συνάρτηση Lagrange $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, η οποία όμως δεν εξαρτάται από τη «θέση» x_1, είναι δηλαδή $L = L(\dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, .., x_n, \dot{x}_n)$. Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα της Noether για να αποδείξετε ότι η «αντίστοιχη ορμή» διατηρείται σταθερή