

Αναλυτική Μηχανική

Διδάσκων: Σταύρος Αναστασίου

2^ο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Να βρεθούν οι μετασχηματισμοί Legendre των παρακάτω συναρτήσεων.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 + x^2$.
 - $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + y^4$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, L(q, \dot{q}) = \frac{1}{4}(\dot{q})^4 - q^3$. Να κατασκευάσετε το σύστημα Lagrange που αντιστοιχεί σε αυτήν. Έπειτα να την μετασχηματίσετε κατά Legendre και να δώσετε το αντίστοιχο σύστημα Hamilton.
3. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα Liouville επί της διατήρησης των όγκων στον χώρο των φάσεων από τη ροή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.
4. Να δείξετε ότι η αγκύλη Poisson δύο πρώτων ολοκληρωμάτων της κίνησης ενός συστήματος Hamilton είναι και πάλι ολοκλήρωμα της κίνησης, για το ίδιο σύστημα.
5. Να διατυπώσετε το θεώρημα Liouville–Arnol'd για τα ολοκληρώσιμα συστήματα Hamilton.
6. Δίνεται, στις σφαιρικές συντεταγμένες του \mathbb{R}^3 , η συνάρτηση Hamilton

$$H(\varphi, p_\varphi, \theta, p_\theta) = \frac{1}{2}p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{2\sin^2\theta} + \cos\theta.$$

Βεβαιωθείτε ότι πρόκειται για τη συνάρτηση Hamilton του σφαιρικού εκκρεμούς και γράψτε το αντίστοιχο σύστημα Hamilton. Βρείτε δύο ολοκληρώματα της κίνησης και ελέγξτε αν είναι σε ενέλιξη. Τι συμπεράσματα βγάζετε για τη δυναμική του συστήματος αυτού στον χώρο των φάσεων, από την εφαρμογή του θεωρήματος Liouville–Arnol'd;

7. Να εξετάσετε αν η $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(q_1, p_1, q_2, p_2) = (q_1, p_1 - 2p_2, p_2, -2q_1 - q_2)$ είναι κανονικός μετασχηματισμός.
8. Αν $K = \{x \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) / x(0) = 0, x(1) = 1\}$ και $S : K \rightarrow \mathbb{R}, S(x) = \int_0^1 (x'(t))^2 dt$, να βρείτε το δεύτερο διαφορικό της στο σημείο $x(t) = t$.
9. Να βρείτε την λεία, απλή και κλειστή καμπύλη του επιπέδου μήκους $L > 0$ που περικλείει το μέγιστο δυνατόν εμβαδόν.
10. Σωματίδιο μάζας $m > 0$ βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο στη θέση $(2, 4)$ και αφήνεται να κυλήσει επί της καμπύλης $y = x^2$. Να κατασκευάσετε τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης.