Λογισμός των Μεταβολών
και
Αναλυτική Μηχανική

Περιεχόμενα των Διαλέξεων

Σταύρος Αναστασίου

Πανεπιστημιο Πατρων
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Πατρα 2016

Πολύ πρόχειρες σημειώσεις για τους φοιτητές του μαθήματος
«Αναλυτική Μηχανική»
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.
Ακαδημαϊκό έτος 2016-2017.
Για να επικοινωνήσετε με τον γράφοντα
μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ηλεκτρονική διεύθυνση:
Anastassiou@math.upatras.gr

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Ο Λογισμός των Μεταβολών δίνει απαντήσεις σε μια σειρά ερωτημάτων, ανάμεσα στα οποία είναι τα ακόλουθα.

- Από όλες τις καμπύλες που ενώνουν δύο σημεία, ποια έχει το μικρότερο μήκος;
- Ποιος είναι ο 'δρόμος' που πρέπει να ακολουθήσουμε, προκειμένου να μεταβούμε από το σημείο A στο σημείο B το συντομότερο δυνατόν;
- Δεδομένης κλειστής καμπύλης γ, ποια η επιφάνεια με το μικρότερο εμβαδόν, το σύνορο της οποίας να είναι η γ;

Από τις πιο μεγάλες επιτυχίες του Λογισμού των Μεταβολών είναι αναμφίβολα η Αναλυτική Μηχανική, η οποία εντοπίζει την ακολουθούμενη 'τροχιά' ενός κινητού ως την καμπύλη εκείνη που απαιτεί την ελάχιστη 'δράση' εκ μέρους του.

Τόσο ο Λογισμός των Μεταβολών, όσο και η Αναλυτική Μηχανική, έχουν συνδεθεί με ορισμένα από τα μεγαλύτερα ονόματα που τα Μαθηματικά έχουν να επιδείξουν, και αποτελούν το αντικείμενο επισταμένων μελετών, σε ερευνητικό επίπεδο, πολλών κλάδων της Ανάλυσης, της Γεωμετρίας και της Μαθηματικής Φυσικής.

Οι (υπερβολικά) πρόχειρες αυτές σημειώσεις συνετάχθησαν για την ευκολία του φοιτητή (και της φοιτήτριας) που παρακολουθεί το μάθημα της «Αναλυτικής Μηχανικής». Αποτελούν μια, αδρή, περιγραφή των αντικειμένων που πραγματεύεται το μάθημα, διάλεξη προς διάλεξη, προκειμένου να βοηθηθεί στη μελέτη του (της) και να μπορέσει να ανταποκριθεί με επιτυχία στις τελικές εξετάσεις.

Για τον ίδιο λόγο, κάθε διάλεξη συνοδεύεται από μερικές ασκήσεις οι οποίες, παρ' ότι ελάχιστες, είναι αντιπροσωπευτικές του είδους των προβλημάτων που ο φοιτητής (η φοιτήτρια) πρέπει να μάθει να αντιμετωπίζει.

Αν και καταλαμβάνουν ελάχιστες σελίδες, είναι βέβαιο ότι οι σημειώσεις αυτές περιέχουν λάθη και αστοχίες. Ο γράφων θα χαρεί να συζητήσει οποιεσδήποτε διορθώσεις ή υποδείξεις υπάρχουν.

Με την ελπίδα οι σελίδες αυτές να φανούν χρήσιμες,

Σταύρος Αναστασίου.

1 Διάλεξη 1^{η}: Πρώτο Διαφορικό

Όπου στο μάθημα αυτό θυμίζουμε ορισμένες από τις βασικές έννοιες της πραγματικής ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, από το μάθημα «Πραγματική Ανάλυση ΙΙΙ», ανακαλούμε στην μνήμη μας τα παρακάτω.

- Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, παραγωγισιμότητα και διαφορισιμότητα.
- Διαφορικό συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$.
- Αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτου της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτου της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Η μεθοδολογία που αναπτύσσεται στο μάθημα αυτό επιτρέπει την επίλυση ασκήσεων της παρακάτω μορφής.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το διαφορικό της

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (x^2 y + 2, x + y^3, e^{xy}),$$

   στο σημείο $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

2. Υπολογίστε το διαφορικό της

$$det : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto det(A),$$

   στο σημείο $I \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

3. Ποια τα υποψήφια ακρότατα της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1$;
4. Ποια τα υποψήφια ακρότατα της $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$;

2 Διάλεξη 2^{η}: Προβλήματα Λογισμού Μεταβολών

Στη διάλεξη αυτή ερχόμαστε αντιμέτωποι με δύο κλασικά προβλήματα που αντιμετωπίζει ο Λογισμός των Μεταβολών, το πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης και το πρόβλημα των γεωδαισιακών καμπυλών επιφανειών του $\mathbb{R}^3$, που μας έρχεται από τη Διαφορική Γεωμετρία. Έτσι, μαθαίνουμε:

- να περιγράφουμε το πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης.
- να κατασκευάζουμε το συναρτησιακό που λύνει το πρόβλημα.
- να κατασκευάζουμε τα συναρτησιακά που περιγράφουν μήκη καμπυλών πάνω σε επιφάνειες.
- να βρίσκουμε τις ευθείες του επιπέδου ως υποψήφια ακρότατα του αντίστοιχου συναρτησιακού.

Μετά από αυτά, ο φοιτητής μπορεί να λύνει ασκήσεις της μορφής:

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$. Κατασκευάστε το συναρτησιακό εκείνο τα ελάχιστα του οποίου αντιστοιχούν στην βραχυστόχρονη καμπύλη που συνδέει τα δύο αυτά σημεία.

2. Θεωρούμε δύο σημεία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι από όλες τις καμπύλες που τα συνδέουν, μόνο το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να έχει το ελάχιστο μήκος.

3. Να κατασκευάσετε το συναρτησιακό τα ακρότατα του οποίου αντιστοιχούν στις γεωδαισιακές του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ του $\mathbb{R}^3$.

4. Να υπολογίσετε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του τόρου:
$$r : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$
$$r(u, v) = ((b + acosu)cosv, (b + acosu)sinv, asinu), \ a, b \in \mathbb{R}.$$

5. Να υπολογίσετε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης της κατενοειδούς επιφάνειας:
$$r : [-2\pi, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,$$
$$r(u, v) = (acosh\tfrac{u}{a}cosv, acosh\tfrac{u}{a}sinv, u), \ a, b \in \mathbb{R}.$$

6. Να υπολογίσετε τα θεμελιώδη ποσά πρώτης τάξης του υπερβολικού παραβολοειδούς:
$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ r(u, v) = (a(u + v), b(u - v), uv), \ a, b \in \mathbb{R}.$$

3 Διάλεξη 3^{η}: Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού Μεταβολών

Όπου στη διάλεξη αυτή μαθαίνουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού των Μεταβολών, που μας είχε λείψει στο προηγούμενο μάθημα. Παρουσιάζεται η απόδειξή του, και κατασκευάζουμε την εξίσωση Euler-Lagrange . Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να εκφωνεί και να αποδεικνύει το θεμελιώδες θεώρημα.
- να κατασκευάζει λείες συναρτήσεις που να μηδενίζονται εκτός δοθέντος υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$.
- να κατασκευάζει την εξίσωση Euler-Lagrange που αντιστοιχεί σε δοθείσα συνάρτηση Lagrange.

Ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε λεία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που να μηδενίζεται μόνο εκτός του διαστήματος $(-1, 3)$.

2. Να δείξετε ότι αν $f \in C[a, b], \ g \in C^2[a, b]$, με $g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0$, και επιπλέον $\int_a^b f(x)g''(x)dx = 0$, τότε $f(x) = c_0 + c_1 x, \ c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

3. Να κατασκευάσετε και να λύσετε την εξίσωση Lagrange που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_0^1 (\tfrac{1}{2}(x - y(x))^2 + (siny(x))y'(x))dx.$$

4. Να κατασκευάσετε και να λύσετε την εξίσωση Lagrange που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_{-1}^1 cos(y)dx.$$

4 Διάλεξη 4^{η}: Παραδείγματα

Το μάθημα αυτό αποτελεί μια μικρή επανάληψη των προηγούμενων. Επίσης, λύνονται ασκήσεις που αφορούν στα τρία πρώτα μαθήματα.

Ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε την εξίσωση Euler–Lagrange στην περίπτωση όπου η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται άμεσα από την 'ανεξάρτητη μεταβλητή' x.

2. Να γραφτεί το συναρτησιακό εκείνο ανάμεσα στα ακρότατα του οποίου είναι και οι γεωδαισιακές του κώνου $z^2 = x^2 + y^2$.

5 Διάλεξη 5^{η}: Βραχυστόχρονη Καμπύλη

Στο μάθημα αυτό επανερχόμαστε στο πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης. Στόχος μας είναι η πλήρης επίλυσή του: από την κατασκευή του συναρτησιακού, στις εξισώσεις Euler-Lagrange και έπειτα στη λύση των διαφορικών αυτών εξισώσεων.

Ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε την καμπύλη εκείνη που 'μας ταξιδεύει' από το σημείο $(1, 0, 1)$ στο σημείο $(5, 0, 0)$ του $\mathbb{R}^3$ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

6 Διάλεξη 6^{η}: Ελαχιστικές Επιφάνειες

Όπου στο μάθημα αυτό μελετάμε το πρόβλημα των 'ελαχιστικών επιφανειών εκ περιστροφής'. Μαθαίνουμε το αντικείμενο του προβλήματος, πώς κατασκευάζουμε το συναρτησιακό που δίνει τη λύση του, και τέλος τη λύση του προβλήματος αυτού.

Ασκήσεις

1. Ποια είναι η καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$ και $(1, 2)$ του επιπέδου, της οποίας η αντίστοιχη επιφάνεια εκ περιστροφής (γύρω από τον οριζόντιο άξονα) έχει το ελάχιστο εμβαδόν;

7 Διάλεξη 7^η: Η αρχή του Hamilton

Για τα φυσικά προβλήματα που διαθέτουν 'συναρτήσεις δυναμικής και κινητικής ενέργειας' μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση Lagrange. Έπειτα, η αρχή του Hamilton βεβαιώνει ότι η εύρεση της λύσης του προβλήματος αντιστοιχεί στην εύρεση ακροτάτων του αντίστοιχου συναρτησιακού.

Μετά το μάθημα αυτό, ο φοιτητής θα πρέπει:

- Να κατασκευάζει τις εξισώσεις της κίνησης ενός φυσικού προβλήματος, ξεκινώντας από τις αντίστοιχες συναρτήσεις κινητικής και δυναμικής ενέργειας.
- Να δείχνει ότι οι εξισώσεις αυτές είναι ισοδύναμες με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.
- Να αποδεικνύει ότι αν η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται ρητώς από τον χρόνο, η ολική ενέργεια είναι σταθερή κατά μήκος των τροχιών του προβλήματος.

Ασκήσεις

1. Κατασκευάστε και λύστε τις εξισώσεις της κίνησης ενός σωματιδίου μάζας m, το οποίο κινείται στον $\mathbb{R}^3$ μόνο υπό την επίδραση του βάρους του.
2. Να κατασκευάσετε τις εξισώσεις της κίνησης σωματιδίου μάζας m που κινείται υπό την επίδραση κεντρικού πεδίου δυνάμεων το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση δυναμικού $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto V(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8 Διάλεξη 8^η: Θεώρημα Noether

Όπου στο μάθημα αυτό βλέπουμε 'αλλαγές συντεταγμένων' που δεν επηρεάζουν τη συνάρτηση Lagrange και πώς αυτές επιδρούν στις αντίστοιχες εξισώσεις Euler–Lagrange.

Το θεώρημα της Noether συνδέει τέτοιες 'αλλαγές συντεταγμένων' με ολοκληρώματα τις κίνησης. Έτσι, μετά το μάθημα αυτό ο φοιτητής θα πρέπει να γνωρίζει:

- τι είναι συμμετρία της συνάρτησης Lagrange.
- πώς μια τέτοια συμμετρία επηρεάζει τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler –Lagrange.
- να εκφωνεί και να αποδεικνύει το θεώρημα της Noether.
- να μπορεί να εφαρμόζει το θεώρημα σε απλά παραδείγματα.

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι η οικογένεια $\varphi_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_\epsilon(x) = x + \epsilon$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, είναι μονοπαραμετρική ομάδα απεικονίσεων του $\mathbb{R}$, εάν εφοδιαστεί με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.
2. Δείξτε ότι η οικογένεια συναρτήσεων

$$\varphi_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_\theta(x, y) = (cos\theta \cdot x - sin\theta \cdot y, sin\theta \cdot x + cos\theta \cdot y),$$

αποτελεί συμμετρία της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2$.

3. Κατασκευάστε τις εξισώσεις της κίνησης που αντιστοιχούν στην συνάρτηση Lagrange $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2$. Μπορείτε, εκμεταλλευόμενοι το θεώρημα της Noether να βρείτε ένα ολοκλήρωμα της κίνησης για τις εξισώσεις αυτές;

9 Διάλεξη 9^η: Παραδείγματα

Συνεχίζοντας από εκεί που σταματήσαμε στο προηγούμενο μάθημα, δίνουμε παραδείγματα για το πώς χρησιμοποιείται το θεώρημα της Noether στην κατασκευή ολοκληρωμάτων της κίνησης σε συγκεκριμένα φυσικά προβλήματα. Επίσης, δίνονται παραδείγματα για την εμπέδωση της έννοιας της ροής διανυσματικών πεδίων.

10 Διάλεξη 10^η: Μετασχηματισμός Legendre

Όπου στο μάθημα αυτό εισάγουμε τον μετασχηματισμό Legendre βαθμωτών συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Έπειτα από τον ορισμό και μερικά παραδείγματα, μαθαίνουμε τις θεμελιώδεις ιδιότητές του, και γενικεύουμε στις περισσότερες διαστάσεις.

Ο φοιτητής θα πρέπει

- να μπορεί να κατασκευάζει τον μετασχηματισμό Legendre συναρτήσεων.
- να αποδεικνύει τις βασικές ιδιότητές του.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Legendre της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$, και έπειτα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Legendre της συνάρτησης που προέκυψε.
2. Ομοίως για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

11 Διάλεξη 11^η: Συστήματα Hamilton

Στο μάθημα αυτό βλέπουμε την χρησιμότητα του μετασχηματισμού Legendre στη Μηχανική: μετασχηματίζει τα συστήματα εξισώσεων του Lagrange σε συστήματα εξισώσεων τύπου Hamilton. Και τα δύο συστήματα περιγράφουν τα ίδια φυσικά προβλήματα, με τον μετασχηματισμό Lagrange να αποτελεί τη 'γέφυρα' μεταξύ των δύο αυτών συμπληρωματικών θεωρήσεων. Εισάγουμε τη συνάρτηση Hamilton και αποδεικνύουμε την 'αρχή διατήρησης της ενέργειας'.

Έτσι, ο φοιτητής θα πρέπει να μπορεί:

- να κατασκευάζει συστήματα Hamilton ως δυϊκά των συστημάτων Lagrange.
- να αποδεικνύει ότι η συνάρτηση Hamilton αποτελεί ολοκλήρωμα της κίνησης των αντίστοιχων συστημάτων.
- να κατασκευάζει συναρτήσεις Hamilton ως δυϊκές συναρτήσεις Lagrange με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Legendre.

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ L(x, y) = x^2 + y^2$. Να κατασκευαστεί η δυϊκή της συνάρτηση, και το αντίστοιχο σύστημα Hamilton που αντιστοιχεί στη νέα αυτή συνάρτηση.

2. Να κατασκευαστεί το αντίστοιχο σύστημα Lagrange του συστήματος Hamilton της προηγούμενης άσκησης.

12 Διάλεξη 12^{η}: Συστήματα Hamilton, συνέχεια

Όπου στο μάθημα αυτό συνεχίζουμε τα παραδείγματα κατασκευής συστημάτων Hamilton, χρησιμοποιώντας τα ήδη γνωστά συστήματα Lagrange από τα προη– γούμενα μαθήματα.

13 Διάλεξη 13^{η}: Θεώρημα Liouville

Όπου στο μάθημα αυτό μαθαίνουμε να αποδεικνύουμε το θεώρημα Liouville που βεβαιώνει τη διατήρηση των όγκων, στον χώρο των φάσεων, από τη ροή ενός διανυσματικού πεδίου Hamilton. Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να εκφωνεί και να αποδεικνύει το θεώρημα του Liouville.
- να υπολογίζει τη ροή απλών συστημάτων Hamilton και να διαπιστώνει ότι όντως διατηρούν τους όγκους στους αντίστοιχους χώρους φάσεων.

Ασκήσεις

1. Να κατασκευάσετε το σύστημα Hamilton που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ H(x, y) = x^2 + xy$, και να διαπιστώσετε ότι η ροή του διατηρεί τους όγκους στον χώρο των φάσεων.

2. Να κατασκευάσετε το σύστημα Hamilton που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ H(x, y) = x^2 + y^2$. Βρείτε σε ποιο γεωμετρικό σχήμα η ροή του πεδίου αυτού μετατρέπει τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, μετά από χρόνο $t = 2$. Διατηρείται το εμβαδόν που περικλείεται από τον κύκλο αυτόν;

14 Διάλεξη 14^{η}: Αγκύλες Poisson

Όπου στο μάθημα αυτό γνωρίζουμε τις αγκύλες Poisson. Έπειτα από τον ορισμό, και τις βασικές ιδιότητες, επιστρέφουμε στις ειδικές εκείνες αλλαγές συντεταγμένων που γνωρίσαμε και στην 8^{η} διάλεξη, τους κανονικούς μετασχηματισμούς.

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε την αγκύλη Poisson των $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x + y^2,\ g(x, y) = xy + e^x$.

2. Να εξετάσετε αν $\{f, g\} = \{g, f\}$, όπου

$$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xyz,\ g(x,y,z) = x^2 + yz.$$

15 Διάλεξη 15^η: Αγκύλες Poisson, συνέχεια

Συνεχίζοντας από εκεί που σταματήσαμε στην προηγούμενη διάλεξη, βλέπουμε τι αλλαγές επιφέρουν στις αγκύλες Poisson οι κανονικοί μετασχηματισμοί, και βλέπουμε πώς οι αγκύλες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν τις εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος Hamilton.

Ασκήσεις

1. Έστω η αλλαγή συντεταγμένων $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (-y,x)$. Να εξετάσετε αν $\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\} = \{f,g\}$, όπου $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + xy$, $g(x,y) = x^2 + y^2$.

2. Κατασκευάστε ένα δικό σας σύστημα Hamilton και έπειτα γράψτε το με τη βοήθεια των αγκυλών Poisson.

16 Διάλεξη 16^η: Παραδείγματα

Η διάλεξη αυτή χρησιμεύει ως επανάληψη των κεντρικών εννοιών των προηγούμενων διαλέξεων, με την ταυτόχρονη ανάλυση και μελέτη συστημάτων Lagrange και Hamilton.

17 Διάλεξη 17^η: Noether σε δράση

Όπου στο μάθημα αυτό ξαναβλέπουμε αποτελέσματα που είχαμε συναντήσει και σε προηγούμενα μαθήματα, αυτή τη φορά υπό το πρίσμα του θεωρήματος της Noether και των αγκυλών Poisson. Έτσι, για παράδειγμα, ο φοιτητής βλέπει:

- την αρχή διατήρησης της ορμής ως αποτέλεσμα του θεωρήματος της Noether.
- το ολοκλήρωμα της στροφορμής, σε κεντρικά πεδία δυνάμεων, ως απόρροια του θεωρήματος της Noether.
- τις εξισώσεις κίνησης των παραπάνω προβλημάτων, γραμμένες με τη βοήθεια των αγκυλών Poisson.

Ασκήσεις

1. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση Lagrange ενός φυσικού προβλήματος δεν εξαρτάται από μία από τις μεταβλητές (π.χ. την x_1). Βρείτε μια μονοπαραμετρική ομάδα συμμετριών της συνάρτησης αυτής, και χρησιμοποιήστε την για να αποδείξετε ότι η αντίστοιχη ορμή $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$ αποτελεί ολοκλήρωμα της κίνησης.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2 - V(x)$, όπου η $V(x)$ εξαρτάται μόνο από το $\|x\|$, και $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η οικογένεια συναρτήσεων $\varphi_s(x_1,x_2) = (x_1 coss - x_2 sins, x_2 sins + x_2 coss)$ αποτελεί μονοπαραμετρική ομάδα συμμετριών της συνάρτησης αυτής, και χρησιμοποιείστε το θεώρημα της Noether για να κατασκευάσετε ένα ολοκλήρωμα της κίνησης.

18 Διάλεξη 18^η: Δεύτερο Διαφορικό

Όπου στο μάθημα αυτό ανατρέχουμε και πάλι στην Πραγματική Ανάλυση, προκειμένου να θυμηθούμε την έννοια του δεύτερου διαφορικού συναρτήσεων. Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να μπορεί να κατασκευάζει το δεύτερο διαφορικό μιας πραγματικής συνάρτησης.
- να μπορεί να αποφαίνεται για το είδος των κρίσιμων σημείων μιας βαθμωτής συνάρτησης.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα κρίσιμα σημεία της

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z, w) = x^3 + y^3 - 3\lambda xy + z^2 + w^2,$$

   για κάθε τιμή της πραγματικής σταθεράς λ.

2. Να υπολογίσετε το δεύτερο διαφορικό της

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^3 + xy + y^2 - 2 \text{ στο } (1, 2) \in \mathbb{R}^2.$$

19 Διάλεξη 19^η: Δεύτερο διαφορικό συναρτησιακών

Όπου στο μάθημα αυτό στρεφόμαστε στον υπολογισμό δεύτερων διαφορικών συναρτησιακών. Ξεκινώντας από την περίπτωση όπου η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται από την ανεξάρτητη μεταβλητή, προχωρούμε στον υπολογισμό δεύτερων διαφορικών όλο και πιο δύσκολων συναρτησιακών. Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να μπορεί να υπολογίζει το δεύτερο διαφορικό απλών συναρτησιακών.
- να αποφαίνεται για το αν αυτά είναι θετικώς ορισμένα.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το δεύτερο διαφορικό του συναρτησιακού $L(t, x, \dot{x}) = \int_0^1 (x^2) dt$, όπου $x(0) = x(1) = 0$.

2. Υπολογίστε το δεύτερο διαφορικό του συναρτησιακού μήκους καμπυλών του $\mathbb{R}^n$ και αποδείξτε ότι είναι θετικώς ορισμένο. Τι συμπεραίνετε για τις ευθείες του ευκλείδειου χώρου;

20 Διάλεξη 20^η: Εισαγωγή στα ισοπεριμετρικά προβλήματα

Όπου στο μάθημα αυτό περιγράφουμε το κλασικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα: ποια καμπύλη του επιπέδου, σταθερού μήκους, περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Ανακαλούμε, από την Πραγματική Ανάλυση, τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για την εύρεση ακροτάτων υπό συνθήκη, και βλέπουμε πώς αυτή επεκτείνεται για προβλήματα Λογισμού Μεταβολών. Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να μπορεί να διατυπώνει απλά προβλήματα βελτιστοποίησης υπό συνθήκη.
- να εφαρμόζει τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Ασκήσεις

1. Να λυθεί το κλασικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα καμπυλών του επιπέδου και να αποδειχθεί η «ισοπεριμετρική ανισότητα».
2. Θεωρούμε συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) > 0$ παντού αλλού. Εάν το μήκος της γραφικής παράστασης της f πρέπει να ισούται με $l > 0$ να βρείτε ποια πρέπει να είναι η f έτσι ώστε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση αυτή και τον άξονα των x να είναι το μέγιστο δυνατόν.

21 Διάλεξη 21^η: Πολλαπλασιαστές Lagrange, συνέχεια

Όπου στο μάθημα αυτό βλέπουμε πώς χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange όταν η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το πρόβλημά μας δεν δίνεται από ένα συναρτησιακό αλλά από μία εξίσωση. Αφού περιγράψουμε τη μέθοδο στην περίπτωση αυτή, την εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων που αφορούν στον υποβιβασμό της τάξης μιας συνάρτησης Lagrange. Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να μπορεί να εφαρμόζει τη μέθοδο Lagrange για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης υπό συνθήκη.
- να μπορεί να υποβιβάζει την τάξη μιας συνάρτησης Lagrange που περιέχει δεύτερες παραγώγους.
- να υπολογίζει τις γεωδαισιακές καμπύλες απλών επιφανειών με τη μέθοδο Lagrange.

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση Lagrange $L(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ για καμπύλες $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Εάν θεωρήσουμε νέα συνάρτηση $y(t) = \dot{x}(t)$, να γράψετε τις εξισώσεις Euler–Lagrange για τη συνάρτηση $L(t, x, \dot{x}, \dot{y})$.
2. Βρείτε, με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, τις γεωδαισιακές της σφαίρας.

22 Διάλεξη 22^{η}: Ισοπεριμετρική ανισότητα

Όπου στο μάθημα αυτό, ανακεφαλαιώνοντας τις αμέσως προηγούμενες διαλέξεις, παρουσιάζουμε την απόδειξη της κλασικής ισοπεριμετρικής ανισότητας του επιπέδου. Κατασκευάζουμε το συναρτησιακό, τη συνθήκη που πρέπει να πληρούται και τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler–Lagrange. Έπειτα λύνονται οι εξισώσεις αυτές, για να προκύψει η διάσημη ανισότητα. Τέλος, σκιαγραφούνται επεκτάσεις της ανισότητας αυτής στις περισσότερες διαστάσεις.

Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να αποδεικνύει την ισοπεριμετρική ανισότητα του επιπέδου.

23 Διάλεξη 23^{η}: Γεωδαισιακή εξίσωση

Όπου στο μάθημα αυτό ξαναβρίσκουμε, μετά τη Διαφορική Γεωμετρία, τον πίνακα της πρωτης θεμελιώδους μορφής επιφανειών. Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση Lagrange που αντιστοιχεί σε έναν τέτοιο πίνακα, και βρίσκουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler–Lagrange. Αυτές είναι οι εξισώσεις των γεωδαισιακών καμπυλών, ενώ οι συντελεστές των αγνώστων αποτελούν τα λεγόμενα σύμβολα Christoffel.

Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να κατασκευάζει τον πίνακα της πρώτης θεμελιώδους μορφής μιας απλής επιφάνειας.
- να κατασκευάζει την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange και να γράφει την εξίσωση των γεωδαισιακών της επιφάνειας αυτής.

Ασκήσεις

1. Να γραφεί η εξισωση των γεωδαισιακών του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ του $\mathbb{R}^3$.
2. Το ίδιο για τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ του $\mathbb{R}^3$.

24 Διάλεξη 24^{η}: Διανυσματικά πεδία Killing

Η συνάρτηση Lagrange που αντιστοιχεί στον πίνακα της πρώτης θεμελιώδους μορφής μιας επιφάνειας (ενδέχεται να) διαθέτει συμμετρίες, οι οποίες παράγονται από τα διανυσματικά πεδία που ονομάζονται Killing. Το θεώρημα της Noether μπορεί επομένως να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να κατασκευάσουμε ολοκληρώματα της κίνησης για την εξίσωση των γεωδαισιακών.

Ο φοιτητής θα πρέπει:

- να γράφει την εξίσωση που πρέπει να ικανοποιούν τα διανυσματικά πεδία τύπου Killing.
- να κατασκευάζει το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της κίνησης της εξίσωσης των γεωδαισιακών, σε απλές περιπτώσεις.

Ασκήσεις

1. Γράψτε την εξίσωση που ικανοποιούν τα διανυσματικά πεδία τύπου Killing του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ του $\mathbb{R}^3$.

2. Βρείτε, αν υπάρχουν, διανυσματικά πεδία τύπου Killing για το επίπεδο $z = 0$ του $\mathbb{R}^3$.

25 Διάλεξη 25^η: Προεκτάσεις

Η διάλεξη αυτή λειτουργεί σαν γέφυρα, μεταξύ των εννοιών που παρουσιάστηκαν στο μάθημα αυτό και σε έννοιες πιο 'προχωρημένου' επιπέδου. Έτσι, ο φοιτητής βλέπει πώς οι εξισώσεις Euler–Lagrange οδηγούν και σε Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, ότι η μηχανική Hamilton στηρίζεται στη 'Συμπλεκτική Γεωμετρία' του χώρου των φάσεων, ενώ οι αγκύλες Poisson εισάγουν μια δομή 'Άλγεβρας Lie'.

26 Διάλεξη 26^η: Ανασκόπηση του μαθήματος

Ετούτη είναι η τελευταία διάλεξη του μαθήματος, και επιχειρούμε σε αυτήν μια μικρή ανασκόπηση του μαθήματος. Τι είναι ο Λογισμός των Μεταβολών και η Αναλυτική Μηχανική; Ποια εργαλεία χρησιμοποιούν και τι προβλήματα μπορούν να λύσουν; Πώς μελετάμε την κίνηση ενός σωματιδίου με τη βοήθεια της μηχανικής Lagrange και της μηχανικής Hamilton; Πώς συνδέεται το μάθημα αυτό με άλλα μαθήματα του προγράμματος σπουδών;

Αναφορές

[1] I M Gelfand and S V Fomin, "Calculus of Variations", Prentice–Hall, 1963.

[2] H Goldstein, "Classical Mechanics", Addison–Wesley, 1980.

[3] V I Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer, 1989.

[4] Ι Χατζηδημητρίου, 'Θεωρητική Μηχανική', Τόμος Β′, Γιαχούδη, 2000.

[5] Σ Ιχτιάρογλου, 'Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton', iWrite, 2003.

[6] M Kot, "A First Course in the Calculus of Variations", AMS, 2014.

[7] P Olver, "Introduction to the Calculus of Variations", σημειώσεις ανηρτημένες στο διαδίκτυο, Un. of Minnesota, Dept. of Mathematics, 2016.

Ευρετήριο