ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

3/10/2016

Η αναλυτική μηχανική κυρίως χρησιμοποιεί τον Λογισμό Μεταβολών, μια θεωρία η οποία αναφέρεται στην εύρεση μεγίστων-ελαχίστων σε απειροδιάστατους χώρους όπου τα σύνολα είναι συναρτήσεις.

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

Π.1 Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Αν $f \in C^1$ τότε $f'(x_0) = εφ(ω)$

και η f λέγεται παραγωγίσιμη εάν υπάρχει του νούμερο αυτό.

Με το διαφορικό της f $d_{x_0}f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι
$d_{x_0}f(x) = f'(x_0) \cdot x$ (η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων) και η f λέγεται διαφορίσιμη

Άρα στην μονοδιάστατη περίπτωση f διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$ f παραγωγίσιμη

Π.3 Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$

Λέγεται μερικώς παραγωγίσιμη εάν υπάρχει η κλίση του εφαπτόμενου ~~επιπέδου~~ υπερεπιπέδου με κάποιον άξονα.

Διαφορίσιμη αν $d_{x_0}f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, αν μπορεί να οριστεί στο υπερεπίπεδο παράλληλο στο εφαπτόμενο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ΠΡΟΤΑΣΗ Αν $f \in C^1$ στο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο x_0

πχ Αν $f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ με $f_1(x,y)=(x^2+y,\ 2xy,\ x^2+2y)$

και $f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ με $f_2(x,y,z)=(e^x+y,\ 2xy,\ x+1,\ x^2+2y)$

να υπολογίσετε το διαφορικό της f_1 στο $(1,1)$ και της f_2 στο $(1,0,1)$

Λύση

$$J(f_1(x,y))=\begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \\ \partial f_3/\partial x & \partial f_3/\partial y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}$$

και άρα στο $(1,1)$ είναι: $J(f_1(1,1))=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

και $d_{(1,1)}f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $d_{(1,1)}f_1(x,y)=J(f_1(1,1))\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(2x+y,\ 2x+2y,\ 2x+2y)$

όμοια προκύπτει $J(f_2(x,y,z))=\begin{bmatrix} e^x & 1 & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2 & 0 \end{bmatrix}$

στο $(1,0,1)$ $\begin{bmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ άρα $d_{(1,0,1)}f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ και $d_{(1,0,1)}f_2(x,y,z)=(ex+y,\ 2y,\ x,\ 2x+2y)$

πχ Αν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Για να ορίσουμε το διαφορικό σε αυτήν την περίπτωση στο $(0,0)$ χρησιμοποιούμε τον ορισμό.

(!) Σε απειροδιάστατους χώρους αν και ορίζονται μερικές παράγωγοι δεν έχει νόημα να βρούμε το διαφορικό μέσω αυτών αλλά χρησιμοποιούμε άλλον τρόπο, διότι θα πάμε σε απειρογινόμενα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $n,m\in\mathbb{N}$ και $x_0\in\mathbb{R}^n$. Τότε ορίζουμε $d_{x_0}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ με τύπο $\forall u\in\mathbb{R}^n: d_{x_0}f(u)=\frac{d}{ds}\left[f(x_0+su)\right]_{s=0}$

Παρ.1 Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y)=(x^2+y,\ 2xy)$. Να υπολογίσετε το διαφορικό της στο $(1,0)$

Λύση: $d_{(1,0)}f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με τύπο $d_{(1,0)}f(u_1,u_2)=\frac{d}{ds}\left[f((1,0)+s(u_1,u_2))\right]_{s=0}=$

$$=\frac{d}{ds}\left[f(1+su_1,su_2)\right]_{s=0}=\frac{d}{ds}\left[(1+su_1)^2+su_2,\ 2(1+su_1)su_2\right]_{s=0}=$$

$$=\left[2u_1+2su_1^2+u_2,\ 2u_2+4su_1u_2\right]_{s=0}=(2u_1+u_2,\ 2u_2)$$

Παρ.2 Έστω $\det: M(2\times2,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ με $\det(A)=|A|$ να υπολογίσετε το διαφορικό της στο $I_d\in M(2\times2,\mathbb{R})$

Λύση: Για να βρούμε τον τύπο της, έστω $A\in M(2\times 2,\mathbb{R})$ με $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$ είναι $d_{I_d}\det(A)=\frac{d}{ds}\left[\det[I_d+sA]\right]_{s=0}=$

$$=\frac{d}{ds}\left(\begin{vmatrix}1+s\alpha & s\beta\\ s\gamma & 1+s\delta\end{vmatrix}\right)_{s=0}=\frac{d}{ds}\left[(1+s\alpha)(1+s\delta)-s^2\beta\gamma\right]_{s=0}=$$

$$=\ldots=\alpha+\delta=\mathrm{Trace}(A)$$. Δηλαδή $d_{I_d}\det(A)=\mathrm{Trace}(A)$

(έτσι ορίστηκε το ίχνος ιστορικά)

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^1$ στο x_0. Αν το x_0 είναι σημείο ακροτάτου, τότε $f'(x_0)=0$.

(→)

Απόδειξη: Έστω ότι το x_0 είναι τοπ μέγιστο $\Rightarrow f(x)\le f(x_0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{για} \\ x\in(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \end{array}\right.$

Τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$

Επειδή τα όρια είναι ίσα προκύπτει $f'(x_0)=0$. (Όριο για επίκτητο)

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, κλάσης C^1 στο $x_0\in\mathbb{R}^n$. Αν το x_0 είναι στ
τοπ ακροτάτου τότε $\vec{\nabla} f(x_0)=0$

Απόδειξη:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[ur, "f\circ\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Έστω $\vec{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ με $\vec{r}(0)=x_0$, $r\in C^1$

Τότε $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\tilde{f}(t)=f(\vec{r}(t))$.

Τότε $\tilde{f}(0)=f(x_0)$ τοπικό ακρότατο $\tilde{f}\in C^1$ στο 0 και από
πριν πρόταση $\tilde{f}'(0)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}\right)_{t=0}=0 \Rightarrow$

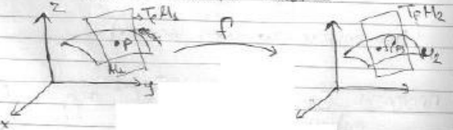
$\Rightarrow \nabla f(x_0)\cdot\vec{r}'(0)=0$ που ισχύει για κάθε καμπύλη $\vec{r}$ με τις παραπάνω ιδιότητες, όμως αν πάρω διάνυσμα $a\neq\vec{0}$ και ορίσω $\vec{r}(t)=x_0+ta \Rightarrow \vec{r}'(0)\neq 0$ και

$$\boxed{\nabla f(x_0)=0}$$

Παρατήρηση 1: Αν $f:M\to\mathbb{R}$, με M στερεοδιάστατο πολλαπλότητας $r:\mathbb{R}\to M$ και ορίζουμε $\tilde{f}=f\circ r$, αν $\tilde{f}(0)$ είναι τοπ ακρότατο τότε

$d_0\tilde{f}=d_{r(0)}f\cdot d_0r=0$ και θεωρώντας ότι υπάρχει r κατάλληλη $d_0r=0$ έχουμε $d_{x_0}f=0$

Παρατήρηση 2



Τότε $d_pf\ T_pM_1\to T_pM_2$

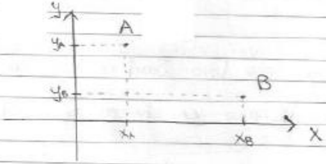
Επειδή $T_p\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$ έχουμε όταν $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n \Rightarrow d_pf:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$

Προβλήματα που αντιμετωπίζει ο Λογισμός των Μεταβολών

6/10/2016

Πρόβλημα: Βραχυστόχρονη Καμπύλη

(Να ταξιδέψω από το σημείο Α στο σημείο Β του $\mathbb{R}^2$ στον ελάχιστο χρόνο, με μοναδική επίδραση την δύναμη της βαρύτητας)



Πρόβλημα Βραχυστόχρονης καμπύλης:
Να κατασκευαστεί η καμπύλη που "μας ταξιδεύει" από το Α στο Β στον ελάχιστο δυνατό χρόνο, όταν η μόνη δύναμη που ασκείται είναι το βάρος.

Λύση: Ορίζουμε ως σύνολο Κ το σύνολο των λείων καμπυλών που διέρχονται από τα Α, Β.

ΣΚΕΨΗ

$r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, C^∞

$r(t_1)=A$, $r(t_2)=B$, θα είναι της μορφής $\vec{r}(t)=(\ \ldots,\ \ldots)$

Μια παραμετρικοποίηση της καμπύλης είναι η εξής:

$$\vec{r}(t)=(t,y(t))$$

και θα την ορίσω πιο συγκεκριμένα $r:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ με $r(0)=A$, $r(1)=B$

Απόδειξη Για $K := \{ r \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}^2) / r(0) = (x_A, y_A), r(1) = (x_B, y_B) \}$

Ορίζουμε τώρα το "συναρτησιακό" $\mathcal{L} : K \to \mathbb{R}$

χρόνος: $T = \frac{s}{u} = \int_0^1 \frac{1}{u} \|\dot{r}(t)\| dt = \int_0^1 \frac{1}{u} \cdot \sqrt{1 + (\dot{y}(t))^2} \, dt$

$r(t) = (t, y(t))$
$\dot{r}(t) = (1, \dot{y}(t))$

Στο σημείο (x_A, y_A) έχω μόνο δυναμική ενέργεια λόγω ακινησίας.
Στο σημείο (x_B, y_B) έχω και κινητική και δυναμική ενέργεια

Άρα από Α.Δ.Ε. (από το Α σε τυχαίο σημείο) $mgy_A = \frac{1}{2} m u^2 + m g y \Rightarrow$

$$\Rightarrow g y_A = \frac{1}{2} u^2 + g y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = 2g(y_A - y) \Rightarrow u = \pm \sqrt{2g(y_A - y)}$$

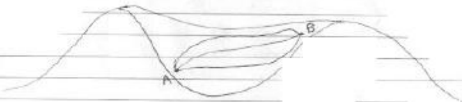
Επιλέγουμε το θετικό πρόσημο (η διαδικασία είναι όμοια για το αρνητικό) και καταλήγουμε στην $\mathcal{L} : K \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\dot{y}(t))^2}{y_A - y(t)}} \, dt$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η λύση του προβλήματος της βραχυστόχρονης καμπύλης είναι κάποιο από τα κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού $\mathcal{L}: K \to \mathbb{R}$

με τύπο $$\mathcal{L}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + (\dot{y}(t))^2}{y_A - y(t)}}\, dt$$

Πρόβλημα 2: Γεωδαισιακές Καμπύλες Επιφανειών



Τοπική Παραμέτρηση επιφάνειας

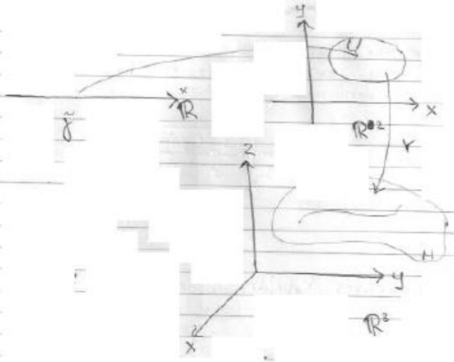
$$r: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad U \text{ ανοιχτό}$$

με τύπο: $r(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$

Έστω καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $\tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$

Τότε η $\gamma = r \circ \tilde{\gamma}$ θα ανήκει στην επιφάνεια



$$\gamma = r \circ \tilde{\gamma}$$

Θεωρούμε λοιπόν την επιφάνεια $r: U \to \mathbb{R}^3$ όπου U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και την C^∞ καμπύλη $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \to U$. Η C^∞ καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = r \circ \tilde{\gamma}$ είναι τέτοια, ώστε το ίχνος της να ανήκει στην επιφάνειά μας.

Αν K είναι το σύνολο αυτών των καμπυλών γ με $\gamma(0) = P$ και $\gamma(1) = Q$, όπου P, Q σημεία της επιφάνειας,

τότε $$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Όμως $\gamma(t) = r \circ \tilde{\gamma}(t)$, άρα $\cancel{\frac{d}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}}$

$(\to)$

$$\frac{d}{dt} j(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} \right)$$

Άρα $\|j(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)^2 + \ldots}$

Έτσι, βρίσκουμε τα θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης της επιφάνειας r.

Δηλαδή
$$E(u,v) = r_u(u,v) \cdot r_u(u,v)$$
$$F(u,v) = r_u(u,v) \cdot r_v(u,v)$$
$$G(u,v) = r_v(u,v) \cdot r_v(u,v)$$

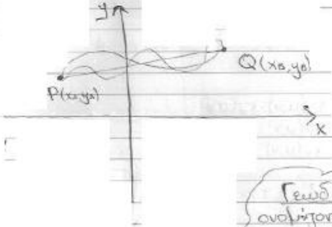
Δηλαδή $\mathcal{L} : K \to \mathbb{R}$ με τύπο $\mathcal{L}(j) = \int_0^1 \sqrt{E(u,v)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u,v)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u,v)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$

όπου $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$ τα θεμελιώδη ποσά $1^{ης}$ τάξης της επιφάνειας και $j = r \circ \tilde{j}$, $\tilde{j}(t) = (u(t), v(t))$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι γεωδαισιακές καμπύλες κλάσης C^∞ της επιφάνειας περιέχονται στα κρίσιμα σημεία της $\mathcal{L}$ (εάν υπάρχουν).

ΑΣΚΗΣΗ: Αν $P, Q \in \mathbb{R}^2$, να βρεθεί η καμπύλη εκείνη που ενώνει τα δύο αυτά σημεία και έχει το ελάχιστο δυνατό μήκος.

Λύση:



Γεωδαισιακές καμπύλες ονομάζονται οι καμπύλες εκείνες που ενώνουν δύο σημεία με τη συντομότερη διαδρομή.

Ορίζουμε το σύνολο:

$$K := \{\gamma \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}^2) \,/\, \gamma(0) = (x_A, y_A),\ \gamma(1) = (x_B, y_B)\}$$

Θεωρούμε τη "συνάρτηση μήκους":

$$\mathcal{L} : K \to \mathbb{R} \quad \text{με τύπο} \quad \mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Η καμπύλη που ψάχνουμε, αν υπάρχει, είναι ένα από τα κρίσιμα σημεία της $\mathcal{L}$.

Στο σημείο αυτό δηλαδή μηδενίζεται το διαφορικό της $\mathcal{L}$.

Πρέπει δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση

$$\left[\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma + s\varepsilon)\right]_{s=0} = 0$$

όπου $\varepsilon(0)=\varepsilon(1)=(0,0)$

Είναι $\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}(\gamma+s\varepsilon)=\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^1 \|\dot\gamma(t)+s\,\dot\varepsilon(t)\|\,dt=$

$$=\int_0^1 \frac{d}{ds}\|\dot\gamma(t)+s\,\dot\varepsilon(t)\|\,dt=$$

ΘΥΜΙΖΩ
$\|\alpha\|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}$

$$=\int_0^1 \frac{d}{ds}\Big(\langle\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t),\,\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle\Big)^{1/2}dt=$$

ΘΥΜΙΖΩ
$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}\Big(\langle\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t),\,\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle\Big)^{-1/2}\cdot\Big(\langle\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle+\langle\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t),\dot\varepsilon(t)\rangle\Big)\,dt$$

$$=\int_0^1 \|\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\|^{-1}\cdot\langle\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle\,dt=$$

$$=\int_0^1 \frac{\langle\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle}{\|\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\|}\,dt$$

Άρα $\left[\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}(\gamma+s\varepsilon)\right]_{s=0}=\displaystyle\int_0^1\frac{\langle\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)\rangle}{\|\dot\gamma(t)\|}\,dt$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της $\mathcal{L}$ λύνουμε την εξίσωση:

$$\int_0^1 \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\varepsilon}(t)\rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|} dt = 0$$

ΘΥΜΙΖΩ
$\lambda \cdot \langle u, \beta\rangle = \langle \lambda u, \beta\rangle$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left\langle \dot{\varepsilon}(t), \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right\rangle dt = 0 \iff$$

$$\Rightarrow \left[\left\langle \varepsilon(t), \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right\rangle\right]_0^1 - \int_0^1 \left\langle \varepsilon(t), \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right)\right\rangle dt = 0$$

0 διότι $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = (0,0)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left\langle \varepsilon(t), \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right)\right\rangle dt = 0$$

Και για να ισχύει η ως άνω σχέση πρέπει να ισχύει: (*)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right) = 0 \qquad \text{άρα} \qquad \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = c \in \mathbb{R}$$

(*) Θα αποδειχθεί ως θεώρημα στα επόμενα μαθήματα

Απόδειξη $j'(t)=(c_1,c_2)$ όπου $j(t)=(c_1 t+c_1', c_2 t+c_2')$

$c_1, c_2, c_1', c_2' \in \mathbb{R}$

με $\sqrt{c_1^2+c_2^2}=1$

Άρα η j είναι ευθεία.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Η μοναδική καμπύλη που μπορεί να ελαχιστοποιεί το μήκος μεταξύ των P, Q είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία.

<u>Άσκηση για σπίτι</u>: Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για $P, Q \in \mathbb{R}^n$ $P=(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$

$Q=(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})$

(έχει λυθεί ως άσκηση στο προηγούμενο μάθημα)

10/10/16

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $p,q\in\mathbb{R}^n$. Από όλες τις ~~...~~ λείες καμπύλες που τα ενώνουν, μόνο το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να έχει το ελάχιστο μήκος.

<u>Απόδειξη</u>: Ορίζουμε το $K:=\{\gamma\in C^\infty([0,1],\mathbb{R}^n)\,/\,\gamma(0)=p,\ \gamma(1)=q\}$

και το συναρτησιακό $S: K\to\mathbb{R}$ με $S(\gamma)=\int_0^1\|\dot\gamma(t)\|dt$

Αναζητώ τα κρίσιμα σημεία του S

Πρέπει δηλαδή να βρούμε εκείνα τα $\gamma\in K$ στα οποία μηδενίζεται το διαφορικό του S.

Δηλαδή το $\frac{d}{ds}S(\gamma(t)+s\,\varepsilon(t))\Big|_{s=0}=0.$

Πρέπει επομένως να λύσουμε την εξίσωση

$\frac{d}{ds}S(\gamma(t)+s\cdot\varepsilon(t))\Big|_{s=0}=0$, όπου $\varepsilon:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ με $\varepsilon(0)=\varepsilon(1)=0\in\mathbb{R}^n$

Είναι $S(\gamma(t)+s\,\varepsilon(t))=\int_0^1\|\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\|dt$, συνεπώς:

$$\frac{d}{ds}S(\gamma(t)+s\,\varepsilon(t))=\int_0^1\frac{d}{ds}\langle\dot\gamma(t)+s\cdot\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle^{1/2}dt=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\langle\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle^{-\frac{1}{2}}\cdot\Big(\langle\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle+\langle\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t),\dot\varepsilon(t)\rangle\Big)=$$

$$=\int_0^1\frac{\langle\dot\varepsilon(t),\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\rangle}{\|\dot\gamma(t)+s\dot\varepsilon(t)\|}dt$$. Για $s=0$ θα είναι:

$(\rightarrow)$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} S(\gamma(t)+s\varepsilon(t))\Big|_{s=0} = \int_0^1 \frac{\langle \dot\varepsilon(t), \dot\gamma(t)\rangle}{\|\dot\gamma(t)\|}\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left\langle \dot\varepsilon(t), \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\right\rangle dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\left\langle \varepsilon(t), \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\right\rangle\right]_0^1}_{0,\ (\text{διότι } \varepsilon(0)=\varepsilon(1)=0)} - \int_0^1 \left\langle \varepsilon(t), \frac{d}{dt}\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\right\rangle dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left\langle \varepsilon(t), \frac{d}{dt}\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}\right\rangle dt = 0$$

(Από θεώρημα που θα αποδειχθεί στις επόμενες σελίδες) (ΘΕΜ. ΘΕΩΡ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ)

προκύπτει $\frac{d}{dt}\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} = 0$ άρα $\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} = c \in \mathbb{R}^n$

Αντιδή $\dot\gamma(t) = \alpha \in \mathbb{R}^n$ με $\|\alpha\| = 1$

Άρα $\gamma(t) = \alpha t + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, δηλ ευθεία.

Αντιδή πρέπει $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$

$\Rightarrow \beta = p$ | $\Rightarrow \alpha + \beta = q \Rightarrow \alpha = q - p$

Επομένως, το μοναδικό κρίσιμο σημείο του S είναι η $\gamma(t) = (q-p)t + p$, $t \in [0,1]$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Έστω $f \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$ και $h \in C^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ με $h(0)=h(1)=0$

Αν $\int_0^1 \langle f(t), h(t) \rangle dt = 0$, τότε $f \equiv 0$ στο $[0,1]$

Απόδειξη: Έστω ότι $f \not\equiv 0$ στο $[0,1]$.
Υπάρχει δηλαδή τουλάχιστον ένα $t_0 \in [0,1]$: $f(t_0) \neq 0$
Έστω λοιπόν $f(t_0) > 0$. (ομοίως και για $f(t_0) < 0$)

Άρα το t_0 διαθέτει γειτονιά U τέτοια ώστε $f(t) > 0$ $\forall t \in U$

Θεωρούμε συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

1) $h(t) = 0$ $\forall t \notin U$

2) $\int_U h(t) > 0$

Ισχυρισμός: Τέτοια h $\exists$! (*)

Θα είναι $\int_0^1 f(t) h(t) dt = \int_U f(t) h(t) dt > 0$ ΑΤΟΠΟ!

Άρα $f \equiv 0$ στο $[0,1]$ ☒

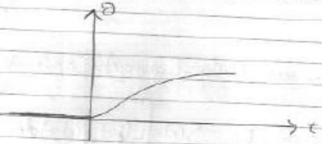
Άσκηση για σπίτι: ΝΑΟ το ως άνω θεώρημα ισχύει για $\forall n > 1$

Απόδειξη Ισχυρισμού (*): Πρέπει να κατασκευάσουμε μία C^∞ συνάρτηση που να μηδενίζεται μόνο εκτός του τυχαίου $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$

Θεωρούμε την $\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\theta(t)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t>0 \\ 0, & t\leq 0 \end{cases}$

ΣΠΙΤΙ

~~[illegible]~~ΝΔΟ η θ είναι C^∞



Η $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\theta(t)\cdot\theta(1-t)$ μηδενίζεται εκτός του $(0,1)$

Ορίζουμε $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με ~~[illegible]~~

$h(t)=\varphi\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$ η οποία είναι κλάσης C^∞ και μηδενίζεται μόνο εκτός του (α,β) $\boxtimes$

$K = \{ j \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{R}^n) \,/\, j(0) = p,\ j(1) = q \}$ και $S : K \to \mathbb{R}$ όπου

$$\underset{\text{δράση}}{S(j)} = \int_0^1 \underset{\text{συνάρτηση Lagrange}}{L(j(t), \dot{j}(t), t)}\, dt$$

συνάρτηση Lagrange $L : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$: (Εξισώσεις Euler-Lagrange): Έστω $K := \{ x \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{R}^n),\ x(0) = p,\ x(1) = q \}$

και $S : K \to \mathbb{R}$ με $S(x) = \int_0^1 L(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt$

Τα κρίσιμα σημεία $x \in K$ του S είναι οι λύσεις των εξισώσεων:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \dot{x}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x, \dot{x}, t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

<u>Απόδειξη</u> Είναι: $\displaystyle \frac{d}{ds} S(x(t) + s\varepsilon(t)) \Big|_{s=0} = 0$

όπου $\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$

Είναι $S(x(t) + s\varepsilon(t)) = \int_0^1 L(x(t) + s\varepsilon(t), \dot{x}(t) + s\dot{\varepsilon}(t), t)\, dt$

Δηλαδή:

$$\frac{d}{ds} S(x(t) + s\varepsilon(t)) = \int_0^1 \frac{d}{ds} L(x(t) + s\varepsilon(t), \dot{x}(t) + s\dot{\varepsilon}(t), t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(x, \dot{x}, t)\, \varepsilon_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x, \dot{x}, t)\, \dot{\varepsilon}_i(t) \right) dt =$$

(⟶)

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\dot{x},t)\,\varepsilon_i(t)\,dt + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x},t)\cdot \varepsilon_i(t)\right]_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x},t)\,\varepsilon_i(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\dot{x},t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x},t)\right)\right]\varepsilon_i(t)\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\dot{x},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x},t)}$$ Εξισώσεις Euler-Lagrange

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Αν $p,q \in \mathbb{R}^n$ τότε υπό όλες τις καμπύλες C^∞ που τα συνδέουν, μόνο το ευθύγραμμο τμήμα ενδέχεται να έχει το ελάχιστο μήκος.

<u>Απόδειξη</u>: <u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>: Μηδενισμός διαφορικού με ορισμό (Αποδείχθη)

<u>Β΄ ΤΡΟΠΟΣ</u>: Μηδενισμός διαφορικού με εξισώσεις Euler-Lagrange

$K := \{x \in C^\infty([0,1],\mathbb{R}^n) \,/\, x(0)=p,\ x(1)=q\}$

και $S: K \to \mathbb{R}$ με $S(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(t)\|\,dt$

Δηλαδή, συνάρτηση Lagrange είναι η

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dots,\dot{x}_n,t) = \sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dots+\dot{x}_n^2}$$

Έτσι, οι εξισώσεις Euler-Lagrange γίνονται:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\dot{x},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x},t) \qquad i=1,\dots,n$$

(→)

επειδή $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\dot{x},t)=0$ είναι:

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dots+\dot{x}_n^2}}, \quad i=1,2,\dots,n$$

Άρα $\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dots+\dot{x}_n^2}} = c \in \mathbb{R}$ οπότε $\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = c_1 \in \mathbb{R}$

δηλ. $x(t)=\alpha t+\beta$ ευθεία

Παραδείγματα 13/10/16

① Εστω $K := \{x \in C^{\infty}([0,1],\mathbb{R}^n) \,/\, x(0)=A,\ x(1)=B\}$

$S: K \to \mathbb{R}$ με $S(x)=\int_0^1 L(x,\dot{x},t)\,dt$

όπου $L(x,\dot{x},t)=H(x,t)$

Πρέπει να βρούμε τα κρίσιμα σημεία του S.

Λύση: Α' ΤΡΟΠΟΣ

(Μηδενισμός διαφορικού με ορισμό)

Αν $x \in K$ κρίσιμο σημείο, το διαφορικό της S μηδενίζεται εκεί, άρα $\frac{d}{ds}S(x(t)+s\varepsilon(t))\Big|_{s=0}=0$, όπου $\varepsilon: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ με $\varepsilon(0)=\varepsilon(1)=0$.

Έτσι έχουμε: $S(x(t)+s\,\varepsilon(t)) = \int_0^1 H(x(t)+s\varepsilon(t),t)\,dt$ άρα.

$$\frac{d}{ds}S(x(t)+s\varepsilon(t)) = \int_0^1 \frac{d}{ds}H(x(t)+s\varepsilon(t),t)\,dt$$

($\longrightarrow$)

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t)+s\varepsilon(t))\,\varepsilon_i(t)\,dt$$ και έτσι:

$$\frac{d}{ds} S(x(t)+s\varepsilon(t))\Big|_{s=0} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t),t)\,\varepsilon_i(t)\,dt$$

και απο Θεμελιώδες Θεώρημα Λογισμού Μεταβολών ισχύει:

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(x,t) = 0 \quad \text{για } i=1,2,\dots,n$$

B' ΤΡΟΠΟΣ

(Μηδενισμός διαφορικού μέσω Euler-Lagrange)

Αφου ο μηδενισμός του διαφορικου ισοδυναμει με τις εξισώσεις Euler-Lagrange, τα κρίσιμα σημεία της S ικανοποιουν την:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\dot{x},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x},t) \quad \text{για } i=1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x_i}(x,t) = 0 \quad i=1,2,\dots,n$$

② Έστω K το ίδιο σύνολο, για $n=1$! $S: K \to \mathbb{R}$

με $S(x) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(t-x)^2 + (\sin x)\cdot \dot{x} \right] dt$

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της f.

<u>Λύση.</u> (Μέσω εξισώσεων Euler-Lagrange)

Πρέπει να μηδενίσω το διαφορικό προκειμένου να βρω τα κρίσιμα σημεία οπότε όπως με πριν:

$\frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t)$ όπου

$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}(t-x)^2 + (\sin x)\dot{x}$

Είναι: $\frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x},t) = -(t-x) + (\cos x)\dot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t) = \sin x$ και $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t) = (\cos x)\,\dot{x}$

επειδή το $x=x(t)$ είναι συνάρτηση του t

και η εξίσωση Euler-Lagrange γίνεται:

$-(t-x) + (\cos x)\dot{x} = (\cos x)\dot{x} \Leftrightarrow x=t$ ή $\boxed{x(t)=t}$

Πρέπει να τσεκάρω αν η καμπύλη που βρήκα ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή $x(0)=A$, $x(1)=B$ (όταν ορίσουμε το K)

<u>Σχόλιο</u>

συνεχίζω με φασμό

③ $K := \{x \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{R}^{\bullet}) \,/\, x(0)=A,\ x(1)=B\}$

$S: K \to \mathbb{R}$, $S(x) = \int_0^1 \cos x \, dt$

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της S

Λύση: (Μέσω ορισμού) Α' ΤΡΟΠΟΣ

Κρίσιμα σημεία της f είναι εκείνα στα οποία μηδενίζεται το διαφορικό της S. Δηλαδή:

$$\frac{d}{ds} S(x(t)+s\varepsilon(t))\Big|_{s=0} = 0 \quad (*)$$

Είναι $S(x(t)+s\varepsilon(t)) = \int_0^1 \cos(x(t)+s\varepsilon(t))\, dt$

Άρα: $\frac{d}{ds} S(x(t)+s\varepsilon(t)) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \cos(x(t)+s\varepsilon(t))\, dt = \int_0^1 -\sin(x(t)+s\varepsilon(t))\,\varepsilon(t)\, dt$

Άρα $(*) \Rightarrow -\int_0^1 \sin(x(t))\,\varepsilon(t)\, dt = 0$

και απο Θεμελιώδες Θεώρημα λογισμού μεταβολών:

$\sin x = 0$ άρα $\boxed{x(t) = n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$

($\longrightarrow$)

B' ΤΡΟΠΟΣ (Μέσω εξ. Euler - Lagrange)

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της S μηδενίζοντας το διαφορικό της, άρα λύνουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x},t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t) \quad \text{με} \quad L(x,\dot{x},t) = \cos x$$

Είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,\dot{x},t) = -\sin x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t) = 0 \quad \text{οπότε} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t) = 0$$

Δηλαδή $-\sin x = 0$, άρα $\boxed{x(t) = n\cdot\pi}$ $n \in \mathbb{Z}$

(4) $K := \{y \in C^{\infty}([0,1],\mathbb{R}) \,/\, y(0) = 0,\ y(1) = 1\}$

και $S: K \to \mathbb{R}$, $S(y) = \int_0^1 (y(x) + x\cdot y'(x))\,dx$

Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της S

A' ΤΡΟΠΟΣ

$$S(y(x) + s\varepsilon(x)) = \int_0^1 \left(y(x) + s\varepsilon(x) + x y'(x) + s x \varepsilon'(x)\right)dx \quad \text{οπότε}$$

$$\frac{d}{ds} S(y(x) + s\varepsilon(x))\Big|_{s=0} = \int_0^1 \left(\varepsilon(x) + x\,\varepsilon'(x)\right)dx \quad \text{, συνεπώς η}$$

$$\frac{d}{ds} S(y(x) + s\varepsilon(x))\Big|_{s=0} = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(\varepsilon(x) + x\,\varepsilon'(x)\right)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \varepsilon(x)dx + \int_0^1 x\varepsilon'(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \varepsilon(x)dx + \underbrace{\cancel{\Big[x\varepsilon(x)\Big]_0^1}}_{0} - \int_0^1 \varepsilon(x)dx = 0$$

$\Leftrightarrow 0 = 0$

Δηλαδή όλα τα στοιχεία του K είναι κρίσιμα σημεία της S.

B' ΤΡΟΠΟΣ (επίσης μέσω εξισώσεων Euler-Lagrange)

(5) $K := \{ y \in C^\infty([0,1], \mathbb{R}^n) \,/\, y(0) = 0,\ y(1) = 1 \}$

$S: K \to \mathbb{R}$, $\quad S(y) = \int_0^1 f(x, y'(x))\, dx$

Να υπολογίσετε τα κρίσιμα στοιχεία της S

Λύση:

Τα κρίσιμα στοιχεία της S μηδενίζουν το διαφορικό της, επομένως ικανοποιούν την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y}(y, y', x) = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'}(y, y', x) \quad , \text{όπου } L(y, y', x) = f(x, y'(x))$$

Είναι $\quad \frac{\partial L}{\partial y}(y, y', x) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(y, y', x) = \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y'(x)) \quad \text{άρα} \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'}(y, y', x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y'(x)) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}(x, y'(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}(x, y'(x))\, y''(x)$$

Συνεπώς η εξίσωση Euler-Lagrange γίνεται

$$\boxed{0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}(x, y'(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}(x, y'(x))\, y''(x)}$$

(Με τα στοιχεία που έχω μέχρι εδώ μπορώ να φτάσω)

ΠΡΟΤΑΣΗ (Αρχή του Beltrami): Έστω $K := \{ y \in C^{\infty}([a,b],\mathbb{R}) \,/\, y(a)=A,\ y(b)=B \}$

και $S: K \to \mathbb{R}$ με $S(y) = \int_a^b L(y,y')\,dx$.

Τότε στα κρίσιμα σημεία της S ικανοποιείται η εξίσωση:

$$L(y,y') - y'\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y') = c.$$

Απόδειξη: Τα κρίσιμα σημεία του S ικανοποιούν την εξίσωση Euler-Lagrange για την $L(y,y')$.

Δηλαδή στα κρίσιμα σημεία $y \in K$ θα είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial y}(y,y') = \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y}(y,y') = \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y'}(y,y')}}_{0} + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(y,y')y'(x) + \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(y,y')y''(x). \quad (*)$$

Υπολογίζουμε το $\frac{d}{dx}\left(L(y,y') - y'\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')\right) =$

$$= \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial x}(y,y')}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial y}(y,y')y'(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')y''(x) - \left(y''(x)\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y') + y'(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')\right)\right)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial y}(y,y')y'(x) - \left(\overbrace{\cancel{\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y'}(y,y')}}^{0} + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(y,y')y'(x) + \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(y,y')y''(x)\right)\cdot y'(x) =$$

$$= y'(x)\left[\frac{\partial L}{\partial y}(y,y') - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(y,y')y'(x) - \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(y,y')y''(x)\right] = 0 \text{ από } (*).$$

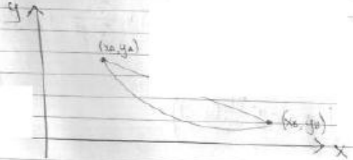
Παρατήρηση: Στη φυσική η ταυτότητα του Beltrami ονομάζεται "αρχή διατήρησης της ενέργειας".

Δηλαδή εάν ένα πρόβλημα φυσικής περιγράφεται από μια συνάρτηση Lagrange $L = L(y, y')$, τότε

$$\underbrace{L(y,y') - y'\frac{\partial L}{\partial y'}(y,y')}_{\text{η ενέργεια των φυσικών}} = c \quad \text{σταθερό}$$

17/10/16

Το πρόβλημα της βραχυστόχρονης καμπύλης



Πρόβλημα: Να βρεθεί η καμπύλη του $\mathbb{R}^2$ που συνδέει τα (x_A, y_A) και (x_B, y_B), την οποία καμπύλη εάν ακολουθήσει ένα υλικό σημείο μάζας $m>0$ που κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους του θα χρειαστεί τον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ και πρέπει $\vec{r}(0) = (x_A, y_A)$

$t \in [0,1]$ $\qquad\qquad$ $\vec{r}(1) = (x_B, y_B)$.

Το πρόβλημα απλοποιείται αν δεχτούμε ότι η καμπύλη είναι της μορφής $y=g(x)$, δηλαδή είναι: $\vec{r}(t)=(t,y(t))$

Ορίζουμε $K:=\{r\in C^2([x_A,x_B],\mathbb{R}^2) \,/\, r(x_A)=(x_A,y_A),\ r(x_B)=(x_B,y_B)\}$

Ορίζουμε και το συναρτησιακό $S: K\to\mathbb{R}^2$ με τύπο:

$$S(\vec{r})=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+(\dot{y}(t))^2}{2g(y_A-y(t))}}\,dt$$

Ιδέα! $u=\frac{s}{t} \Leftrightarrow t=\frac{s}{u}=\frac{\int_{x_A}^{x_B}\|\dot{\vec{r}}(t)\|dt}{\sqrt{2g}\sqrt{y_A-y_B}}$

όπου u την βρίσκω από ΑΔΕ: $\frac{1}{2}u^2=g(y_A-y) \Rightarrow u=\pm\sqrt{2g}\sqrt{y_A-y}$

Άρα είναι $S(\vec{r})=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+(\dot{y}(t))^2}{2g(y_A-y(t))}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+(\dot{y}(t))^2}{y_A-y(t)}}\,dt$

Ψάχνουμε να βρούμε τα ελάχιστα της S, τα οποία βρίσκονται αναγκαστικά στα κρίσιμα σημεία της S

Τα κρίσιμα σημεία της S ικανοποιούν την εξίσωση Euler-Lagrange για την συνάρτηση Lagrange

$$\mathcal{L}(y,\dot{y})=\sqrt{\frac{1+(\dot{y}(t))^2}{y_A-y(t)}}$$

Αφού η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται κατά τρόπο εκπεφρασμένο από το t, ισχύει η ταυτότητα Beltrami, άρα:

$(\rightarrow)$

$$L(y,\dot y) - \dot y \frac{\partial L}{\partial \dot y}(y,\dot y) = c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Για να απλοποιήσουμε την εξίσωση, θέτουμε $z(t) = y_a - y(t)$

άρα $\mathcal{L}(z,\dot z) = \sqrt{\frac{1+\dot z^2(t)}{z(t)}}$ και έτσι η ταυτότητα του Beltrami

μας δίνει: $\mathcal{L}(z,\dot z) - \dot z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z}(z,z) = c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+(\dot z(t))^2}{z(t)}} - \dot z \frac{1}{\sqrt{z(t)}} \frac{1}{2}\left(1+(\dot z(t))^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \dot z(t) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{z(t)}}\left(\sqrt{1+(\dot z(t))^2} - \frac{(\dot z(t))^2}{\sqrt{1+(\dot z(t))^2}}\right) = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{z(t)}}\left(\frac{1+(\dot z(t))^2 - (\dot z(t))^2}{\sqrt{1+(\dot z(t))^2}}\right) = c \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{z(t)\left(1+(\dot z(t))^2\right)}} = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z(t) + z(t)\,(\dot z(t))^2} = c^2 \Leftrightarrow z(t) + z(t)\left(\dot z(t)\right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\dot z(t)\right)^2 = \frac{1-c^2 z(t)}{c^2 z(t)}$$

Άρα $\dot z(t) = \pm\sqrt{\frac{1-c^2 z(t)}{c^2 z(t)}}$

Πρέπει επομένως να λύσουμε τη ΣΔΕ:

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{1-c^2 z(t)}{c^2 z(t)}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{c^2 z(t)}{1-c^2 z(t)}}\, dz = dt \quad (*)$$

Για το $\int \sqrt{\frac{c^2 z}{1-c^2 z}}\, dz$ αντικαθιστούμε $z = \frac{1}{c^2}\sin^2\theta$

$$dz = \frac{2}{c^2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

Άρα γίνεται: $\int \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}\, \frac{2}{c^2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\frac{2}{c^2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta =$

$$= \frac{2}{c^2}\int \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2}{c^2}\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{c^2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c_1$$

Άρα η t από (*) είναι: $t = \frac{1}{c^2}\theta - \frac{1}{2c^2}\sin 2\theta + c_1$ $c_1, c \in \mathbb{R}$

και $z = y_A - y = \frac{1}{c^2}\sin^2\theta$ άρα $\boxed{y = y_A - \frac{1}{c^2}\sin^2\theta}$

Άρα, μοναδικό σημείο (κρίσιμο) της S είναι η καμπύλη

$$r(\theta) = \left(\frac{1}{c^2}\theta - \frac{1}{2c^2}\sin 2\theta + c,\ y_A - \frac{1}{c^2}\sin^2\theta\right)$$

Γενική μορφή κυκλοειδούς καμπύλης

$$\gamma(\varphi) = (\alpha + R\varphi - R\sin\varphi,\ \beta - R + R\cos\varphi)$$

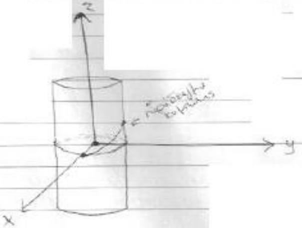
Δηλαδή υποψήφιο ακρότατο του S (και άρα μοναδική υποψήφια λύση του προβλήματος της βραχυστόχρονης καμπύλης) είναι η κυκλοειδής επιφάνεια

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν υπάρχει λύση του προβλήματος της βραχυστόχρονης καμπύλης, τότε αυτή είναι η κυκλοειδής

$$r(\theta)=\left(\frac{1}{c^2}\theta-\frac{1}{2c^2}\sin(2\theta)+c_1,\ y_A-\frac{1}{c^2}\sin^2\theta\right)$$

Γεωδαισιακές του Κυλίνδρου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Να βρεθεί η καμπύλη του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$ που συνδέει τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ και έχει το ελάχιστο δυνατό μήκος.



Παραμετρική μορφή κυλίνδρου: $\vec{r}(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$

$(u,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$

Έστω καμπύλη $\tilde{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $\tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$

και η $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma = r \circ \tilde{\gamma} = (\cos(u(t)), \sin(u(t)), v(t))$

Ορίζουμε το $K := \{ \gamma \in C^{\infty}([\alpha,\beta], \underbrace{S^1 \times \mathbb{R}}_{\text{κύλινδρος}}) \,/\, \gamma(\alpha) = (1,0,0),\ \gamma(\beta) = (0,1,1) \}$

Ακόμα $S: K \to \mathbb{R}$ με $S(\gamma) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma(t)\| dt$

Είναι $\gamma(t) = (\cos u(t), \sin u(t), v(t))$ άρα

$\gamma'(t) = (-u'(t) \sin u(t), u(t) \cos u(t), v'(t))$

και $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}$

Δηλαδή $S(\gamma) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\, dt$, τα ελάχιστα του οποίου ψάχνουμε να βρούμε

Τα ελάχιστα όμως του S είναι ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία του, ικανοποιούν δηλαδή την Euler-Lagrange, με συνάρτηση Lagrange την:

$$\mathcal{L}(\gamma, \dot{\gamma}) = \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} = \mathcal{L}(u, \dot{u}, v, \dot{v})$$

Έτσι, οι εξισώσεις Euler-Lagrange γίνονται

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u, \dot{u}, v, \dot{v}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}(u, \dot{u}, v, \dot{v})$$

και $$\frac{\partial L}{\partial v}(u, \dot{u}, v, \dot{v}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{v}}(u, \dot{u}, v, \dot{v})$$

(→)

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u,\dot u,v,\dot v)=0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial v}(u,\dot u,v,\dot v)=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot u}(u,\dot u,v,\dot v)=\frac{2\cdot \dot u(t)}{2\sqrt{(\dot u(t))^2+(\dot v(t))^2}} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot v}(u,\dot u,v,\dot v)=\frac{2\dot v(t)}{2\sqrt{(\dot u(t))^2+(\dot v(t))^2}}$$

Άρα $\begin{cases} \dfrac{\dot u(t)}{\sqrt{(\dot u(t))^2+(\dot v(t))^2}}=c_1 \\ \dfrac{\dot v(t)}{\sqrt{(\dot u(t))^2+(\dot v(t))^2}}=c_2 \end{cases}$

$$\stackrel{\div}{\Leftrightarrow} \quad \frac{du}{dv}=\frac{c_1}{c_2}=c\in\mathbb{R}$$

άρα $\quad u(v)=cv+c_2 \qquad c,c_2\in\mathbb{R}$

Άρα η καμπύλη είναι: $\quad \gamma(t)=\left(\cos(cv(t)+c_2),\sin(cv(t)+c_2),v(t)\right)$

Άρα μοναδικό κρίσιμο σημείο του S είναι η:

$$\gamma(v)=\left(\cos(cv+c_3),\sin(cv+c_3),v\right) \qquad c,c_2\in\mathbb{R}$$

Για $\quad v=0 \qquad \gamma(0)=\left(\cos(c_3),\sin(c_3),0\right)=(1,0,0)$

και $\boxed{c_3=0}$

Για $\quad v=1 \qquad \gamma(1)=\left(\cos(c),\sin(c),1\right)=(0,1,1)$

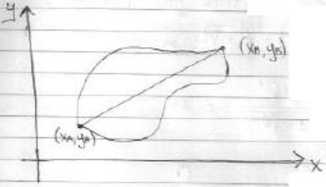
και $\boxed{c=\frac{\pi}{2}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η C^∞ καμπύλη του $S^1\times\mathbb{R}$ που συνδέει τα $(1,0,0)$ και $(0,1,1)$ και έχει το ελάχιστο μήκος $\boxed{\text{αν υπάρχει}}$ είναι η:

$$\gamma:[0,1]\to S^1\times\mathbb{R}\ ,\quad \gamma(v)=\left(\cos\tfrac{\pi}{2}v,\ \sin\tfrac{\pi}{2}v,\ v\right)$$

20/10/16

Ελαχιστικές Επιφάνειες



Πρόβλημα: Να βρεθεί η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας:

1) Διέρχεται από τα (x_A,y_A), (x_B,y_B)
2) Είναι τέτοια ώστε η αντίστοιχη επιφάνεια εκ περιστροφής να έχει το ελάχιστο εμβαδόν.

Ορίζουμε το $\mathcal{K}:=\{f\in C^\infty([x_A,x_B],\mathbb{R})\ /\ f(x_A)=y_A,\ f(x_B)=y_B\}$

Ακόμα, θεωρούμε το συναρτησιακό $S:\mathcal{K}\to\mathbb{R}$,

$$S(f)=2\pi\int_{x_A}^{x_B} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Ψάχνουμε να βρούμε τα ελάχιστα του S

Τα ελάχιστα του συναρτησιακού είναι ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία του S, τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange, με συνάρτηση Lagrange:

$$\mathcal{L}(f,f') = f\cdot\sqrt{1+(f')^2}$$

Αφού η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από την ανεξάρτητη μεταβλητή x, ισχύει η ταυτότητα του Beltrami:

$$\mathcal{L}(f,f') - f'\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}(f,f') = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\sqrt{1+(f')^2} - f'\cdot f\,\frac{\cancel{2}f'}{2\sqrt{1+(f')^2}} = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\left(1+(f')^2\right) - f\cdot(f')^2}{2\sqrt{1+(f')^2}} = c \Leftrightarrow \frac{f}{\sqrt{1+(f')^2}} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+(f')^2}{f^2} = \frac{1}{c^2} \Rightarrow (f')^2 = \frac{1}{c^2}f^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{c^2}f^2 - 1}$$

Πρέπει λοιπόν να λύσουμε την ΣΔΕ:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{f^2}{c^2} - 1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f^2-c^2}}\,df = \frac{1}{c}\,dx$$

Άρα $$\int \frac{1}{\sqrt{f^2-c^2}}\,df = \frac{1}{c}x + c_0 \qquad c, c_0 \in \mathbb{R}$$

Για το $\int \frac{1}{\sqrt{f^2-c^2}} df$, θέτουμε $f = c \cosh(u)$

οπότε $df = c \cdot \sinh(u)\, du$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{c \cdot \sinh(u)}{\sqrt{c^2 \cosh^2(u) - c^2}} du = \int du = u + c_3$$

επομένως $\int \frac{1}{\sqrt{f^2(x) - c^2}} df = \operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{f}{c}\right)$

και έτσι έχουμε τελικά: $\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{f}{c}\right) = \frac{x}{c} + c_0$

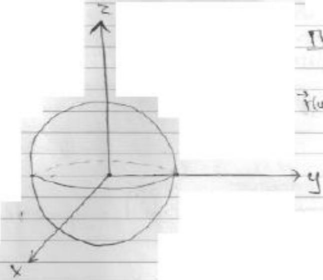
$$\Rightarrow \boxed{f(x) = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c} + c_0\right)}$$

<u>κατενοειδής επιφάνεια</u> $c, c_0 \in \mathbb{R}$

Πρέπει $f(x_A) = y_A \Rightarrow c \cosh\left(\frac{x_A}{c} + c_0\right) = y_A$

ομοίως $c \cosh\left(\frac{x_B}{c} + c_0\right) = y_B$

Γεωδαισιακές Σφαίρας



Παραμετρική μορφή σφαίρας με $R=1$

$$\vec{r}(u,v)=(\cos u \sin v,\ \sin u \sin v,\ \cos v)$$

$$(u,v)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

Θεωρούμε την $\gamma(t)=(u(t),v(t))$ και η καμπύλες της S^2 θα είναι της μορφής: $\tilde{\gamma}=r\circ\gamma$,

δηλαδή $\tilde{\gamma}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με

$$\tilde{\gamma}(t)=(\cos u(t)\sin v(t),\ \sin u(t)\sin v(t),\ \cos v(t))$$

Ορίζουμε το $K:=\{\gamma\in C^{\infty}(\mathbb{R},S^2) / \gamma(t_0)=A,\ \gamma(t_1)=B\}$

και το $S: K\to\mathbb{R}$, με $S(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$

Ψάχνουμε να βρούμε τα ελάχιστα του S, που περιέχονται στα κρίσιμα σημεία του S, ικανοποιούν δηλαδή της εξίσωσης Euler-Lagrange για την συνάρτηση Lagrange

(δίπλα $\rightarrow$)

$\mathcal{L}(u,\dot u,v,\dot v) = \|\dot j(t)\|$

Είναι $\dot j(t) = (-\sin u\cdot\dot u\cdot\sin v + \cos u\cos v\cdot\dot v,\ \cos u\,\dot u\,\sin v + \sin u\cos v\,\dot v,\ -\sin v\cdot\dot v)$

$$\|\dot j(t)\| = \Big(\sin^2 u\cdot\dot u^2\cdot\sin^2 v - \cancel{2\sin u\cos u\sin v\cos v\cdot\dot u\dot v} + \cos^2 u\cdot\cos^2 v\,\dot v^2 +$$

$$+\cos^2 u\,\dot u^2\sin^2 v + \cancel{2\sin v\cos v\sin u\cos u\,\dot u\cdot\dot v} + \sin^2 u\cdot\cos^2 v\,\dot v^2 + \dot v^2\sin^2 v\Big)^{1/2} =$$

$$= \left(\cos^2 v\cdot\dot v^2 + \sin^2 v\cdot\dot u^2 + \sin^2 v\,\dot v^2\right)^{1/2} = \left(\sin^2 v\cdot\dot u^2 + \dot v^2\right)^{1/2}$$

Άρα $\mathcal{L}(u,\dot u,v,\dot v) = \sqrt{\sin^2 v\cdot\dot u^2 + \dot v^2}$

Οι καμπύλες που ψάχνουμε είναι [illegible] σε αυτές που ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}(u,\dot u,v,\dot v)}_{0} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot u}(u,\dot u,v,\dot v) \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v}(u,\dot u,v,\dot v) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot v}(u,\dot u,v,\dot v) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\sin^2 v\,\dot u}{\sqrt{\sin^2 v\cdot\dot u^2 + \dot v^2}}\right) \\[3ex] \dfrac{\sin v\cos v}{\sqrt{\sin^2 v\,\dot u^2 + \dot v^2}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot v}{\sqrt{\sin^2 v\cdot\dot u^2 + \dot v^2}}\right) \end{cases}$$

Ένας τρόπος να το λύσω είναι γνωρίζοντας ότι αυτή η ποσότητα είναι σταθερή και κάνοντας πράξεις

Απλοποίηση: Υποθέτουμε ότι $\dot j(t) = (u(t), v(t)) = (t, v(t))$

Έτσι, η εξίσωση (η πρώτη του συστήματος) γίνεται:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\sin^2 v}{\sqrt{\sin^2 v + \dot v^2}} \quad \text{άρα} \quad \frac{\sin^2 v}{\sqrt{\sin^2 v + \dot v^2}} = c \in \mathbb{R}$$

ΣΠΙΤΙ: Λύνω ~~το~~ νέο σύστημα

Εναλλακτικά, αφού η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από την ανεξάρτητη μεταβλητή t, ο Beltrami μας λέει ότι:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u,\dot{u},v,\dot{v}) - \dot{u}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}(u,\dot{u},v,\dot{v}) = c_1 \\ \mathcal{L}(u,\dot{u},v,\dot{v}) - \dot{v}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}(u,\dot{u},v,\dot{v}) = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2} - \dot{u}\dfrac{\sin^2 v \cdot \dot{u}}{\sqrt{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2}} = c_1 \\ \sqrt{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2} - \dot{v}\dfrac{\dot{v}}{\sqrt{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2}} = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\cancel{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2} + \dot{v}^2 - \cancel{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2}}{\sqrt{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2}} = c_1 \\ \dfrac{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \cancel{\dot{v}^2} - \cancel{\dot{v}^2}}{\sqrt{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2}} = c_2 \end{cases}$$

$$\stackrel{\div}{\Rightarrow} \quad \frac{\dot{v}^2}{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2} = c \Rightarrow \left(\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}}\right)^2 = c \cdot \sin^2 v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} = k \cdot \sin v \Leftrightarrow \int \frac{1}{\sin v}\,dv = k\int du \Rightarrow \ln \tan\frac{v}{2} = ku + c_1$$

Δηλαδή $u(v) = \frac{1}{k}\ln\left(\tan\frac{v}{2}\right) - \frac{c_1}{k}$

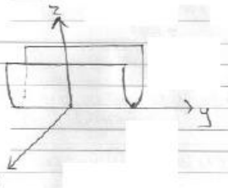
Έχω βρει δηλαδή την καμπύλη

$$\tilde{\gamma}(v) = \left(\frac{1}{k} \ln\left(\tan \frac{v}{2}\right) - \frac{c_1}{k} , v \right)$$

$\gamma(v) = r \circ \tilde{\gamma}(v)$

$$\to \gamma(v) = \left(\cos\left(\frac{1}{k} \ln\left(\tan\frac{v}{2}\right) - \frac{c_1}{k}\right) \cdot \sin v ,\ \sin\left(\frac{1}{k} \ln\left(\tan \frac{v}{2}\right) - \frac{c_1}{k}\right) \sin v ,\ \cos v \right)$$

ΑΣΚΗΣΗ·
(1ο Πρόβλημα)



$z = x^2$

$(0,0,0) \to (2,0,4)$

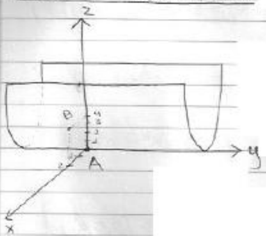
Πρόβλημα. Πώς πηγαίνω από το $(0,0,0)$ στο $(2,0,4)$ με την ελάχιστη δυνατή απόσταση;

Ανοικτό!
(αλλά ωραίο θέμα)

2ο Πρόβλημα: $\mathcal{K} := \{ \gamma \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{R}^2) \mid \|\dot\gamma\| = 1 ,\ \gamma(0) = \gamma(1) = 0 \}$

$S: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ με $S(\gamma) = \int_0^1 \kappa(t)\, dt$, όπου κ η καμπυλότητα της γ.

Λύση 1ου Προβλήματος



$A = (0,0,0) \qquad B = (2,0,4)$

$z = x^2$

Το σχήμα είναι παραβολή $z = x^2$ (του επιπέδου xz) "τραβηγμένη" στον άξονα των y.

Άρα μια παραμετρικοποίηση της επιφάνειας είναι

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 \end{pmatrix}$$

Ορίζω το σύνολο $\mathcal{K} := \{ \gamma \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \mid \gamma(t_0) = A ,\ \gamma(t_1) = B \}$

και το $S: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ με $S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\|\, dt$

Η καμπύλη που ψάχνω (εάν υπάρχει) θα βρίσκεται ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού S.

Είναι $\vec{\gamma}(t) = \left(u(t), v(t), u^2(t)\right)$

$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \left(\dot{u}(t), \dot{v}(t), 2u(t)\,\dot{u}(t)\right)$

και $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + 4\dot{u}^2(t)\,u^2(t)}$

Άρα, $S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + 4u^2(t)\cdot\dot{u}^2(t)}$

Θα χρησιμοποιήσω τις εξισώσεις Euler-Lagrange για την συνάρτηση Lagrange:

$$\mathcal{L}(u,\dot{u},v,\dot{v}) = \sqrt{\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + 4u^2(t)\,\dot{u}^2(t)}$$

δηλαδή
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u,\dot{u},v,\dot{v}) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}(u,\dot{u},v,\dot{v}) \\[2ex] \underbrace{\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(u,\dot{u},v,\dot{v})}_{\to 0} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}(u,\dot{u},v,\dot{v}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\overset{4}{\cancel{8}}u(t)\cdot\dot{u}^2(t)}{2\sqrt{\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + 4u^2(t)\cdot\dot{u}^2(t)}} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\cancel{2}\dot{u}(t) + \overset{4}{\cancel{8}}u^2(t)\cdot\dot{u}(t)}{\cancel{2}\sqrt{\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + 4u^2(t)\cdot\dot{u}^2(t)}} \\[3ex] 0 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\cancel{2}\dot{v}(t)}{\cancel{2}\sqrt{\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + 4u^2(t)\cdot\dot{u}^2(t)}} \end{cases}$$

$(\rightarrow)$

Επειδή το σύστημα είναι δύσκολο να επιλυθεί, θα χρησιμοποιήσω τις εξισώσεις του Beltrami, καθώς η συνάρτηση $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από τη μεταβλητή t.

Άρα:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u,\dot u,v,\dot v) - \dot u \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot u}(u,\dot u,v,\dot v) = c_1 \\ \\ \mathcal{L}(u,\dot u,v,\dot v) - \dot v \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot v}(u,\dot u,v,\dot v) = c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2} - \dot u \dfrac{\dot u + 4u^2 \dot u}{\sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2}} = c_1 \\ \\ \sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2} - \dot v \dfrac{\dot v}{\sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2}} = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\cancel{\dot u^2} + \dot v^2 + \cancel{4u^2\dot u^2} - \cancel{\dot u^2} - \cancel{4u^2\dot u^2}}{\sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2}} = c_1 \\ \\ \dfrac{\dot u^2 + \cancel{\dot v^2} + 4u^2\dot u^2 - \cancel{\dot v^2}}{\sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2}} = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\dot v^2}{\sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2}} = c_1 \\ \\ \dfrac{\dot u^2 + 4u^2\dot u^2}{\sqrt{\dot u^2 + \dot v^2 + 4u^2\dot u^2}} = c_2 \end{cases}$$

Και με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\dot{v}^2}{\dot{u}^2 + 4u^2\dot{u}^2} = c \rightarrow \frac{\dot{v}^2}{\dot{u}^2(1+4u^2)} = c$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{v}^2}{\dot{u}^2} = c(1+4u^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\left(\frac{du}{dt}\right)^2} = c(1+4u^2) \Rightarrow \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = c(1+4u^2)$$

ή $\frac{dv}{du} = \sqrt{c(1+4u^2)}$

$$\Rightarrow \sqrt{c(1+4u^2)}\,du = dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2}\left(\sqrt{1+4u^2}\cdot u + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+4u^2}+2u\right)\right) = v + c_0$$

Αρχή του Hamilton 24/10/16

Έστω σωματίδιο μάζας $m>0$ του οποίου την τροχιά $x: I=[t_0,t_1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ θέλουμε να υπολογίσουμε

Έστω $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V=V(x)$ $(F=-\vec{\nabla} V)$ και $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ η κινητική ενέργεια:

$$T(\dot{x})=\frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dots+\dot{x}_n^2\right)$$

Ορισμός: Δράση του παραπάνω σωματιδίου ονομάζουμε το

$$S(x)=\int_{t_0}^{t_1}(T(\dot{x})-V(x))\,dt$$

Η Αρχή του Hamilton λέει πως τα σωματίδια επιλέγουν την καμπύλη $x(t)$ που ελαχιστοποιεί τη δράση
(Αρχή της ελάχιστης δράσης)

Συμπέρασμα: Η τροχιά του σωματιδίου $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange, για την συνάρτηση Lagrange:

$$\mathcal{L}(x,\dot{x})=T(\dot{x})-V(x)$$

Άρα $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x,\dot{x})=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x})$$ για $i=1,\dots,n$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι εξισώσεις κίνησης των Euler-Lagrange ισοδυναμούν με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα.

Απόδειξη: Είναι $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,\dot{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x)$

και $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x}) = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}(\dot{x}) = m\,\dot{x}_i$

Άρα η εξίσωση Euler-Lagrange γίνεται

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x) = m\,\ddot{x}_i \qquad \left(\text{ισχύει όμως } \vec{F} = -\vec{\nabla} V\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_i = m\,\ddot{x}_i \quad \text{για } i=1,\dots,n$$

που είναι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα

Ορολογία, δανεισμένη από τη Φυσική.

Έστω ότι ένα φυσικό πρόβλημα περιγράφεται από τη συνάρτηση Lagrange $\mathcal{L}(x,\dot{x},t)$.

Ονομάζουμε

1) δύναμη την ποσότητα $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$

2) ορμή την ποσότητα $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$

3) ενέργεια του προβλήματος την ποσότητα

$$E(x,\dot{x},t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{x}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x,\dot{x},t)\right) - \mathcal{L}(x,\dot{x},t) =$$

$$= 2T(\dot{x}) - \mathcal{L}(x,\dot{x},t) = 2T - T + V = T + V$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας):

Η ενέργεια $E(x,\dot{x},t)$, εάν δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από τον χρόνο t, διατηρείται σταθερή.

Απόδειξη:

Εάν η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το t, τότε η ταυτότητα του Beltrami δίνει:

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) - \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x}) = c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E(x,\dot{x}) = -c \in \mathbb{R} \quad \text{(σταθερή)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχή Διατήρησης της Ορμής):

Εάν η συνάρτηση Lagrange ενός φυσικού προβλήματος δεν εξαρτάται από τη "θέση" x_i, η αντίστοιχη ορμή διατηρείται σταθερή.

Απόδειξη.

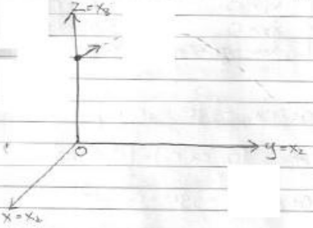
Έστω ότι η $\mathcal{L}(x,\dot{x})$ δεν εξαρτάται από τη "θέση" x_i, άρα $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$, οπότε η εξίσωση

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(x,\dot{x}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x})$$ γίνεται:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}(x,\dot{x}), \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = c \in \mathbb{R}$$

Άρα η ορμή είναι σταθερή.

Παράδειγμα Βολής: Σωματίδιο μάζας $m = 5$ kg βάλλεται σε ύψος 10 m.
Την αρχική χρονική στιγμή η ταχύτητά του ήταν $(0,1,1)$
Ποια είναι η θέση του την στιγμή $t = 1$ sec;



Από την εκφώνηση:

Αρχ Θέση $(0,0,10)$
Αρχ Ταχύτητα $(0,1,1)$

Κινητική ενέργεια του προβλήματος. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

Δυναμική ενέργεια του προβλήματος. $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$V(x_1, x_2, x_3) = m g x_3$$

Άρα η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3) - m g x_3$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \Leftrightarrow 0 = m \ddot{x}_1$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \Leftrightarrow 0 = m \ddot{x}_2$

(→)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} \Rightarrow -mg = m\ddot{x}_3$$

Άρα, οι εξισώσεις κίνησης είναι οι:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 = 0 \\ m\ddot{x}_3 = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = C_1 \\ \dot{x}_2 = C_2 \\ \dot{x}_3 = -gt + C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 t + C_4 \\ x_2(t) = C_2 t + C_5 \\ x_3(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_6 \end{cases}$$

Άρα $\vec{x}(t) = \left(C_1 t + C_4,\ C_2 t + C_5,\ -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_6\right)$

Πρέπει $x(0) = (0,0,10)$ άρα $(C_4, C_5, C_6) = (0,0,10)$

δηλαδή $\vec{x}(t) = \left(C_1 t,\ C_2 t,\ -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + 10\right)$

Ακόμα $\dot{x}(0) = (0,1,1)$ άρα $(C_1, C_2, C_3) = (0,1,1)$

Τελικά $\boxed{\vec{x}(t) = \left(0,\ t,\ -\frac{1}{2}gt^2 + t + 10\right)}$ Η εξίσωση τροχιάς

→ Υπάρχει ολοκλήρωμα της κίνησης,

1) Αφού η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το t

$$\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = c \quad \text{ή} \quad T(\dot{x}) + V(x) = \text{σταθερό}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) + mgx_3 = c$$

2) Αφού η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται από το x_1:

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = C_2 \Rightarrow m\dot{x}_1 = C_2 \qquad (\text{για } t=0 \ .\ C_2 = 0)$$

3) Η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται από το x_2:

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = C_3 \Rightarrow m\dot{x}_2 = C_3 \qquad (C_3 = m)$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Εάν η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από τον χρόνο t, τότε η ταυτότητα του Beltrami μας δίνει το ολοκλήρωμα της ενέργειας, ενώ εάν η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται από κάποια θέση x_i, η αντίστοιχη ορμή P_i είναι ολοκλήρωμα της κίνησης.

<u>Παράδειγμα 2, Σφαιρικό Εκκρεμές</u>:

Συνάρτηση Κινητικής ενέργειας $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$$

Συνάρτηση Δυναμικής ενέργειας: $V: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$V(x_1, x_2, x_3) = -mgx_3$$

Κάνοντας αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες: $(R=1)$

$x = \cos\varphi \sin\theta$
$y = \sin\varphi \sin\theta$
$z = \cos\theta$

και οι παράγωγοι : $\dot{x} = -\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\sin\theta + \cos\varphi\,\cos\theta\,\dot{\theta}$
(ως προς t) $\dot{y} = \cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\sin\theta + \sin\varphi\,\cos\theta\,\dot{\theta}$
$\dot{z} = -\sin\theta\,\dot{\theta}$

Άρα $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 =$

$$= \sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi} + \cos^2\varphi\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 +$$
$$+ \cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2\cdot\sin^2\theta + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi} + \sin^2\varphi\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 +$$
$$+ \sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 =$$

$$= \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 = \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2$$

άρα στις σφαιρικές $V(\varphi,\theta) = -mg\cos\theta$

$$T(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

Συνάρτηση Lagrange :

$$\mathcal{L}(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}) = T(\varphi,\theta) - V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2\cdot\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + mg\cos\theta$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \\[2ex] \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{d}{dt}\left(m\dot{\varphi}\cdot\sin^2\theta\right) \\[2ex] m\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta = \dfrac{d}{dt}\left(m\dot{\theta}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{\varphi}\sin^2\theta + 2m\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = 0 \\[2ex] m\dot{\varphi}^2\cdot\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta = m\ddot{\theta} \end{cases}$$

Ολοκληρώματα της Κίνησης:

Η συνάρτηση $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται από το t, άρα από ταυτότητα του Beltrami:

$$\boxed{E = T + V = \frac{1}{2}m\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + mg\cos\theta = c_1}$$

Η $\mathcal{L}$ δεν εξαρτάται από το φ, άρα:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = c_2 \Rightarrow \boxed{m\dot{\varphi}\sin^2\theta = c}$$

Το Θεώρημα της Emily Noether 27/10/16

§1: Αλλαγές Συντεταγμένων

Στο $\mathbb{R}^2$ οι πολικές συντεταγμένες εκφράζονται ως εξής:

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

Είναι η $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\Phi(x,y)=\Big(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}\,,\,\underbrace{\arctan\frac{y}{x}}_{\varphi}\Big)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια "αλλαγή συντεταγμένων" του $\mathbb{R}^n$ είναι ένας αμφιδιαφορομορφισμός του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή μια απεικόνιση $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ που είναι:

- 1-1
- επί
- διαφορίσιμη
- με αντίστροφο διαφορίσιμη

$\boxed{\text{Πχ}}$ Έστω $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\Phi(x,y)=(x+y,\,x-y)$. Να εξεταστεί αν είναι αμφιδιαφορομορφισμός και να βρεθεί η Φ

Λύση: Είναι $\Phi(x,y)=(u,v) \Rightarrow \begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$

$$\oplus \quad u+v=2x \Rightarrow x=\frac{u+v}{2}$$

$$\text{οπότε} \quad y=\frac{u-v}{2}$$

Επομένως η συνάρτηση $\Phi^{-1}(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$ είναι η αντίστροφη της Φ. $\Phi^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{πχ2}}$ Θεωρώ την $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x+2y$
και την αλλαγή συντεταγμένων
$\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο
$$\Phi(x,y) = (x+2,\ y-5)$$

Είναι $f\circ\Phi(x,y) = f(x+2,\ y-5) = x+2+2y-10 = x+2y-8$

$\boxed{\text{πχ3}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2+2$

Αλλαγή μεταβλητών $\Phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\Phi(x,y) = (x+10, y)$

Τότε $f\circ\Phi(x,y) = f(x+10,\ y) = y^2+2 = f(x,y)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ αμφιδιαφορομορφισμός του $\mathbb{R}^n$. Η Φ ονομάζεται συμμετρία της f εάν ισχύει: $f\circ\Phi = f$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

Δηλαδή, το διάγραμμα αντιμετατίθεται.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ.</u> Έστω $L(x,\dot{x},t)$ συνάρτηση Lagrange για καμπύλες $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x = x(t)$.
Έστω επίσης μία αλλαγή συντεταγμένων $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $y = \Phi(x)$.
Τότε αν η $x(t)$ είναι λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange για την $L(x,\dot{x},t)$ η $\Phi\circ x(t) = y(t)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "x(t)"] \arrow[dr, "y(t)"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\Phi"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Λύνει τις Euler-Lagrange για την $\mathcal{L}(y,\dot{y},t) = \mathcal{L}\circ\Phi$;

ΠΡΟΤΑΣΗ: (A) Αν η $x: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ λύνει την εξίσωση Euler-Lagrange για την $\mathcal{L}(x,\dot{x},t)$ και $\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ συμμετρία της $\mathcal{L}$, τότε η $y=\varphi\circ x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ λύνει την Euler-Lagrange για την $\mathcal{L}\circ\Phi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η οικογένεια $\{\Phi_s:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\}$, $s\in\mathbb{R}$, αμφιδιαφορομορφισμών ονομάζεται μονοπαραμετρική ομάδα αμφιδιαφορομορφισμών εάν:

(i) $\Phi_0(x)=x$

(ii) $\Phi_t\circ\Phi_s(x)=\Phi_{t+s}(x) \quad \forall t,s\in\mathbb{R}$

Απόδειξη της Πρότασης (A):

Αφού Φ συμμετρία, $\mathcal{L}(x,\dot{x},t)=\mathcal{L}(y,\dot{y},t)$

δηλαδή $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}$

οπότε $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \iff \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}$

$\boxed{\text{πχ}}$ Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=2y$. ΝΔΟ η $\{\Phi_s:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \Phi_s(x,y)=$
$=(x+s,y)\}$, $s\in\mathbb{R}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ομάδα συμμετρ
της f.

Λύση: $\forall s\in\mathbb{R}$ η Φ_s είναι συμμετρία της f, αφού

$$f\circ\Phi(x,y)=f(x+s,y)=2y=f(x,y)$$

(i) Για $s=0$, $\Phi_0(x,y)=(x,y)$

(ii) Είναι $\Phi_t\circ\Phi_s(x,y)=\Phi_t(x+s,y)=(x+s+t,y)=\Phi_{t+s}(x,y)$

Επομένως πρόκειται για μονοπαραμετρική ομάδα συμμετρ
ιών της συνάρτησης f.

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=x^2+y^2$

ΝΔΟ η $\{\Phi_s:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \Phi_s(x,y)=(x\cos(s)-y\sin(s),\ x\sin(s)+y\cos($

με $s\in\mathbb{R}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ομάδα συμμετρ
της f.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Noether, E): Ας υποθέσουμε πως η συνάρτηση Lagrange $L(x,\dot{x},t)$ παραμένει αμετάβλητη από την μονοπαραμετρική ομάδα συμμετριών $\{\varphi_s\}$, $s\in\mathbb{R}$.

Τότε, το "ρεύμα της Noether":

$$I(x,\dot{x})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \varphi_{i,s}(x)}{\partial s}\Big|_{s=0}$$

αποτελεί ολοκλήρωμα της κίνησης των αντίστοιχων εξισώσεων Euler - Lagrange.

Απόδειξη: Έστω $x(t)$ λύση των εξισώσεων Euler - Lagrange με την $L(x,\dot{x},t)$.

Η $y_s(t)=\varphi_s\circ x(t)$ είναι λύση των εξισώσεων Euler - Lagrange με την $L\circ\varphi_s(x)$. Άρα:

$$\frac{\partial L}{\partial y_{i,s}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{i,s}} \qquad i=1,\dots,n$$

Αφού οι φ_s συμμετρίες της L, η $L\circ\varphi_s$ δεν εξαρτάται από το s, επομένως

$$\frac{\partial L(\varphi_s(x))}{\partial s}=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial s}(y_s,\dot{y}_s)=0 \quad (1)$$

όπου $$\frac{\partial L}{\partial s}(y_s,\dot{y}_s)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial y_{i,s}}\frac{\partial y_s}{\partial s}+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{i,s}}\frac{\partial \dot{y}_s}{\partial s}\right)=$$

(→)

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot y_{i,s}}\frac{\partial y_{i,s}}{\partial s}+\frac{\partial L}{\partial \dot y_{i,s}}\frac{\partial \dot y_{i,s}}{\partial s}\right)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot y_{i,s}}\frac{\partial y_{i,s}}{\partial s}$$

Όμως $y_s=\varphi_s(x)$ άρα $\frac{d}{dt}I(x,\dot x)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot x_i}\frac{\partial \varphi_{i,s}}{\partial s}\Big|_{s=0}=0$

(είναι ίσο με μηδέν λόγω της σχέσης ①)

31/10/16

① Αλλαγές Συντεταγμένων

• Στον $\mathbb{R}^n$, αλλαγή συντεταγμένων είναι μια απεικόνιση $\varphi: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ η οποία πρέπει να πληροί ορισμένες ιδιότητες (αμφιδιαφορισιμότητα)

$\boxed{\text{Παρ}}$ $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\arctan e^x$

είναι αμφιδιαφορομορφισμός του $\mathbb{R}$.

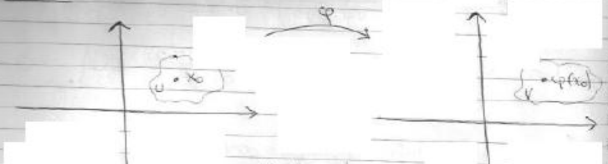
Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης (από Π ΙΙΙ)

~~Αν $U,V\subseteq\mathbb{R}^n$ $x_0\in\mathbb{R}^n$~~

Έστω $\varphi: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ και $x_0\in\mathbb{R}^n$. Αν η Ιακωβιανή ορίζουσα της φ στο x_0 είναι μη μηδενική, τότε η φ είναι αμφιδιαφορομορφισμός από μια γειτονιά του x_0 σε μια γειτονιά του $\varphi(x_0)$.

(→)

Απόδειξη:



$\varphi: U \to V$ είναι αμφιδιαφορομορφισμός

$\boxed{\pi\chi}$ Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^2$ και $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2}$$

Είναι $\varphi'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{1+4x}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ άρα $\varphi'(0) = 1 \neq 0$

Άρα η ιακωβιανή της φ στο $x_0 = 0$, είναι μη μηδενική.

Άρα υπάρχουν μια γειτονιά U,V του $0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η $\varphi: U \to V$ να είναι αμφιδιαφορομορφισμός.

Εντός του U: $f(\varphi(x)) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\varphi(x)) = x$$

$\boxed{\pi\chi}$ $\int e^{x+x^2}(1+2x)\,dx$

Θεωρούμε την $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x + x^2$

(→)

και είναι $d\varphi = (1+2x)\,dx$

Άρα στις νέες συντεταγμένες το ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή:

$$\int e^{\varphi}\, d\varphi = e^{\varphi} + c \quad , c\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή $\displaystyle\int e^{x+x^2}(1+2x)\,dx = e^{x+x^2} + c \quad , c\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{πχ.}}$ Αν $y: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=y(x)$ άγνωστη συνάρτηση, τότε να λυθεί η:

$$y'(x) = \frac{x+y(x)}{x+2y(x)}$$

Θεωρούμε την $\varphi: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad \varphi(x,y) = \left(x, \frac{y}{x}\right) = (u,v)$

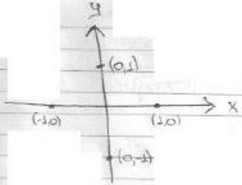
Δηλαδή $v = \frac{y}{x} \Rightarrow dv = \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

και άρα $\displaystyle\frac{dv}{du} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}\frac{y}{x} = \frac{1}{u}\,\frac{1+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}} - \frac{1}{u}v =$

$$= \frac{1}{u}\left(\frac{1+v-v-2v^2}{1+2v}\right) \Rightarrow \quad \frac{dv}{du} = \frac{1}{u}\,\frac{1-2v^2}{1+2v}$$

② Συμμετρίες



Συμμετρία του παραπάνω σχήματος:

$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y)=(-x,-y)$

• Συμμετρία της $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ονομάζουμε έναν αμφιδιαφορομορφισμό $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε $f(\varphi(x))=f(x)$

πχ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=e^{x^2}$ και $\varphi_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi_1(x)=x+1$

Είναι $f(\varphi_1(x))=e^{\varphi_1^2(x)}=e^{x^2+2x+1}\neq f(x)$ (δεν είναι συμμετρία)

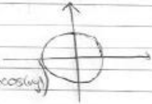
Ελέγχω τώρα την $\varphi_2(x)=-x$

είναι $f(\varphi_2(x))=e^{\varphi_2^2(x)}=e^{x^2}=f(x)$ (είναι συμμετρία)

πχ

όχι cos(αx)
αλλά cos(α) x

$x^2+y^2=1$



$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με $\varphi(x,y)=\left(\cos(\alpha x)-\sin(\alpha y),\ \sin(\alpha x)+\cos(\alpha y)\right)$

Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η φ είναι συμμετρία του κύκλου

$\boxed{\text{Πχ}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 + y^2$

- $\varphi_x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_x(x,y) = (-x, y)$
- $\varphi_y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_y(x,y) = (x, -y)$

Όχι $\cos(\alpha x)$ Αλλά $\cos(\alpha)x$

$\varphi_\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_\alpha(x,y) = \big(\cos(\alpha x) - \sin(\alpha y), \sin(\alpha x) + \cos(\alpha y)\big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Όλες οι παραπάνω φ είναι συμμετρίες της f.

Είναι $f(\varphi_\alpha(x,y)) = \big(\cos(\alpha x) - \sin(\alpha y)\big)^2 + \big(\sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)\big)^2 =$

$= x^2 + y^2 = f(x,y)$

③ Μονοπαραμετρικές ομάδες συμμετριών

$\{\varphi_s: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{s \in \mathbb{R}}$

- $\forall s$, φ_s αμφιδιαφορομορφισμός
- $\forall s$, φ_s συμμετρία του "μαθηματικού μεγέθους" που θέλαμ

- $\varphi_0(x) = x$
- $\varphi_{s+t}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x))$ $\quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΜΑΔΑΣ

$\boxed{\text{Πχ}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$, $\varphi_s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\varphi_s(x,y) = (x+s, y)$, $s \in \mathbb{R}$

Το $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ είναι μονοπαραμετρική ομάδα συμμετριών της συνάρτησης f

- $\forall s \in \mathbb{R}$ η φ_s είναι αμφιδιαφορομορφισμός του $\mathbb{R}^2$
- $\forall s \in \mathbb{R}$ η φ_s είναι συμμετρία της f, αφού

$f(\varphi_s(x,y)) = f(x+s, y) = y = f(x,y)$

- $\varphi_0(x,y) = (x,y)$
- $\varphi_{t+s}(x,y) = (x+t+s, y) = \varphi_s(\varphi_t(x,y))$

④ Θεώρημα Noether

∃ μονοπαραμετρική ομάδα συμμετριών της συνάρτησης Lagrange

$$\Downarrow$$

∃ ολοκλήρωμα της κίνησης των εξισώσεων Euler-Lagrange

$$\{\varphi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{s\in\mathbb{R}} \longrightarrow I(x,\dot{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \varphi_{i,s}}{\partial s}\Big|_{s=0}$$

$$\varphi_s(x_1, \ldots, x_n) = (\varphi_{1s}, \varphi_{2s}, \ldots, \varphi_{ns})$$

$\boxed{\text{πχ}}$ $K := \{x \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ x(a) = x_a,\ x(b) = x_b\}$

και $L(x,\dot{x}) = \dot{x}$

$\{\varphi_s(x) = x+s\}_{s\in\mathbb{R}}$

Από Θεώρημα Noether, το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της κίνησης θα είναι το:

$$I(x,\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot 1\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \left(\text{Αρχή Διατήρησης Ορμής}\right)$$

(δεν έχω άθροισμα Σ, διότι βρίσκομαι σε μια διάσταση)

Υπολογίζω το $\frac{d}{dt} I(x,\dot{x}) - \cancel{\frac{\partial I}{\partial x}\frac{dx}{dt}} + \frac{\partial I}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} =$

0

$$= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^2}\cdot \ddot{x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$\boxed{\text{πχ}}$ <u>Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής</u>

Αν η συνάρτηση δυναμικού εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το $O \in \mathbb{R}^2$, η στροφορμή διατηρείται σταθερή.

<u>Απόδειξη:</u>

Η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος θα είναι η:

$$\mathcal{L}(x_1,\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2) = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right) - K\left(x_1^2+x_2^2\right) \quad \text{όπου } K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

Αφού γνωρίζουμε η δυναμική ενέργεια εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το O.

Διαθέτει μονοπαραμετρική ομάδα συμμετριών, την:

$\varphi_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο

$$\varphi(x_1,\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2) = \Big(\cos(a x_1) - \sin(a x_2),\ \cos(a\dot{x}_1) - \sin(a\dot{x}_2),\ \sin(a x_1) + \cos(a x_2),\ \sin(a\dot{x}_1) + \cos(a\dot{x}_2)\Big)$$

$a \in \mathbb{R}$

Όντως $\mathcal{L}\left(\varphi_a(x_1,\dot{x}_1,x_2,\dot{x}_2)\right) = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right) - K\left(x_1^2+x_2^2\right)$

ΟΧΙ $\cos(a x_1)$
ΑΛΛΑ $\cos(a)\cdot x_1$

$(\longrightarrow)$

Υπάρχει επομένως ολοκλήρωμα της κίνησης, σύμφωνα με το Θεώρημα Noether.

$$I(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \varphi_{i\alpha}}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} =$$

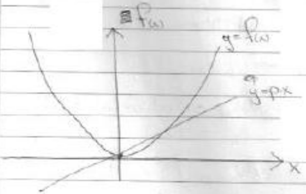
$$= m \cdot \dot{x}_1 \left(-\sin\alpha \cdot x_1 - \cos\alpha \cdot x_2\right)\Big|_{\alpha=0} + m\dot{x}_2 \left(\cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha\, x_2\right)\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= -m\dot{x}_1 x_1 + m \cdot \dot{x}_2 x_2 \quad (\text{ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ})$$

3/11/16

Μετασχηματισμός Legendre

"Νόημα": Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή, δηλαδή $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$



Ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$ είναι μια νέα συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(p)=\mathcal{L}(f)(p)$, η οποία μετρά την "μέγιστη απόσταση" της $y=px$ από την $y=f(x)$

Αν $F(x,p)=px-f(x)$, τότε λύνουμε ως προς x την εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,p)=0$$

Η λύση $x=x(p)$, εφόσον υπάρχει, αντικαθίσταται στην $F(x,p)$ και προκύπτει η $F(x(p),p)=g(p)$

ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f''(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Μετασχηματισμός Legendre της f ονομάζεται μια συνάρτηση $\mathcal{L}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}(f)(p)=\max_{x}\{px-f(x)\}$$

Πχ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Ορίζουμε $F(x,p)=px-f(x)=px-x^2$

και λύνουμε την $\frac{\partial F}{\partial x}(x,p)=0$ ως προς x.

Είναι $\frac{\partial F}{\partial x}(x,p)=0 \Leftrightarrow p-2x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{p}{2}}$

Επομένως αντικαθιστώ στην $F(x(p),p)=\frac{p^2}{2}-\frac{p^2}{4}=\frac{1}{4}p^2$

Άρα $\mathcal{L}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\mathcal{L}(f)(p)=\frac{1}{4}p^2$

Ασκ2 Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{m}{2}x^2$, $m\neq 0$

Ορίζουμε την $F(x,p)=xp-\frac{m}{2}x^2$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x,p)=0 \Leftrightarrow p-mx=0 \Leftrightarrow x=\frac{p}{m}$ και αντικαθιστώ στην F

$$F(x(p),p)=\frac{p^2}{m}-\frac{p^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}$$

Οπότε $\mathcal{L}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f)(p)=\frac{1}{2m}p^2$

Ασκ3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\alpha}x^\alpha$, $\alpha\neq 0$

Ορίζουμε την $F(x,p)=px-f(x)$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

και λύνουμε την $\frac{\partial F}{\partial x}(x,p)=0 \Leftrightarrow p-x^{\alpha-1}=0 \Leftrightarrow x=p^{\frac{1}{\alpha-1}}$

και αντικαθιστώ στην f:

$$F(x(p),p)=p\cdot p^{\frac{1}{\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha}\cdot\left(p^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)^{\alpha}=$$

$$=p^{\frac{\alpha-1}{\alpha-1}}\cdot p^{\frac{1}{\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow F(x(p),p)=\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Άρα $\mathcal{L}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\mathcal{L}(f)(p)=\frac{\alpha-1}{\alpha}p^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

από $\boxed{n\times 1}$

$\boxed{n\times 4}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $\mathcal{L}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f)(p)=\frac{1}{4}p^2=g(p)$

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Legendre της $g(p)$

Θα είναι $\mathcal{L}(g):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(g)(x)=\max\limits_{p}\{xp-g(p)\}$

Θεωρούμε την $F(p,x)=xp-\frac{1}{4}p^2$ και λύνουμε την εξίσωση $\frac{\partial F}{\partial p}(p,x)=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}p=0 \Leftrightarrow p=2x$ και αντικαθιστώ στην F

$$F(p(x),x)=2x^2-\frac{4x^2}{4}=x^2=\mathcal{L}(g(x))=f(x)$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{L}(f))=f \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & g=\mathcal{L}(f) \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}"] \end{tikzcd}$$

Δηλαδή $\mathcal{L}\circ\mathcal{L}=Id$ ή αλλιώς $\mathcal{L}^{-1}=\mathcal{L}$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο μετασχηματισμός Legendre συντιθέμενος με τον εαυτό του δίνει την ταυτοτική απεικόνιση.

"Απόδειξη": Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Είναι $\mathcal{L}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με

$$\mathcal{L}(f)(p)=\max\{px-f(x)\}=p\,x(p)-f(x(p))$$

όπου $x(p)$ η λύση της $p-f'(x)=0$

Τώρα $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f)):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f))(x)=\max\limits_{p}\{x\cdot p-\underbrace{\mathcal{L}(f)(p)}_{g(p)}\}=$

$=x\cdot p(x)-g(p(x))$ όπου $p(x)$ η λύση της $x-g'(p)=0$

$(\longrightarrow)$

Άρα $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f))(x) = x\, p(x) - g(p(x)) = x \cdot p(x) - \left(p\, x(p) - f(x(p))\right) =$

$= x\, p(x) - p\, x(p) + f(x(p)) = f(x)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, κλάσης C^2 και τέτοια ώστε ο $Hess(f)$ να είναι θετικά ορισμένος $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Τότε, μετασχηματισμό Legendre ονομάζουμε την $\mathcal{L}(f): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με $\mathcal{L}(f)(p) = g(p) = \max_x \{x p - f(x)\}$

$\boxed{\text{Πx}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + y$

Ορίζουμε την $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ με $F(x,y,p_1,p_2) = (x,y)(p_1,p_2) - f(x,y)$

$\Rightarrow F(x,y,p_1,p_2) = x p_1 + y p_2 - x - y$

Λύνουμε την εξίσωση $\nabla F(x,y,p_1,p_2) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (0,0) \Leftrightarrow (p_1 - 1, p_2 - 1) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 1 \end{cases}$ ως προς (x,y)

όμως ο εσσιανός πίνακας δεν ορίζεται πουθενά.

$\boxed{\text{Πχ}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\mathcal{L}(f): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(f)(p_1, p_2)$

Ορίζουμε την $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,p_1,p_2) = (x,y)(p_1,p_2) - f(x,y) =$

$= xp_1 + yp_2 - x^2 - y^2$

$$\vec{\nabla} F = (0,0) \Leftrightarrow \left(p_1 - 2x, p_2 - 2y\right) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 2x \\ p_2 = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p_1}{2} \\ y = \frac{p_2}{2} \end{cases}$$

$$F\left(x(p), y(p), p_1, p_2\right) = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4} = \frac{p_1^2}{4} + \frac{p_2^2}{4}$$

και έτσι $\mathcal{L}(f)(p_1,p_2) = \frac{1}{4} p_1^2 + \frac{1}{4} p_2^2$

ΓΙΑ ΣΠΙΤΙ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^{\alpha} + x^{\beta}$, $\alpha, \beta \neq 0$

$\boxed{\text{Πχ}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

Να μετασχηματιστεί κατά Legendre ως προς τη μεταβλητή x.

Είναι: $\mathcal{L}(f): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(f)(y,p) = \max\limits_{x} \{ xp - f(x,y) \}$

Θεωρώ την $F(x,p) = xp - f(x,y) = xp - x^2 - y^2$ και λύνω την

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,p) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} p$$

Άρα $F(x(p),p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^2 - y^2 = \frac{1}{4}p^2 - y^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^6$

Legendre ως προς y.

Συστήματα Hamilton

7/11/2016

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $H:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ κλάσης C^2, $H=H(q_1,p_1,q_2,p_2,\dots,q_n,p_n)$. Σύστημα Hamilton της H ονομάζουμε το:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n$$

$\boxed{\text{πχ}}$ Έστω $H:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, $H(q_1,p_1,q_2,p_2)=q_1^3p_1+q_2p_2^2-q_2$

Το σύστημα Hamilton που αντιστοιχεί στην H είναι το

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = q_1^3 \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -3q_1p_1 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = 2p_2q_2 \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = -p_2^2+1 \end{cases}$$

Αντιστρόφως, έστω το σύστημα:

$\dot{q}_1 = q_1^3$ $\qquad$ $\dot{p}_2 = -p_2^2+1$

$\dot{p}_1 = -3q_1p_1$

$\dot{q}_2 = 2p_2q_2$

$\longrightarrow$

Είναι σύστημα Hamilton; Αν ναι, ποιά είναι η συνάρτηση Hamilton αυτού;

Είναι: $\frac{\partial}{\partial q_1}(q_1^3) + \frac{\partial}{\partial p_1}(-3q_1^2 p_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(2q_2 p_2) + \frac{\partial}{\partial p_2}(-p_2^2+1) =$

$= 3q_1^2 - 3q_1^2 + 2p_2 - 2p_2 = C$

Άρα ναι, είναι σύστημα Hamilton

Υπάρχει επομένως $H: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1,p_1,q_2,p_2) = q_1^3 \\ \frac{\partial H}{\partial q_1}(q_1,p_1,q_2,p_2) = 3q_1^2 p_1 \\ \frac{\partial H}{\partial p_2}(q_1,p_1,q_2,p_2) = 2p_2 q_2 \\ \frac{\partial H}{\partial q_2}(q_1,p_1,q_2,p_2) = p_2^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(q_1,p_1,q_2,p_2) = q_1^3 p_1 + k(q_1,q_2,p_2) \\ 3q_1^2 p_1 + \frac{\partial k}{\partial q_1}(q_1,p_1,q_2,p_2) = 3q_1^2 p_1 \Rightarrow k = \lambda(q_2,p_2) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p_2}(q_2,p_2) = 2p_2 q_2 \Rightarrow \lambda(q_2,p_2) = p_2^2 q_2 + h(q_2) \\ p_2^2 + \frac{\partial h}{\partial q_2}(q_2) = p_2^2 - 1 \Rightarrow h(q_2) = -q_2 + c \quad , c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Άρα $\boxed{H(q_1,p_1,q_2,p_2) = q_1^3 p_1 + q_2 p_2^2 - q_2 + c}$ $c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\pi\chi}$ $\mathcal{L}(q,\dot q) = \frac{1}{2} m\dot q^2 - q^3$ όπου $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η θέση
και $\dot q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η ταχύτητα

Η αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange είναι η:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q,\dot q) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}(q,\dot q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3q^2 = \frac{d}{dt}\left(m\dot q\right) \Leftrightarrow -3q^2 = m\ddot q$$

Είναι $p = m\dot q \Rightarrow \dot p = m\ddot q$ και έτσι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως:

$$\begin{cases} \dot q = \frac{1}{m}p \\ \dot p = -3q^2 \end{cases}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Legendre την $\mathcal{L}(q,\dot q)$ ως προς την μεταβλητή $\dot q$. Θα είναι

$$L(\mathcal{L})(q,p) = \max_{\dot q}\{\dot q p - \mathcal{L}(q,\dot q)\}$$

Είναι $\frac{\partial}{\partial \dot q}(\dot q p - \mathcal{L}(q,\dot q)) = 0 \Rightarrow p - m\dot q = 0 \Rightarrow p = m\dot q \Rightarrow \dot q = \frac{1}{m}p$

δηλαδή $L(\mathcal{L})(p,q) = \frac{1}{m}p^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{m}p\right)^2 - q^3 =$

$$= \frac{1}{m}p^2 - \frac{1}{2m}p^2 - q^3 =$$

$$= \frac{1}{2m}p^2 - q^3 = H(p,q)$$

$(\longrightarrow)$

Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton είναι το:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(p,q) = \dfrac{1}{m}p \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(p,q) = -3q^2 \end{cases}$$

Συστήματα Euler-Lagrange — δυϊκά μέσω του μετασχηματισμού Legendre — Συστήματα Hamilton

Μετασχηματίζουμε, ως προς p κατά Legendre την $H(q,p)$. Είναι:

$$\mathcal{L}(H)(q,\dot{q}) = \max_p\{\dot{q}p - H(q,p)\}$$ Λύνουμε την:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\dot{q}p - \frac{1}{2m}p^2 - q^3\right) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} - \frac{1}{m}p = 0 \Rightarrow p = m\dot{q}$$

και έτσι $\mathcal{L}(H)(q,\dot{q}) = m\dot{q}^2 - \frac{1}{2m}m^2\dot{q}^2 - q^3 = \frac{1}{2m}\dot{q}^2 - q^3 = \mathcal{L}(q,\dot{q})$

Η αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange είναι η:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q,\dot{q}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}) \Rightarrow \boxed{-3q^2 = m\ddot{q}}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων Euler-Lagrange για τη συνάρτηση Lagrange $L(q,\dot{q},t)$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα Hamilton της $H(p,q,t)=\mathcal{L}(L)(q,q,t)$ όπου $\mathcal{L}$ ο μετασχηματισμός Legendre ως προς τη μεταβλητή $\dot{q}$.

Απόδειξη: Έστω $L(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)$

Τότε $H(q,p,t)=\mathcal{L}(L)(q,p,t)=\max\limits_{\dot{q}}\left\{\dot{q}p-\frac{1}{2}m\dot{q}^2+V(q)\right\}$

και άρα

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\dot{q}p-\frac{1}{2}m\dot{q}^2+V(q)\right)=0 \Leftrightarrow p-m\dot{q}=0 \Rightarrow \dot{q}=\frac{1}{m}p$$

Άρα $H(q,p,t)=\frac{1}{m}p^2-\frac{1}{2}m\frac{1}{m^2}p^2+V(q)=\frac{1}{2m}p^2+V(q)$

Είναι

$$\begin{cases} \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t)=\frac{1}{m}p \\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t)=-V'(q) \end{cases}$$

Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton της $H(q,p,t)$

Το σύστημα Euler-Lagrange για την $L(q,\dot{q},t)$ είναι το:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q},t)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t)$$

$$\Rightarrow -V'(q)=\frac{d}{dt}m\dot{q}=m\ddot{q} \Rightarrow -V'(q)=m\ddot{q}$$

Αν $p=m\dot{q} \Rightarrow \dot{q}=\frac{1}{m}p$ και $\ddot{q}=\frac{1}{m}\dot{p}=-\frac{1}{m}V'(q)$ άρα καταλήγουμε

στο σύστημα:
$$\begin{cases} \dot{q}=\frac{1}{m}p \\ \dot{p}=-V'(q) \end{cases}$$

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

$$\Updownarrow$$

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν $L:\mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$, $L=(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2,\dots,t)$ κλάσης C^3, κυρτή ως προς τις μεταβλητές $\dot{q}_i$, $i=1,2,\dots,n$, τότε το σύστημα εξισώσεων Euler-Lagrange που αντιστοιχεί στην L ισοδυναμεί με το σύστημα Hamilton της $H:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}$,

$$\underline{H(q_1,p_1,q_2,p_2,\dots,t) = \mathcal{L}(L)(q_1,p_1,\dots,q_n,p_n,t)}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω το σύστημα Hamilton που αντιστοιχεί στην $H(q_1,p_1,\dots,q_n,p_n)$, $H:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$.

Αν η H δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από το t, τότε η H είναι ολοκλήρωμα της κίνησης του συστήματος αυτής.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $H:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$, $H=H(q_1,p_1,q_2,p_2,\dots,q_n,p_n)$ κλάσεως C^2

Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton είναι το

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i=1,\dots,n$$

Είναι $\frac{d}{dt}H(q_1,p_1,\dots,q_n,p_n) =$

$$= \frac{\partial H}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial H}{\partial p_n}\dot{p}_n =$$

$$= \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial H}{\partial q_n}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_n} + \frac{\partial H}{\partial p_n}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_n}\right) = 0$$

$\boxed{\text{πχ}}$ Έστω $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $H(x,y) = x^2+y^2$.

Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton είναι το

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

Είναι λοιπόν $\dot{x} = 2y \to \ddot{x} = 2\dot{y} = -4x \to \ddot{x} + 4x = 0$

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$$
$$y(t) = -A\sin 2t + B\cos 2t$$

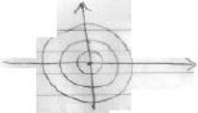
Αν για $t=0$ είχαμε "θέση" (x_0,y_0), τότε

$$x(0) = x_0 \to A = x_0$$
$$y(0) = y_0 \to B = y_0$$

Άρα το σημείο που ήταν στη θέση (x_0,y_0) και εξελίσσεται σύμφωνα με το σύστημα Hamilton της H ακολουθεί την καμπύλη

$$\vec{r}(t) = \left(x_0\cos 2t + y_0\sin 2t,\ -x_0\sin 2t + y_0\cos 2t\right)$$

Το αναπαράσταση της $\vec{r}(t)$



Β' ΤΡΟΠΟΣ

Το σύστημα Hamilton αυτό διαθέτει ως ολοκλήρωμα της κίνησης την $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x,y) = x^2 + y^2$

Άρα οι τροχιές του συστήματος είναι οι ισοσταθμικές τροχιές (καμπύλες) της H

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, H(x,y) = c \right\}_{c \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ Έστω $H: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $H(x,y,z,w) = xy + z^2 w$

Αντίστοιχο σύστημα Hamilton.

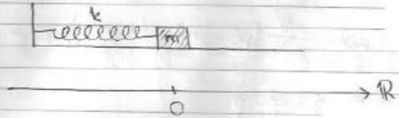
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial w} \\ \dot{w} = -\dfrac{\partial H}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z^2 \\ \dot{w} = -2zw \end{cases} \qquad \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t), w(t)\big)$$

Άρα οι τροχιές είναι τα ισοσταθμικά στοιχεία του H

δηλ. $\left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,/\, xy + z^2 w = c \right\}_{c \in \mathbb{R}}$

Δυϊσμός των συστημάτων Lagrange-Hamilton   10/11/16

Παράδειγμα 1ο: Μη γραμμικός ταλαντωτής.



Συνάρτηση Δυναμικού: $V(q)=\frac{1}{2}kq^2$
(χωρίς τριβές)

• Συνάρτηση Δυναμικού: $V(q)=\frac{1}{2}kq^2-q^3$
(με τριβές)

Συνάρτηση Lagrange: $\mathcal{L}(q,\dot{q})=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2+q^3$

(ενός βαθμού ελευθερίας)

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q,\dot{q})=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -kq+3q^2=\frac{d}{dt}(m\dot{q}) \Rightarrow -kq+3q^2=m\ddot{q}$$

ΣΥΣΤΗΜΑ (*)

Μετασχηματίζουμε κατά Legendre ως προς $\dot{q}$ την $\mathcal{L}(q,\dot{q})$

Θα είναι $L(\mathcal{L})(q,p) = \max_{\dot{q}}\left\{p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q})\right\} = \max_{\dot{q}}\left\{p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 - q^3\right\}$

Λύνουμε την εξίσωση $\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 - q^3\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p - m\dot{q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = \frac{1}{m}\cdot p$

Άρα $H(q,p) = L(\mathcal{L})(q,p) = p\,\frac{1}{m}p - \frac{1}{2}m\frac{1}{m^2}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 - q^3 =$

$$= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 - q^3$$

Σχηματίζουμε το σύστημα Hamilton που αντιστοιχεί στην $H(q,p)$

Είναι
$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \frac{1}{m}p \\ \dot{p} = -kq + 3q^2 \end{cases}$$

ΣΥΣΤΗΜΑ (**)

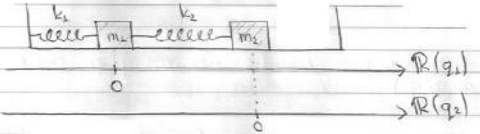
Θα δείξω ότι τα συστήματα (*) και (**) είναι ισοδύναμα.

Αν γράψουμε το (*) στη μορφή συστήματος θα είναι:

$m\dot{q} = p$ άρα $m\ddot{q} = \dot{p} = -kq + 3q^2$

δηλ. $\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = \frac{1}{m}p \\ \dot{p} = -kq + 3q^2 \end{array} \right. \approx$ (**)

Παράδειγμα 2ο: (Συζευγμένοι ταλαντωτές)



Δυναμική ενέργεια: $V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}k_1 q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2$

Συνάρτηση Lagrange $\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 q_1^2 - \frac{1}{2}k_2(q_1 - q_2)^2$

(Δύο βαθμών ελευθερίας)

Άρα οι εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2) \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2) = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k_1 q_1 - k_2(q_1-q_2) = m_1\ddot{q}_1 \\ \\ k_2(q_1-q_2) = m_2\ddot{q}_2 \end{cases}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Legendre, ως προς $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ την συνάρτηση $\mathcal{L}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2)$

Θα είναι $L(\mathcal{L})(q_1,p_1,q_2,p_2) = \max\limits_{\dot{q}_1,\dot{q}_2}\Big\{\dot{q}_1p_1 + \dot{q}_2p_2 - \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 +$

$+ \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1-q_2)^2\Big\}$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$\nabla_{(\dot{q}_1,\dot{q}_2)}\left(\dot{q}_1p_1 + \dot{q}_2p_2 - \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}k_1q_1^2 + \frac{1}{2}k_2(q_1-q_2)^2\right) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 - m_1\dot{q}_1 = 0 \\ \\ p_2 - m_2\dot{q}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{1}{m_1}p_1 \\ \\ \dot{q}_2 = \dfrac{1}{m_2}p_2 \end{cases}$$

Έτσι: $\mathcal{L}(L)(q_1,p_1,q_2,p_2)=$

$$=\frac{1}{m_1}p_1^2+\frac{1}{m_2}p_2^2-\frac{1}{2}m_1\frac{p_1^2}{m_1^2}-\frac{1}{2}m_2\frac{p_2^2}{m_2^2}+\frac{1}{2}k_1q_1^2+\frac{1}{2}k_2(q_1-q_2)^2=$$

$$=\frac{1}{2m_1}p_1^2+\frac{1}{2m_2}p_2^2+\frac{1}{2}k_1q_1^2+\frac{1}{2}k_2(q_1-q_2)^2$$

Ονομάζουμε συνάρτηση Hamilton την $H(q_1,p_1,q_2,p_2)=\mathcal{L}(L)(q_1,p_1,q_2,p_2)$

Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton θα είναι το:

$$\begin{cases}\dot{q}_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1,p_1,q_2,p_2)=\frac{1}{m_1}p_1\\[2mm] \dot{p}_1=\frac{\partial H}{\partial q_1}(q_1,p_1,q_2,p_2)=-k_1q_1-k_2(q_1-q_2)\\[2mm] \dot{q}_2=\frac{\partial H}{\partial p_2}(q_1,p_1,q_2,p_2)=\frac{1}{m_2}p_2\\[2mm] \dot{p}_2=\frac{\partial H}{\partial q_2}(q_1,p_1,q_2,p_2)=k_2(q_1-q_2)\end{cases}$$

ΝΔΟ οι εξισώσεις Euler-Lagrange που βρήκαμε ισοδυναμούν με το σύστημα Hamilton

(⟶)

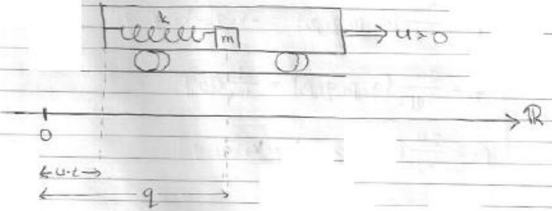
Η $H(q_1,p_1,q_2,p_2)$ είναι όντως σταθερά της κίνησης:

$$\frac{dH}{dt}(q_1,p_1,q_2,p_2) = \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} =$$

$$= 0$$

(Αυτή είναι η προϋπόθεση για να είναι η H σταθερά της κίνησης)

<u>Παράδειγμα 3ο</u>: (Ελατήριο μέσα σε βαγόνι)



Δυναμική ενέργεια: $V(q) = \frac{1}{2}k(q-ut)^2$

<u>Συνάρτηση Lagrange</u>: $L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k(q-ut)^2$

(Ενός βαθμού ελευθερίας)

Εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q},t)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q},t) \Rightarrow k(q-ut)=m\ddot{q}$$

Συνεχίζω στη λύση
(σύστημα Hamilton)

Παράδειγμα 4ο: Έστω ότι ένα πρόβλημα περιγράφεται από την συνάρτηση Lagrange.

$$L(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2)=q_1\dot{q}_2^2-\dot{q}_1^2q_2+q_1^3+q_2$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange γίνονται:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{q}_2^2+3q_1^2=\frac{d}{dt}(-2\dot{q}_1q_2) \Leftrightarrow \dot{q}_2^2+3q_1^2=-2\ddot{q}_1q_2-2\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2)=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\dot{q}_1^2+1=\frac{d}{dt}(2q_1\dot{q}_2) \Leftrightarrow -\dot{q}_1^2+1=2\dot{q}_1\dot{q}_2+2q_1\ddot{q}_2$$

Μετασχηματίζουμε ως προς $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ κατά Legendre την $\mathcal{L}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2)$

$$L(\mathcal{L})(q_1,p_1,q_2,p_2) = \max_{\dot{q}_1,\dot{q}_2}\left\{p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - q_1\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 q_2 - q_1^3 - q_2\right\}$$

$$\Rightarrow \left(p_1 + 2\dot{q}_1 q_2,\ p_2 - 2q_1\dot{q}_2\right) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = -\dfrac{1}{2q_2}p_1 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{1}{2q_1}p_2 \end{cases}$$

Άρα $L(\mathcal{L})(q_1,p_1,q_2,p_2) = -\dfrac{1}{2q_2}p_1^2 + \dfrac{1}{2q_1}p_2^2 - \dfrac{1}{4q_1}p_1^2 + \dfrac{1}{4q_2}p_2^2 - q_1^3 - q_2$

$$= H(q_1,p_1,q_2,p_2)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = -\dfrac{p_1}{q_2} - \dfrac{p_1}{q_1} + \dfrac{p_1}{2q_2} \\ \dot{p}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -\dfrac{p_2^2}{q_1^2} + \dfrac{p_1^2}{2q_1^2} + 3q_1^2 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \dfrac{p_2}{q_1} \\ \dot{p}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial q_2} = -\dfrac{p_1}{2q_2^2} - \dfrac{p_2^2}{4q_2^2} + 1 \end{cases}$$

Αναμνήσεις από Δυναμικά Συστήματα

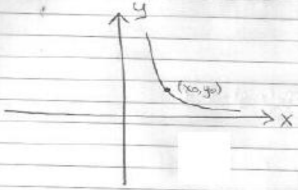
Έστω το σύστημα ΣΔΕ:

$$(*)\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{t} \\ y(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}$$

Άρα έχω καμπύλες της μορφής $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (c_1 e^{t}, c_2 e^{-t})$$

Χώρος φάσεων - καταστάσεων



Άρα έχω αρχική συνθήκη

$\vec{r}(0) = (x_0, y_0)$

και η καμπύλη γίνεται $\vec{r}(t) = (x_0 e^{t}, y_0 e^{-t})$

Άρα για κάθε t έχουμε την $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

με $\varphi_t(x,y) = (xe^{t}, ye^{-t})$

$\{\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \varphi_t(x,y) = (xe^{t}, ye^{-t})\}_{t \in \mathbb{R}}$ είναι μια μονοπαραμετρική ομάδα αμφιδιαφορομορφισμών

Έστω $\varphi_1 = xe^{t}$

$\varphi_2 = ye^{t}$

Είναι: $\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x,y) = \left(xe^t, -ye^{-t}\right) = \left(\varphi_1, -\varphi_2\right)$

$K \in \mathbb{R}^2$ με $K = (x,y)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,-y)$

Τότε το (*) γράφεται ως: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x,y)$

και οι λύσεις του είναι οι $\{\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}_{t \in \mathbb{R}}$

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x,y) = f\left(\varphi_t(x,y)\right)$$

και η αρχική συνθήκη $\varphi_0(x,y) = (x,y)$

Το Θεώρημα του Liouville 14/11/16

$\boxed{\pi\chi}$

$$\circledast \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{t} \\ x_2(t) = C_2 e^{-t} \end{cases}$$

όπου $C_1 = x_{10}$ και $C_2 = x_{20}$

Υπάρχει

$\varphi_t: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $\varphi_t(x_1, x_2) = (x_1 e^{t}, x_2 e^{-t})$

ενώ το σύνολο των απεικονίσεων αυτών $\{\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}_{t\in\mathbb{R}}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ομάδα διαφορομορφισμών

Αν $x \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$ και $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$,

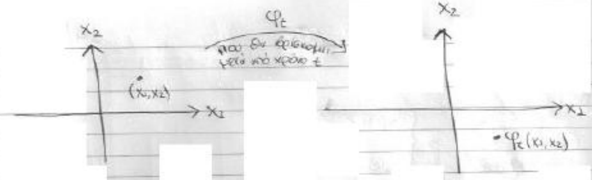
τότε το $\circledast$ γράφεται ως $\dot{x} = f(x)$

Λύση του $\circledast$:

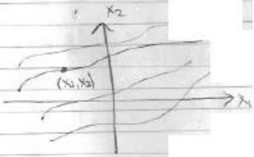
$$\{\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}_{t\in\mathbb{R}} \quad \text{με} \quad \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x) = f(\varphi_t(x))$$

με αρχική συνθήκη $\varphi_0(x) = x$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x_1, x_2) = \left(x_1 e^{t}, -x_2 e^{-t}\right) \\ &f(\varphi_t(x_1, x_2)) = f(x_1 e^{t}, x_2 e^{-t}) = (x_1 e^{t}, -x_2 e^{-t}) \end{aligned}\right\} \text{είναι ίσα}$$



Για συγκεκριμένο $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$



<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ κλάσης C^1. Ροή της f ονομάζουμε την οικογένεια $\{\varphi_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\}$ που ικανοποιεί τις:

(i) $\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial t}(x)=f(\varphi_t(x))$

(ii) $\varphi_0(x)=x \quad , \forall x\in\mathbb{R}^n$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Οι συναρτήσεις φ_t είναι λύσεις του συστήματος $\dot{x}=f(x)$

2) Η οικογένεια $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ αποτελεί μονοπαραμετρική ομάδα αμφιδιαφορομορφισμών

3) Είναι: $\varphi_t(x)=\varphi_0(x)+\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial t}(t-0)+O(t^2)$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_t(x)=x+t\,f(x)+O(t^2)}$

ΘΥΜΙΖΩ ΟΤΙ

Ανάπτυγμα Taylor της $\kappa(x)$ στο $x_0=0$

$$\kappa(x)=\kappa(0)+\kappa'(0)\cdot(x-0)+O(x^2)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

$\forall t\in\mathbb{R}$

Αν όγκος καρδιάς $=V_1$
και όγκος αμοιβάδας $=V_2$ ισχύει $V_1=V_2$;

Αν $V_1=V_2$, λέμε ότι το $\varphi(x)$ διατηρεί τους όγκους στον χώρο των φάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Liouville): Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ κλάσης C^1, με $\operatorname{div} f=0$, τότε η ροή του f διατηρεί τους όγκους στον χώρο των φάσεων.

Απόδειξη: Είναι $\det(I+tA)=1+t\cdot \operatorname{tr}A+O(t^2)$, $\forall A\in M(n\times n,\mathbb{R})$, $\forall t\in\mathbb{R}$

(Σπίτι: ΝΔΟ η άνω σχέση ισχύει)

ΘΔΟ: $\dfrac{d V_{\varphi_t(A)}}{dt} = \displaystyle\int_{V_{\varphi_t(A)}} \operatorname{div} f$, όπου $V_{\varphi_t(A)}$ ο όγκος του χωρίου $\varphi_t(A)$

Είναι $V_{\varphi_t(A)} = \displaystyle\int_{\varphi_t(A)} 1 = \int_{\varphi_{t_0}(A)} \det \frac{\partial \varphi_{t-t_0}}{\partial x} = \int_{\varphi_{t_0}(A)} \det \frac{\partial}{\partial x}\left(x + (t-t_0)\cdot f(x) + O((t-t_0)^2)\right)$

$$= \int_{\varphi_{t_0}(A)} \det\left(I + (t-t_0)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} O((t-t_0)^2)\right) =$$

$$= \int_{\varphi_{t_0}(A)} \left(1 + (t-t_0)\operatorname{tr}\frac{\partial f}{\partial x} + O((t-t_0)^2)\right) = \int_{\varphi_{t_0}(A)} \left(1 + (t-t_0)\operatorname{div} f + O((t-t_0)^2)\right)$$

Άρα $\dfrac{d}{dt} V_{\varphi_t(A)} = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\varphi_{t_0}(A)} \left(1 + (t-t_0)\operatorname{div} f + O((t-t_0)^2)\right) =$

$$= \int_{\varphi_{t_0}(A)} \left(\operatorname{div} f + O(t-t_0)\right)$$

άρα $\forall t_0 \in \mathbb{R}$

$$\left.\frac{d V_{\varphi_t(A)}}{dt}\right|_{t=t_0} = \int_{\varphi_{t_0}(A)} \operatorname{div} f$$

Έτσι, αν $div f = 0$, τότε: $\frac{dV_{\varphi_t(A)}}{dt} = 0$ οπότε

$\forall t \in \mathbb{R}$ είναι $V_{\varphi_t(A)} = c \in \mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Liouville): Τα διανυσματικά πεδία του Hamilton διατηρούν τους όγκους ~~θεωρούμε τους~~ σταθερούς στον χώρο των φάσεων.

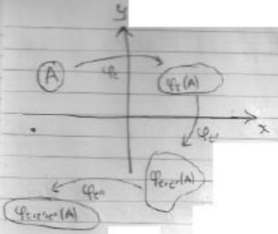
Απόδειξη: Αν ένα διανυσματικό πεδίο είναι Hamilton, υπάρχει $H: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $H = H(q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n)$ κλάσης C^2 τέτοιο ώστε το αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων να είναι το:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}(q_1, \ldots, p_n) \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}(q_1, \ldots, p_n) \\ \vdots \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}(q_1, \ldots, p_n) \end{cases}$$

Συνεπώς η απόκλιση του διανυσματικού αυτού πεδίου ισούται με:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1}(q_1, \ldots, p_n) - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1}(q_1, \ldots, p_n) + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_n}(q_1, \ldots, p_n) - \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_n}(q_1, \ldots, p_n) = 0$$

δηλαδή κάθε συνάρτηση Hamilton είναι σωληνοειδές, επομένως διατηρούνται οι όγκοι στον χώρο των φάσεων λόγω του θεωρήματος του Liouville



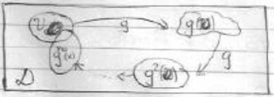
$\forall t$, η $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που "διατηρεί τους όγκους"

ΘΕΩΡΗΜΑ (Επαναληπτικότητας του Poincaré):

Έστω $\mathcal{D}$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και $g : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ συνεχής και 1-1, η οποία διατηρεί τους όγκους

Τότε, σε κάθε υποσύνολο $U \subset \mathcal{D}$, $\exists x \in U$ τέτοιο ώστε

$$g^{n_0}(x) \in U \quad \text{, για κάποιο } n_0 \in \mathbb{N}$$



Σημείωση: $g^{n_0}(x)$ συμβολίζει σύνθεση, όχι δύναμη

Δηλαδή $g^{n_0}(x) = (\underbrace{g \circ g \circ g \;\ldots\; \circ g}_{n_0\text{-φορές}})(x)$

Απόδειξη: Θεωρούμε την ακολουθία U, με $U_1 = g(U)$, $U_2 = g^2(U)$, … . Όλα τα U_i έχουν τον ίδιο όγκο.

Ακόμα, αφού $g: D \to D$ ισχύει ότι $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \subseteq D$.

Αν $U_i \cup U_j = \emptyset$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$, θα έπρεπε το D να έχει άπειρο όγκο, πράγμα άτοπο αφού το D είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Άρα $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ για κάποια $i,j \in \mathbb{N}$, δηλαδή

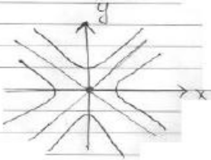
$$g^i(U) \cap g^j(U) \neq \emptyset \Rightarrow g^{i-j}(U) \cap U \neq \emptyset$$

Άρα για οποιοδήποτε $x \in g^{i-j}(U) \cap U$ ισχύει το συμπέρασμα.

$\boxed{\text{πχ.}}$ Έστω $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(x,y) = x^2 - y^2$. Το σύστημα Hamilton για την H είναι:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\[2ex] \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2y \\[2ex] \dot{y} = -2x \end{cases}$$

ΣΠΙΤΙ: Να βρεθεί η ροή.



ΠΡΟΤΑΣΗ: Τα συμπλεκτικά πεδία του Hamilton δεν διαθέτουν ελκτικά ή απωστικά σημεία ισορροπίας.

Απόδειξη: Έστω ότι $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ελκτικό σημείο ισορροπίας του συμπλεκτικού πεδίου Hamilton $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$

Το x_0 διαθέτει γειτονιά U τέτοια ώστε $\forall x \in U$

$\lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = x_0$, όπου φ_t η ροή του f

Άρα $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(U) = \{x_0\}$. Άτοπο γιατί το f διατηρεί τους όγκους στον χώρο των φάσεων, και $V_{\varphi_t(U)} \neq 0 = V_{\{x_0\}}$

Άρα δεν υπάρχει ελκτικό σημείο ισορροπίας (ομοίως για τα απωστικά)

Οι αποδείξεις αυτού του μαθήματος θα πέσουν