

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Θέματα Εξετάσεων 1/2/2017

Στάυρος Αναστασίου
Διδάσκων

Θέμα 1^ο: Κρίσιμα σημεία συναρτησιακών

Θεωρούμε το σύνολο $K := \{y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / y(0) = 1, y(1) = 2\}$ και την

$$S : K \rightarrow \mathbb{R}, S(y) = \int_0^1 e^x (y'(x))^2 dx.$$

Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

(1 μονάδα)

Θέμα 2^ο: Γεωδαισιακές επιφανειών

Θεωρούμε την κωνική επιφάνεια:

$$r : [0, 2\pi] \times [0, +\infty), r(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$$

και τις λείες καμπύλες της μορφής $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma = r \circ \tilde{\gamma}$, όπου

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t)) = (t, v(t)).$$

α) Να γραφεί το συναρτησιακό εκείνο, ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία του οποίου είναι και οι γεωδαισιακές του κώνου της παραπάνω μορφής. Έπειτα να γράψετε την αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange.

β) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Beltrami, κατασκευάστε μια άλλη διαφορική εξίσωση για τις γεωδαισιακές αυτές.

γ) Να γραφεί η παραμετρική μορφή αυτών των γεωδαισιακών.

(Παρατήρηση: Λύση της σ.δ.ε. $2c^2(\dot{v}(t))^2 = v^2(t)(v^2(t) - c^2)$ είναι η $v(t) = c(\cos \frac{t+b}{\sqrt{2}})^{-1}$, $c, b \in \mathbb{R}$.)

(2 μονάδες)

Θέμα 3^ο: Μηχανική Lagrange και σφαιρικό εκκρεμές

Ένα σκοινί μήκους $l > 0$ δένεται από το ένα άκρο του σε ένα σημείο, ενώ στο άλλο άκρο του σκοινιού προσαρτάται σωματίδιο μάζας $m > 0$.

α) Κατασκευάστε, στις σφαιρικές συντεταγμένες του χώρου, τη συνάρτηση La-

grange του συστήματος αυτού, για να δείξετε ότι είναι η:

$$L(\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2[(\sin \theta)^2\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2] - mgl \cos \theta.$$

- β) Βρείτε μία ποσότητα που να διατηρείται σταθερή.
- γ) Να γραφούν οι εξισώσεις Euler–Lagrange για το πρόβλημα αυτό.
- δ) Να δείξετε ότι $ml^2(\sin \theta)^2\dot{\phi} = c \in \mathbb{R}$.

(3 μονάδες)

Θέμα 4^ο: Επαναληπτικότητα Poincaré

Να διατυπωθεί και να αποδειχτεί το θεώρημα επαναληπτικότητας του Poincaré.
(1 μονάδα)

Θέμα 5^ο: Μηχανική Hamilton και μαγνητικό πεδίο

Δίνεται η συνάρτηση $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $H(x, p_x, y, p_y) = \frac{1}{2}(p_x + y)^2 + \frac{1}{2}p_y^2$.

- α) Να γραφεί το αντίστοιχο σύστημα Hamilton της παραπάνω συνάρτησης.
- β) Να βρεθούν δύο ολοκληρώματα της κίνησης για το παραπάνω σύστημα.
- γ) Να εξεταστεί αν τα ολοκληρώματα της κίνησης είναι σε ενέλιξη, και αν το σύστημα Hamilton είναι ολοκληρώσιμο κατά Liouville.
- δ) Εφαρμόζοντας το θεώρημα Liouville–Arnol'd περιγράψτε ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος στον χώρο των φάσεων.

(3 μονάδες)