ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Θέματα Εξετάσεων
12/9/2017

Σταύρος Αναστασίου
Διδάσκων

Θέμα 1^o: Διαφορικά συναρτησιακών
Δίνεται το συναρτησιακό $S : K \to \mathbb{R},\ S(x) = \int_0^1 (\dot{x}(t))^2 dt$, όπου

$$K = \{x \in C^\infty([0,1], \mathbb{R})/x(0) = x(1) = 0\}.$$

α) Να υπολογίσετε τα κρίσιμα σημεία του.
β) Να υπολογίσετε το δεύτερο διαφορικό του στα κρίσιμα σημεία του.
(2 μονάδες)

Θέμα 2^o: Ελαχιστικές επιφάνειες
Από όλες τις απειροδιαφορίσιμες συναρτήσεις της μορφής $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις $y(0) = \frac{e+e^{-1}}{2}$ και $y(1) = 0$ να βρείτε εκείνη της οποίας η γραφική παράσταση παράγει, περιστρεφόμενη γύρω από τον άξονα των x, την επιφάνεια με το ελάχιστο εμβαδόν. Μπορείτε να προχωρήσετε ως εξής:
α) Κατασκευάστε το συναρτησιακό εκείνο ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία του οποίου είναι και η συνάρτηση που αναζητάμε.
β) Να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα του Beltrami για να κατασκευάσετε τη διαφορική εξίσωση που δίνει τα κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού αυτού.
γ) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση αυτήν και να υπολογίσετε όλες τις απαιτούμενες σταθερές προκειμένου να δώσετε τη μοναδική λύση του προβλήματος.
Δίνεται ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται από την περιστροφή της γραφικής παράστασης της $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ γύρω από τον άξονα των x ισούται με

$$2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

και ότι το $\int \frac{1}{\sqrt{y^2 - a^2}} dy$ λύνεται με την αντικατάσταση $y = acoshu$.
(2 μονάδες)

Θέμα 3^o: Το θεώρημα της Noether στη μηχανική Lagrange
α) Να δείξετε ότι η

$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi_\alpha(x_1, x_2) = (\cos(a)x_1 - \sin(a)x_2, \sin(a)x_1 + \cos(a)x_2),$$

αποτελεί μονοπαραμετρική ομάδα αμφιδιαφορομορφισμών του επιπέδου. Δίνονται οι τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
\cos(a_1)\cos(a_2) - \sin(a_1)\sin(a_2) &= \cos(a_1 + a_2) \\
\cos(a_1)\sin(a_2) + \sin(a_1)\cos(a_2) &= \sin(a_1 + a_2) \\
\sin(a_1)\cos(a_2) + \cos(a_1)\sin(a_2) &= \sin(a_1 + a_2) \\
\cos(a_1)\cos(a_2) - \sin(a_1)\sin(a_2) &= \cos(a_1 + a_2).
\end{aligned}$$

β) Να δείξετε ότι, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, η Φ_α αποτελεί συμμετρία της

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

γ) Να κατασκευάσετε τις εξισώσεις Euler–Lagrange που αντιστοιχούν στη συνάρτηση Lagrange

$$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ L(x_1\dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - (x_1^2 + x_2^2).$$

δ) Κατασκευάστε το «ρεύμα της Noether»

$$I : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ I(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)\frac{\partial \Phi_i}{\partial a}(x_1, x_2)\ |_{a=0}.$$

Τι σχέση έχει η συνάρτηση αυτή με το σύστημα εξισώσεων του προηγούμενου ερωτήματος;

(3 μονάδες)

Θέμα 4^o: Το θεώρημα Liouville–Arnold στο πρόβλημα του Kepler
Θεωρούμε τη συνάρτηση $H : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σύστημα Hamilton της συνάρτησης αυτής.
β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $I_1, I_2 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, που ορίζονται ως:

$$\begin{aligned}
I_1(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) &= q_1p_2 - p_1q_2, \\
I_2(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3) &= (q_2p_3 - p_2q_3)^2 + (q_3p_1 - p_3q_1)^2 + (q_1p_2 - p_1q_2)^2
\end{aligned}$$

είναι ολοκληρώματα της κίνησης του συστήματος αυτού.
γ) Βρείτε ένα δικό σας ολοκλήρωμα της κίνησης για το σύστημα αυτό και ονομάστε το $I_3 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$.
δ) Να δείξετε ότι τα τρία αυτά ολοκληρώματα της κίνησης είναι σε ενέλιξη μεταξύ τους.
ε) Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Liouville–Arnold για να περιγράψετε την ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος στον χώρο των φάσεων.

(3 μονάδες)