Χάος και Φράκταλς

Διδάσκων: Σταύρος Αναστασίου

1^0 φυλλάδιο ασκήσεων

1. Να λυθεί το σύστημα εξισώσεων διαφορών που αντιστοιχεί στο δυναμικό σύστημα $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (\frac{1}{2}x, 2y)$. Να βρείτε έτσι την τροχιά του σημείου $(1,2)$ και έπειτα να περιγράψετε ποιοτικά τον χώρο των φάσεων.

2. Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα του κύκλου $R_a : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ R_a([x]) = [x+a],\ a \in \mathbb{Q}$. Να δείξετε ότι αν $a = \frac{p}{q}$, όπου p, q πρώτοι προς αλλήλους, όλα τα σημεία του κύκλου είναι περιοδικά, περιόδου q.

3. Να διατυπωθεί και να αποδειχτεί το θεώρημα σταθερού σημείου του Bannach για συναρτήσεις της μορφής $f : X \to X$, όπου X κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

4. Θεωρούμε την απεικόνιση του κύκλου $E_3 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ E_3([x]) = [3x]$. 'Ταυτίστε' τον κύκλο με το ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$ και περιγράψτε το σύνολο $\cap_{n\geq 0} E_3^{-n}([0,1/3] \cup [2/3,1])$, αφού πρώτα δείξετε ότι είναι έμπροσθεν αναλλοίωτο από την E_3.

5. Έστω η απεικόνιση $E_3 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ E_3([x]) = [3x]$. Μπορείτε να εντοπίσετε ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{S}^1$ τέτοιο ώστε $\omega(x_0) = \mathbb{S}^1$;

6. Να δώσετε παράδειγμα απεικόνισης η οποία είναι τοπολογικώς μεταβατική αλλά όχι τοπολογικώς μίγνυσα.

7. Να αποδείξετε ότι η σχέση της τοπολογικής συζευξιμότητας αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $C^0(X,X)$, όπου X τοπολογικός χώρος.

8. Να γράψετε το σύστημα εξισώσεων διαφορών που αντιστοιχεί στο δυναμικό σύστημα $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x, x+2y+z, -x+z)$, να το λύσετε και έπειτα να περιγράψετε τα σύνολα $\alpha(1,2,3)$ και $\omega(1,2,3)$.

9. Να διατυπώσετε το θεώρημα Hartman-Grobman.

10. Έστω $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία εξαρτάται από την πραγματική παράμετρο μ, κλάσης C^3. Να εξαχθούν συνθήκες υπό τις οποίες η f_μ για $\mu = 0$ υφίσταται διακλάδωση διχάλας σε μια γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}$.

11. Να αποδείξετε ότι μία απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που διατηρεί τους όγκους δεν διαθέτει ελκτικά σταθερά σημεία.