

Χάος και Φράκταλς

Διδάσκων: Σταύρος Αναστασίου

2^ο φυλλάδιο ασκήσεων

1. Θεωρούμε το σύνολο των (μονόπλευρων) ακολουθιών δύο συμβόλων Σ_2^+ . Να εφοδιαστεί με μία μετρική τέτοια, ώστε η απεικόνιση μετατόπισης δύο συμβόλων $\sigma : \Sigma_2^2 \rightarrow \Sigma_2^2$ να είναι συνεχής.
2. Να περιγράψετε την κατασκευή του πετάλου του Smale.
3. Θεωρούμε την απεικόνιση $E_4 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $E_4([x]) = [4x]$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι είναι χαοτική.
4. Θεωρούμε την τετραγωνική απεικόνιση $f_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Εντοπίστε υποσύνολο του $[0, 1]$, αναλλοίωτο από την f_μ , τέτοιο, ώστε περιορισμένη επί αυτού η f_μ να είναι χαοτική, για $\mu > 2 + \sqrt{5}$.
5. Αποδείξτε ότι το κλασικό σύνολο του Cantor είναι μη αριθμήσιμο, τέλειο και πλήρως μη συνεκτικό.
6. Να δώσετε παράδειγμα συνάρτησης που ολοκληρώνεται κατά Lebesgue αλλά όχι κατά Riemann. Να αποδείξετε κάθε ισχυρισμό σας.
7. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ και $\lambda > 0$. Να δείξετε ότι $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$, όπου $\lambda F = \{\lambda x / x \in F\}$ και $\mathcal{H}^s(F)$ το s -διάστατο μέτρο Hausdorff του F .
8. Να ορίσετε τη διάσταση Hausdorff και να υπολογίσετε τη διάσταση Hausdorff του δίσκου $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.
9. Να αποδείξετε ότι αν $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ και $f : F_1 \rightarrow F_2$ συνάρτηση αμφί-Lipschitz, τότε τα δύο αυτά σύνολα έχουν την ίδια διάσταση Hausdorff.
10. Να κατασκευάσετε το κλασικό σύνολο του Cantor με τη βοήθεια ενός συστήματος επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων (I.F.S.). Να επιβεβαιώσετε ότι οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν τη συνθήκη των ανοιχτών συνόλων και να υπολογίσετε έτσι τη διάσταση Hausdorff του συνόλου αυτού.
11. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$, $f(t, z) = (2t, \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}e^{i2\pi t})$, όπου $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1\}$. Να περιγράψετε το σύνολο $f(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$ και να ορίσετε το σωληνοειδές του Smale.