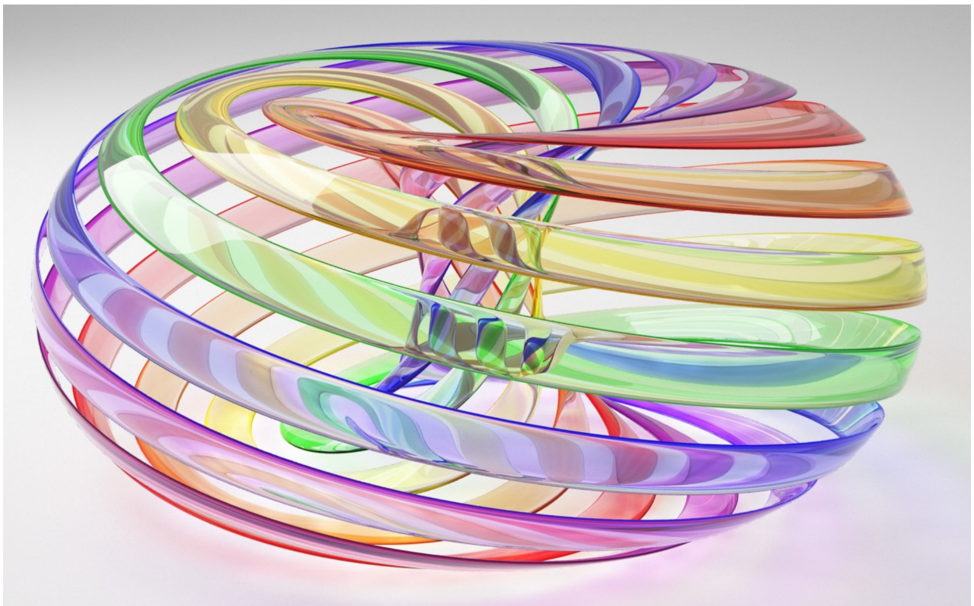
Χάος και Φράκταλς

Περιεχόμενα των Διαλέξεων

Σταύρος Αναστασίου



Πανεπιστημιο Πατρων
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Πατρα 2017

Πολύ πρόχειρες σημειώσεις για τους φοιτητές του μαθήματος
«Χάος και Φράκταλς»
του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.
Ακαδημαϊκό έτος 2016-2017.
Για να επικοινωνήσετε με τον γράφοντα
μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ηλεκτρονική διεύθυνση:
Anastassiou@math.upatras.gr

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Ας συμβολίσουμε ως x_n την «κατάσταση» ενός φυσικού μεγέθους την ν-ιοστή φορά που το παρατηρήσαμε (όπου το x_n μπορεί να ανήκει σε οποιοδήποτε σύνολο X), και ας υποθέσουμε ότι, μετά από πολλές παρατηρήσεις και παραδοχές, βρήκαμε τη σχέση που συνδέει το x_{n+1} με το x_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, η οποία είναι η $x_{n+1} = f(x_n)$. Μπορούμε να προβλέψουμε την εξέλιξη του φυσικού αυτού μεγέθους;

Προφανώς, θα πρέπει να μελετήσουμε τις ιδιότητες και τη συμπεριφορά της απεικόνισης $f : X \to X$, καθώς επίσης και των «επαναλήψεων» $f \circ f \circ ... \circ f$ αυτής. Αυτός ακριβώς είναι και ο στόχος των 'Δυναμικών Συστημάτων Διακριτού Χρόνου': η μελέτη συναρτήσεων και των επαναλήψεων αυτών.

Στις απλούστερες περιπτώσεις, η εξίσωση $x_{n+1} = f(x_n)$ μπορεί να λυθεί αναλυτικά, όπως συμβαίνει για παράδειγμα όταν η f είναι γραμμική. Τότε μπορούμε να γνωρίζουμε το $lim_{n\to\infty} f^n(x)$, $\forall x \in X$ (όπου ως f^n έχουμε συμβολίσει τη σύνθεση της f με τον εαυτό της, n φορές). Κάτι τέτοιο όμως σπάνια συμβαίνει στην περίπτωση που η f δεν είναι γραμμική, και έτσι ανακύπτει το ζήτημα του υπολογισμού του $lim_{n\to\infty} f^n(x)$ στην περίπτωση όπου η $x_{n+1} = f(x_n)$ δεν μπορεί να λυθεί.

Τεχνικές της Ανάλυσης, της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή συμπερασμάτων επί της «ποιοτικής συμπεριφοράς» των λύσεων της τελευταίας εξίσωσης, στην περίπτωση όπου οι λύσεις αυτές δεν είναι γνωστές. Προκύπτει ότι το ζήτημα αυτό είναι πιο δύσκολο από ό,τι φαίνεται ίσως με μια πρώτη ματιά, ακόμα και όταν αναφερόμαστε σε πολυωνυμικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Το «μέλλον» των τροχιών x_n εξελίσσεται συχνά πάνω σε ένα μορφοκλασματικό σύνολο (φράκταλ), και η ασυμπτωτική συμπεριφορά τους είναι τόσο πολύπλοκη (χαοτική) που είναι σχεδόν αδύνατον να προβλεφθεί.

Στο μάθημα «Χάος και Φράκταλς» μαθαίνουμε ορισμένες από τις τεχνικές μελέτης τέτοιων προβλημάτων, ερχόμαστε αντιμέτωποι με μερικές από αυτές τις πολύπλοκες συμπεριφορές και δίνουμε μια πρώτη εισαγωγή στον «θαυμαστό κόσμο των φράκταλς». Οι πρόχειρες αυτές σημειώσεις δίνουν το περιεχόμενο των μαθημάτων, διάλεξη προς διάλεξη, προκειμένου να διευκολυνθούν στη μελέτη τους οι φοιτητές/φοιτήτριες του μαθήματος.

Αν και καταλαμβάνουν ελάχιστες σελίδες, είναι βέβαιο ότι οι σημειώσεις αυτές περιέχουν λάθη και αστοχίες. Ο γράφων θα χαρεί να συζητήσει οποιεσδήποτε διορθώσεις ή υποδείξεις υπάρχουν.

Με την ελπίδα οι σελίδες αυτές να φανούν χρήσιμες,

Σταύρος Αναστασίου.

1 Διάλεξη 1^η: Εισαγωγικές έννοιες

Όπου στο μάθημα αυτό δίνουμε ορισμένα πολύ απλά παραδείγματα δυναμικών συστημάτων διακριτού χρόνου. Μέσα από αυτά εισάγουμε τους βασικούς ορισμούς και στόχους του μαθήματος.

Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0$. Περιγράψτε τις τροχιές των σημείων του $\mathbb{R}^n$.
2. Ομοίως για την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x$.
3. Ομοίως για την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
4. Να λυθούν οι εξισώσεις διαφορών που αντιστοιχούν στις παραπάνω συναρτήσεις.

2 Διάλεξη 2^η: Κλασικά παραδείγματα

Στη διάλεξη αυτή παρουσιάζουμε ορισμένα από τα κλασικότερα παραδείγματα δυναμικών συστημάτων, που ορίζονται σε μη ευκλείδειους χώρους. Αυτά είναι απεικονίσεις του κύκλου και του τόρου πολύ απλής μορφής, οι οποίες, εν τούτοις, παρουσιάζουν ενδιαφέρουσα δυναμική. Μέσα από τα παραδείγματα αυτά συνεχίζουμε να εισάγουμε ορισμούς και έννοιες των δυναμικών συστημάτων,

Ασκήσεις

1. Εάν $\alpha \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την περιστροφή του κύκλου $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ R_\alpha([x]) = [x + \alpha]$. Να βρείτε τα περιοδικά της σημεία.
2. Το ίδιο για τις διαστολικές απεικονίσειςτου κύκλου, $E_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ E_m(x) = mx\ mod 1$, όπου m ακέραιος μεγαλύτερος του 1.
3. Το ίδιο για τους αυτομορφισμούς του τόρου της μορφής

$$T_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n,\ T_A([x]) = [Ax],$$

όπου $A \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$ με ιδιοτιμές μέτρου 1.

3 Διάλεξη 3^η: Θεώρημα σταθερού σημείου

Υπάρχει μια κατηγορία απεικονίσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η δυναμική συμπεριφορά των οποίων είναι εύκολο να προβλεφθεί με κλασικά αποτελέσματα της ανάλυσης, ειδικά αν περιοριστούμε σε κάποιο φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Στο μάθημα αυτό θυμόμαστε το θεώρημα σταθερού σημείου για συστολικές απεικονίσεις, και το πώς η συστολική ιδιότητα συνδέεται με το πρώτο διαφορικό μιας απεικόνισης.

Ασκήσεις

1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα μέσης τιμής για διαφορίσιμες συναρτήσεις της μορφής $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

2. Να εξετάσετε εάν είναι συστολική απεικόνιση η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (\frac{1}{2}x + y, \frac{1}{2}y)$. Ποιο είναι το σταθερό της σημείο; Πόσο γρήγορα συγκλίνουν τα άλλα σημεία του $\mathbb{R}^n$ σε αυτό;

3. Να εξετάσετε αν η $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2,\ f(x, y) = (x - x^2, y - y^2)$, όπου $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, είναι συστολική απεικόνιση.

4 Διάλεξη 4^η: Η μέθοδος Newton-Raphson ως δυναμικό σύστημα

Η, αριθμητική, μέθοδος επίλυσης εξισώσεων Newton–Raphson αποτελεί ένα δυναμικό σύστημα, η συνπεριφορά του οποίου γίνεται αρκετά πολύπλοκη ακόμα και για απλές εξισώσεις. Στο μάθημα αυτό ξαναβλέπουμε τη μέθοδο αυτή, υπό το πρίσμα των δυναμικών συστημάτων, και μαθαίνουμε πώς να αντιμετωπίζουμε εξισώσεις και να 'προβλέπουμε' τη σύγκλιση των τροχιών σε απλά παραδείγματα.

Ασκήσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση διαφορών της μεθόδου Newton–Raphson για την εξίσωση $2x = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

2. Να περιγράψετε τη συμπεριφορά όλων των τροχιών του δυναμικού συστήματος που κατασκευάζει η μέθοδος Newton–Raphson για την εξίσωση $x^2 = 1,\ x \in \mathbb{R}$.

3. Μπορείτε να βρείτε συνθήκες οι οποίες να βεβαιώνουν ότι η απεικόνιση Newton–Raphson είναι συστολική;

5 Διάλεξη 5^η: Αναλλοίωτα σύνολα

Στο μάθημα αυτό δίνουμε την έννοια των αναλλοίωτων συνόλων ενός δυναμικού συστήματος, και μελετάμε ορισμένα απλά αναλλοίωτα σύνολα των παραδειγμάτων που έχουμε ήδη εισάγει στις προηγούμενες παραγράφους.

Ασκήσεις

1. Ποια τα αναλλοίωτα σύνολα του $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\ f(x) = x$;

2. Να δείξετε ότι το συμπλήρωμα ενός έμπροσθεν αναλλοίωτου συνόλου για τον ομοιομορφισμό $f : X \to X$ του τοπολογικού χώρου X είναι ένα όπισθεν αναλλοίωτο σύνολο για τον f.

3. Να δείξετε ότι το συμπλήρωμα ενός αναλλοίωτου συνόλου για τον ομοιομορφισμό $f : X \to X$ του τοπολογικού χώρου X είναι επίσης αναλλοίωτο σύνολο του f.

6 Διάλεξη 6^{η}: Οριακά σύνολα και ιδιότητες αυτών

Η έννοια των οριακών συνόλων είναι θεμελιώδης στα δυναμικά συστήματα, καθώς αποτελεί την μαθηματική έκφραση της 'μελοντικής εξέλιξης'. Εδώ, μελετάμε τον ορισμό και τις βασικές τοπολογικές ιδιότητες των οριακών συνόλων, μαζί με ορισμένα παρδείγματα τέτοιων συνόλων ήδη γνωστών απεικονίσεων.

Ασκήσεις

1. Για την περιστροφή του κύκλου $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, να μελετήσετε τα οριακά της σύνολα αν το α είναι ρητός και αν το α είναι άρρητος.

2. Δίνεται η απεικόνιση διαστολής $E_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Να βρεθεί σημείο $x \in \mathbb{S}^1$ τέτοιο ώστε $\omega(x) = \mathbb{S}^1$.

3. Να περιγραφούν τα οριακά σύνολα της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο (στις πολικές συντεταγμένες του επιπέδου)

$$f(\rho cos\theta, \rho sin\theta) = (\tfrac{\rho}{\rho+(1-\rho)/2} cos(\theta + \tfrac{\pi}{4}), \tfrac{\rho}{\rho+(1-\rho)/2} sin(\theta + \tfrac{\pi}{4})).$$

7 Διάλεξη 7^{η}: Τοπολογική μεταβατικότητα και τοπολογική μίξη

Η έννοια της επαναλαμβανόμενης συμπεριφοράς «κωδικοποιείται» από τους μαθηματικούς ορισμούς της τοπολογικής μίξης και της τοπολογικής μεταβατικότητας. Παρουσιάζουμε τους δύο αυτούς ορισμούς, τις ομοιότητες και τις διαφορές τους, και εξετάζουμε παραδείγματα δυναμικών συστημάτων που παρουσιάζουν τις ιδιότητες αυτές.

Ασκήσεις

1. Αποσαφηνίστε τη σχέση μεταξύ της τοπολογικής μεταβασιμότητας και της ύπαρξης μιας παντού πυκνής τροχιάς για έναν ομοιομορφισμό $f : X \to X$ του τοπολογικού χώρου X.

2. Να δείξετε ότι οι περιστροφές του κύκλου R_α, όπου το α άρρητος, δεν παρουσιάζουν τοπολογική μίξη. Είναι τοπολογικώς μεταβατικές;

3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τοπολογικώς μεταβατικός και αύξων ομοιομορφισμός $f : I \to I$, όπου I ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$.

8 Διάλεξη 8^{η}: Τοπολογική Συζυγία

Πότε λέμε ότι δύο δυναμικά συστήματα, διακριτού χρόνου, είναι ίδια στην ποιοτική τους συμπεριφορά; Μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο όλων των δυναμικών συστημάτων; Στην διάλεξη αυτή εισάγουμε την έννοια της τοπολογικής συζυγίας και μελετάμε ποια 'ποιοτικά χαρακτηριστικά' διατηρεί.

Ασκήσεις

1. Είναι τοπολογικώς συζυγείς οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x,\ g(x) = x^2$;

2. Είναι τοπολογικώς συζυγείς οι συναρτήσεις

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \tfrac{1}{2}x,\ g(x) = 2x;$$

3. Δοθέντος ακεραίου $m > 1$, θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ f(z) = z^m,$$

όπου $\mathbb{S}^1$ ο μοναδιαίος κύκλος κέντρου 0 του μιγαδικού επιπέδου. Να δείξετε ότι η απεικόνιση αυτή είναι τοπολογικώς συζυγής της E_m.

9 Διάλεξη 9^η: Γραμμικά δυναμικά συστήματα

Στην διάλεξη αυτή μελετάμε τα δυναμικά συστήματα του $\mathbb{R}^n$ που είναι της μορφής $f(x) = Ax$, όπου $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Δείχνουμε ότι με μια απλή αλλαγή συντεταγμένων, γνωστή από τα μαθήματα γραμμικής άλγεβρας, τα συστήματα αυτά είναι τοπολογικώς συζεύξιμα των λεγόμενων κανονικών μορφών (à la Jordan), οι οποίες κανονικές μορφές είναι εύκολο να λυθούν πλήρως.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η πλήρης λύση του συστήματος $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x + y, 2y)$, αφού πρώτα τη φέρετε στην κανονική της μορφή.

2. Να έρθει στην κανονική μορφή του το $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (2x + y + z, 2y + z, z)$.

3. Μπορείτε να λύσετε το $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (-y, x)$;

10 Διάλεξη 10^η: Το θεώρημα Hartman–Grobman

Στη γειτονιά ενός σταθερού σημείου (ή μιας περιοδικής τροχιάς) μιας απεικόνισης, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, η απεικόνιση είναι τοπολογικώς συζυγής μιας γραμμικής απεικόνισης, και άρα η συμπεριφορά της εκεί είναι, τοπικώς, απλή. Το θεώρημα Hartman-Grobman, η απόδειξη του οποίου δεν περιλαμβάνεται στους στόχους του μαθήματος, δίνει τις προϋποθέσεις αυτές. Στη διάλεξη αυτή παρουσιάζουμε το θεώρημα και το εφαρμόζουμε στη μελέτη μερικών παραδειγμάτων.

Ασκήσεις

1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ και $x_0 \in \mathbb{R}^3$ σταθερό σημείο της f. Αν το x_0 είναι υπερβολικό σημείο, πόσες μη τοπολογικώς συζυγείς δυναμικές συμπεριφορές μπορούμε να παρατηρήσουμε σε μια μικρή γειτονιά του;

2. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (y^2, 2y - 2x^2 + x^4y^2)$. Να κατασκευάσετε το πορτραίτο του χώρου των φάσεων σε μια μικρή γειτονιά των σημείων ισορροπίας.

3. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + z^4, -x - 2y - x^3, y - \frac{1}{2}z + y^2)$. Να μελετηθεί η δυναμική του σε μια μικρή γειτονιά της αρχής των αξόνων.

11 Διάλεξη $11^η$: Διακλαδώσεις· η διακλάδωση σάγμα–κόμβος

Η ποιοτική συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος στη γειτονιά ενός μη υπερβολικού σημείου ισορροπίας αλλάζει όταν το δυναμικό σύστημα διαταραχθεί. Οδηγούμαστε έτσι στον ορισμό της διακλάδωσης, καθώς επίσης και στα πρώτα απλά παραδείγματα διακλαδώσεων. Έπειτα, αρχίζουμε τη μελέτη των απλούστερων διακλαδώσεων σταθερών σημείων, ξεκινώντας με τη διακλάδωση σάγματος–κόμβου.

Ασκήσεις

1. Εάν $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο δυναμικό σύστημα εξαρτόμενο, κατά τρόπο διαφορίσιμο, από την πραγματική παράμετρο μ, να κατασκευάσετε συνθήκες υπό τις οποίες το σημείο ισορροπίας $x_0 \in \mathbb{R}$ υφίσταται διακλάδωση σάγματος–κόμβου για $\mu = \mu_0$.

12 Διάλεξη $12^η$: Μετακρίσιμη διακλάδωση–διακλάδωση διχάλας

Όπου στο μάθημα αυτό συνεχίζουμε τη μελέτη των απλούστερων διακλαδώσεων των μη υπερβολικών σημείων ισορροπίας με τη μετακρίσιμη διακλάδωση και τη διακλάδωση διχάλας. Παράλληλα με τις συνθήκες εμφάνισής τους, μελετάμε συγκεκριμένα παραδείγματα και δίνουμε τα διαγράμματα διακλάδωσης.

Ασκήσεις

1. Εάν $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο δυναμικό σύστημα εξαρτόμενο, κατά τρόπο διαφορίσιμο, από την πραγματική παράμετρο μ, να κατασκευάσετε συνθήκες υπό τις οποίες το σημείο ισορροπίας $x_0 \in \mathbb{R}$ υφίσταται μετακρίσιμη διακλάδωση για $\mu = \mu_0$. Το ίδιο για τη διακλάδωση διχάλας.

13 Διάλεξη $13^η$: Διπλασιασμός περιόδων και διακλάδωση "Hopf"

Συνεχίζοντας τη μελέτη των τοπικών διακλαδώσεων, παρουσιάζουμε στο μάθημα αυτό τη διακλάδωση διπλασιασμού περιόδων και τη διακλάδωση Naimark–Sacker, η οποία αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως «διακλάδωση Hopf για απεικονίσεις». Δίνονται τα διαγράμματα διακλάδωσης και μελετώνται συγκεκριμένα παραδείγματα.

Ασκήσεις

1. Μελετήστε τις διακλαδώσεις των σημείων ισορροπίας των ακόλουθων απεικονίσεων.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (-\frac{1}{2}x - y - xy^2, -\frac{1}{2}x + \epsilon y + x^2)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (-\frac{1}{2}x - y - xy^2, -\frac{1}{2}y + \epsilon y^2 + x^2)$.
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x - z^3, 2x - y + \epsilon y, x + 0.5z = x^3)$.

14 Διάλεξη 14^η: Το θεώρημα επαναληπτικότητας του Poincaré

Στη διάλεξη αυτή παρουσιάζουμε μια σημαντική κατηγορία απεικονίσεων: τις απεικονίσεις εκείνες που διατηρούν τους όγκους στον χώρο των φάσεων. Αφού μάθουμε να ξεχωρίζουμε τις συναρτήσεις αυτές, αποδεικνύουμε το θεώρημα επαναληπτικότητας του Poincaré και δίνουμε μερικές από τις βασικές του εφαρμογές.

Ασκήσεις

1. Διατυπώστε και αποδείξτε κριτήριο προκειμένου μια απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ να διατηρεί τους όγκους στον $\mathbb{R}^n$.

2. Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα επαναληπτικότητας του Poincaré.

3. Τι συμπεράσματα μπορείτε να βγάλετε για τις απεικονίσεις $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα επαναληπτικότητας του Poincaré;

15 Διάλεξη 15^η: Η απεικόνιση μετατόπισης δύο συμβόλων

Όπου στο μάθημα αυτό εισάγουμε μία απεικόνιση του χώρου των ακολουθιών δύο συμβόλων, η οποία αν και απλή στον ορισμό διαθέτει ορισμένες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Μελετάμε μερικές από τις ιδιότητες αυτές και μετράμε τις περιοδικές της τροχιές.

Ασκήσεις

1. Θεωρήστε τον χώρο των ακολουθιών δύο συμβόλων. Να οριστεί μία μετρική επί του χώρου αυτού τέτοια, ώστε η απεικόνιση μετατόπισης να καθίσταται συνεχής. Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

16 Διάλεξη 16^η: Χάος: ορισμός και πρώτο παράδειγμα

Στο μάθημα αυτό εισάγουμε τον ορισμό της χαοτικής δυναμικής, για τα δυναμικά συστήματα που μας ενδιαφέρουν, και εξετάζουμε μερικές απεικονίσεις που ικανοποιούν τον ορισμό αυτόν. Ανάμεσα σε αυτές είναι η απεικόνιση μετατόπισης δύο συμβόλων και η E_2 που γνωρίσαμε σε προηγούμενα μαθήματα.

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι η απεικόνιση μετατόπισης δύο συμβόλων ικανοποιεί τον ορισμό του χάους.

2. Να κατασκευάσετε τοπολογική συζυγία μεταξύ της απεικόνισης μετατόπισης δύο συμβόλων και της E_2.

17 Διάλεξη 17^η: Η τετραγωνική απεικόνιση

Στο μάθημα αυτό μελετάμε την τετραγωνική απεικόνιση (άλλως γνωστή και ως λογιστική) για διάφορες τιμές της παραμέτρου της. Δείχνουμε ότι για ένα διάστημα τιμών της παραμέτρου η συμπεριφορά της απεικόνισης είναι πολύ απλή, ενώ καθώς η παράμετρος αυξάνεται διαδοχικές διακλαδώσεις οδηγούν σε όλο και πιο πολύπλοκη συμπεριφορά. Τέλος, κατασκευάζουμε τοπολογική συζυγία με την απεικόνιση δύο συμβόλων.

Ασκήσεις

1. Εξετάστε τη δυναμική της τετραγωνικής απεικόνισης για $0 < \lambda < 3$.

2. Περιγράψτε μερικές από τις διακλαδώσεις που συμβαίνουν στη λογιστική απεικόνιση όταν $\lambda > 3$.

3. Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ παρουσιάζει η λογιστική απεικόνιση χαοτική συμπεριφορά;

18 Διάλεξη 18^η: Η απεικόνιση του Hénon

Όπου στο μάθημα αυτό, συνδυάζοντας τις γνώσεις που αποκτήσαμε στα προηγούμενα μαθήματα, μελετάμε τη διάσημη απεικόνιση του Hénon για διάφορες τιμές των παραμέτρων της. Βρίσκουμε τα σημεία ισορροπίας της και μελετάμε την ευστάθειά τους, εντοπίζουμε ορισμένες από τις διακλαδώσεις καθώς οι παράμετροι του συστήματος αλλάζουν και ερχόμαστε αντιμέτωποι με τον παράξενο ελκυστή της.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της απεικόνισης του Hénon και να μελετηθεί η ευστάθειά τους.

2. Να εντοπίσετε μια περιοδική τροχιά περιόδου δύο της απεικόνισης του Hénon και να μελετήσετε την ευστάθειά της.

3. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τη δυναμική της απεικόνισης επί του παράξενου ελκυστή της;

19 Διάλεξη 19^η: Το σύνολο του Cantor

Στη διάλεξη αυτή κατασκευάζουμε το κλασικό σύνολο του Cantor και μελετάμε τις τοπολογικές του ιδιότητες.

Ασκήσεις

1. Μπορείτε να αποφανθείτε αν το κλασικό σύνολο του Cantor είναι πλήρης μετρικός χώρος, ως προς τη συνήθη μετρική;

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) = 1 - \frac{x}{3}$ είναι συστολή, η οποία απεικονίζει το κλασικό σύνολο του Cantor στον εαυτό του. Ποιο είναι το σταθερό της σημείο;

3. Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, αυτή τη φορά όμως για τη συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1],\ f(x) = \frac{x+2}{3}$.

20 Διάλεξη 20^{η}: Άλλα σύνολα φράκταλ

Όπου στη διάλεξη αυτή παρουσιάζουμε την κατασκευή μερικών ακόμα συνόλων φράκταλ που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια: τη «σκόνη του Cantor», το «τρυπητό του Sierpiński» την καμπύλη του Koch και άλλα.

21 Διάλεξη 21^{η}: Μέτρο Lebesque – μέτρο Hausdorff

Στο μάθημα αυτό θυμίζουμε ορισμένες βασικές έννοιες από τη θεωρία μέτρου: τι είναι μέτρο, τι είναι το μέτρο Lebesque (και λίγο από το ολοκλήρωμά του), τι είναι το μέτρο Haussdorf και μερικές από τις βασικές τους ιδιότητες.

Ασκήσεις

1. Να ορίσετε το μέτρο και το ολοκλήρωμα Lebesque.

2. Να φέρετε παράδειγμα συνάρτησης μη ολοκληρώσιμης κατά Riemann η οποία να ολοκληρώνεται κατά Lebesque.

3. Να αποδείξετε τη βασική σχέση του μέτρου Hausdorff για σύνολα υπό κλίμακα.

22 Διάλεξη 22^{η}: Διάσταση Hausdorff

Στο μάθημα αυτό ορίζουμε τη διάσταση Hausdorff και μελετάμε τις ιδιότητές της. Ακόμα υπολογίσουμε τη διάσταση Hausdorff μερικών βασικών συνόλων.

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι αν η διάσταση Hausdorff ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$ είναι μικρότερη της μονάδας, τότε το σύνολο αυτό είναι πλήρως μη συνεκτικό.

2. Να υπολογίσετε τη διάσταση Hausdorff του κλασικού συνόλου του Cantor.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κλάσης C^{∞}. Να δείξετε ότι η διάσταση Hausdorff του $f(X)$ είναι μικρότερη ή ίση της διάστασης Hausdorff του X, για κάθε $X \subset \mathbb{R}$.

23 Διάλεξη $23^η$: Συστήματα επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων

Στο μάθημα αυτό ορίζουμε τα συστήματα επαναλαμβανόμενων συναρτήσεων, τα οποία μας χρησιμεύουν στη μελέτη των φράκταλς, ειδικά όταν οι συναρτήσεις αυτές είναι συστολές. Φτάνουμε έτσι σε έναν ορισμό των αυτοόμοιων συνόλων, και σε μία εύκολη μέθοδο υπολογισμού της διάστασής τους (τουλάχιστον σε απλές περιπτώσεις.)

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι κάθε σύστημα επαναλαμβανόμενων συστολών διαθέτει αναλλοίωτο σύνολο.

2. Να κατασκευάσετε το σύστημα επαναλαμβανόμενων συστολών το αναλλοίωτο σύνολο της οποίας είναι το κλασικό σύνολο του Cantor.

3. Να υπολογίσετε τη διάσταση του τρυπητού του Sierpiński.

24 Διάλεξη $24^η$: Δυναμικά συστήματα με φράκταλ ελκυστές

Όπου στη διάλεξη αυτή συναντάμε και πάλι ορισμένα διάσημα δυναμικά συστήματα, για να δούμε τη φράκταλ δομή των ελκυστών τους. Η τετραγωνική απεικόνιση, η απεικόνιση του Henón, το πέταλλο του Smale και το σωληνοειδές παρουσιάζονται ξανά, υπό το πρίσμα των φράκταλ συνόλων αυτή τη φορά.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί αναλλοίωτο σύνολο τύπου φράκταλ για την απεικόνιση "tent" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2(1- \mid 2x - 1 \mid)$. Να δείξετε ότι το αναλλοίωτο αυτό σύνολο είναι απώστης για την f και ότι η f περιορισμένη επ΄ αυτού παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά.

2. Θεωρήστε την απεικόνιση του Henón για τις τιμές των παραμέτρων $\alpha = 1.4,\ b = 0.3$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα

$$(1.32, 0.133),\ (-1.33, 0.42),\ (-1.06, -0.5) \text{ και } (1.245, -0.14)$$

   απεικονίζεται στον εαυτό του από την απεικόνιση αυτή.

3. Προσπαθήστε, με όποιον τρόπο μπορείτε, να υπολογίσετε την τροχιά ενός σημείου που ανήκει στο προηγούμενο τετράπλευρο.

25 Διάλεξη $25^η$: Περιήγηση σε προχωρημένα προβλήματα

Στη διάλεξη αυτή συζητάμε μερικά πιο προχωρημένα θέματα δυναμικών συστημάτων. Τοπολογική συζευξιμότητα και δομική ευστάθεια, αναλλοίωτες πολλαπλότητες και ομοκλινικές τομές, διατήρηση όγκων, εργοδικότητα και συμπλεκτικά δυναμικά συστήματα είναι μερικά από τα θέματα που θα μας απασχολήσουν.

26 Διάλεξη 26^{η}: Ανασκόπηση του μαθήματος

Ετούτη είναι η τελευταία διάλεξη του μαθήματος, και επιχειρούμε σε αυτήν μια μικρή ανασκόπηση του μαθήματος. Θα συζητήσουμε και πάλι το αντικείμενο των δυναμικών συστημάτων διακριτού χρόνου, τις απλές και τις πολύπλοκες συμπεριφορές τους, τον ορισμό του χάους και την απόδειξη ύπαρξής του, το μέτρο και τη διάσταση Hausdorff και τα φράκταλ σύνολα, όπως επίσης και απορίες που ίσως υπάρχουν.

Βιβλιογραφία

1. K J Falconer, "Geometry of Fractal Sets", Cambridge University Press, 1985.
2. T Μπούντης, «Δυναμικά Συστήματα και Χάος», Τόμος Α′, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1995.
3. B Hasselblatt, A Katok, "A First Course in Dynamics", Cambridge University Press, 2003.
4. Y Pesin, V Climenhaga, "Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems", AMS, 2003.
5. T Μπούντης, «Ο Θαυμαστός Κόσμος των Fractals», Leader Books, 2005.