Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΑ ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ,
γραμμένες υπό αντίξοες συνθήκες,
για να αποτελέσουν τον «πλοηγό» των φοιτητών του μαθήματος:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Σταύρος Αναστασίου

Πανεπιστημιο Πατρων
Τμημα Επιστημης Βιοσυστηματων
και
Γεωργικης Μηχανικης

Πατρα 2020

Οι πολύ πρόχειρες αυτές σημειώσεις απευθύνονται στους φοιτητές του μαθήματος:
«Μαθηματικά ΙΙ»
του Τμήματος Επιστήμης Βιοσυστημάτων και Γεωργικής Μηχανικής
του Πανεπιστημίου Πατρών.

Δεν γράφτηκαν, προφανώς, για να αντικαταστήσουν τα συγγράμματα. Απλώς, σε συνθήκες έκτακτες, προσπαθούν να σκιαγραφήσουν το minimum των γνώσεων που πρέπει να έχουν οι φοιτητές.

Ίσως κάποια στιγμή αποτελέσουν την αρχή μιας καλύτερης προσπάθειας.

Το «σωτήριο» εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2019-2020.

Για να επικοινωνήσετε με τον γράφοντα,
προκειμένου να του υποδείξετε τα λάθη και τις παραλείψεις του,
μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ηλεκτρονική διεύθυνση:
Anastassiou@math.upatras.gr

Περιεχόμενα

1 Εσωτερικό γινόμενο

Οι διανυσματικοί χώροι $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ μπορούν να εφοδιαστούν με μία ακόμα πράξη. Η πράξη αυτή ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο (για να διαχωριστεί από τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό), και το αποτέλεσμά της σε δύο διανύσματα είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Στον χώρο $\mathbb{R}^n$ μπορεί κάποιος να ορίσει διάφορα εσωτερικά γινόμενα. Εμάς μας ενδιαφέρει το λεγόμενο ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

1.1 Ορισμός. Έστω ο διανυσματικός χώρος $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον χώρο αυτόν ονομάζουμε την απεικόνιση:

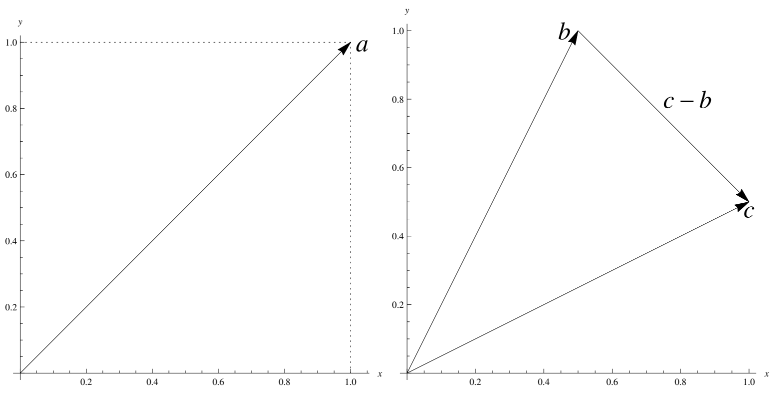
$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

η οποία στα διανύσματα $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, .., u_n)$, $v = (v_1, v_2, ..v_n)$, προσαρτά τον αριθμό $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + .. + u_n v_n$. Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο αυτό ονομάζεται πραγματικός ευκλείδειος χώρος διάστασης n.

1.2 Παράδειγμα. *Αν* $u = (1, 3, 5)$ *και* $v = (-1, 0, 6)$ *τότε* $\langle u, v \rangle = 1(-1) + 3(0) + 5(6) = 29$.

1.3 Σχόλιο. Το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο το ονομάζουμε και, απλώς, εσωτερικό γινόμενο. Ακόμα, αντί του συμβολισμού $\langle u, v \rangle$, χρησιμοποιούμε συχνά και τον συμβολισμό $u \cdot v$.

Τι παριστάνει όμως το εσωτερικό γινόμενο; Ας δούμε πρώτα τι παριστάνει το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του.



Σχήμα 1: Κατασκευάζοντας τις προβολές του διανύσματος $(1, 1)$ του $\mathbb{R}^2$ στους δύο άξονες συντεταγμένων (αριστερά) και το διάνυσμα της απόστασης του b από το c (δεξιά).

Στο σχήμα (1) (αριστερά) βλέπουμε το διάνυσμα $\alpha = (1, 1)$ του επιπέδου. Προβάλλοντάς το στους άξονες συντεταγμένων προκύπτει ένα ορθογώνιο τρίγωνο, οι κάθετες πλευρές του οποίου είναι μήκους ένα (ισούνται, η κάθε μία, με τις συντεταγμένες του διανύσματος). Από το πυθαγόρειο θεώρημα ξέρουμε ότι το τετράγωνο του μήκους του διανύσματος α ισούται με $1^2 + 1^2$, δηλαδή με $\alpha \cdot \alpha$. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι το μήκος του διανύσματος α (και γενικεύοντας, οποιουδήποτε διανύσματος α) ισούται με $\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

Μόλις μετρήσαμε δηλαδή το μήκος του διανύσματος α με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου. Στο σχήμα 1 (δεξιά) βλέπουμε το πόσο απέχει το διάνυσμα b από το διάνυσμα c. Απέχει απόσταση ίση με το μήκος του διανύσματος $c-b$. Όπως είδαμε παραπάνω, το μήκος αυτό ισούται με $\sqrt{\langle c-b, c-b \rangle}$. Με λίγη παραπάνω τριγωνομετρία θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα b, c.

1.4 Άσκηση. Βρείτε έναν τύπο για τη γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα του επιπέδου.

1.5 Ορισμός. Έστω $v \in \mathbb{R}^n$. Μέτρο του v , συμβολικώς $\|v\|$, ονομάζουμε την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. Αν u ένα άλλο σημείο του $\mathbb{R}^n$, τότε ορίζουμε ως απόσταση του u από το v τον πραγματικό αριθμό $d(u,v) = \|v-u\|$, ενώ η γωνία φ που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα ικανοποιεί τη σχέση $cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$.

1.6 Σχόλιο. Χρησιμοποιώντας το (ευκλείδειο) εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε παραπάνω, το (ευκλείδειο) μέτρο του διανύσματος v γίνεται:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + .. + v_n^2},$$

και η (ευκλείδεια) απόσταση μεταξύ δύο σημείων u, v είναι η:

$$d(u,v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2} = \sqrt{(u_1^2 - v_1^2) + ..(u_n^2 - v_n^2)}.$$

1.7 Παράδειγμα. *Να υπολογίσετε το μέτρο του $(2,4) \in \mathbb{R}^2$ και την απόσταση του $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ από το $(2,0,3) \in \mathbb{R}^3$. Έπειτα να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $(1,0,-1,0)$ και $(2,4,-1,0)$ του $\mathbb{R}^4$.*
Λύση: Υπολογίζουμε το μέτρο του $(2,4)$ σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση:

$$\|(2,4)\| = \sqrt{(2,4) \cdot (2,4)} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20},$$

ενώ η απόσταση του $(1,2,3)$ από το $(2,0,3)$ θα είναι:

$$d((1,2,3),(2,0,3)) = \|(1,2,3) - (2,0,3)\| = \|(-1,2,0)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Όσον αφορά στη γωνία που σχηματίζεται από τα διανύσματα $(1,0,-1,0)$, $(2,4,-1,0)$, αυτή ικανοποιεί τη σχέση

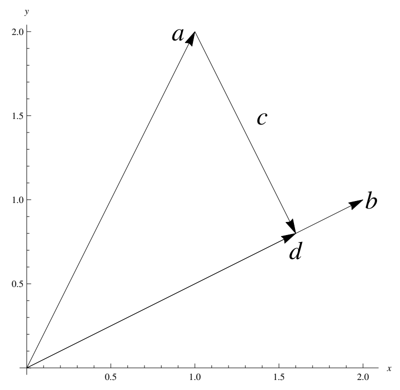
$$cos\varphi = \frac{(1,0,-1,0) \cdot (2,4,-1,0)}{\|(1,0,-1,0)\| \|(2,4,-1,0)\|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{21}},$$

δηλαδή η γωνία τους είναι $arccos\frac{3}{\sqrt{42}}$.

1.8 Παράδειγμα. *Να βρεθεί διάνυσμα το οποίο να έχει μοναδιαίο μέτρο, και την ίδια διεύθυνση και φορά με το διάνυσμα $(1,3,2)$.*
Λύση: Εάν $x \in \mathbb{R}$, τότε διαιρώντας το x με την απόλυτη τιμή του προκύπτει η θετική μονάδα, σε περίπτωση που το x είναι θετικός αριθμός, και η αρνητική μονάδα, σε περίπτωση που το x είναι αρνητικός αριθμός.

Εντελώς ανάλογα, εάν διαιρέσουμε ένα διάνυσμα με το μέτρο του, τότε προκύπτει ένα άλλο διάνυσμα, το οποίο έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το αρχικό, με τη μόνη διαφορά ότι το μέτρο του είναι πλέον μοναδιαίο.

Στο παράδειγμά μας, αφού $\|(1,3,2)\| = \sqrt{14}$, το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $\frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,2) = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}})$.



Σχήμα 2: Προβάλλοντας το διάνυσμα a πάνω στο b προκύπτει το διάνυσμα d.

1.9 Παράδειγμα. *Να δείξετε ότι τα διανύσματα* $(1, -1)$ *και* $(1, 1)$ *είναι μεταξύ τους κάθετα. Έπειτα να υπολογίσετε το μήκος της προβολής του διανύσματος* $(1, 2)$ *πάνω στο* $(2, 1)$*.*
Λύση: Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των δύο αυτών διανυσμάτων. Είναι $(1, -1) \cdot (1, 1) = 0$*, άρα, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν είναι μηδενικό, οπότε η γωνία που σχηματίζουν είναι ορθή: τα δύο αυτά διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα.*

Για το δεύτερο ερώτημα, συμβουλευόμαστε την εικόνα (2). Θέλουμε να προβάλλουμε το διάνυσμα $a = (1, 2)$ *πάνω στο διάνυσμα* $b = (2, 1)$*. Καταλαβαίνουμε ότι θα προκύψει το διάνυσμα* d*, το οποίο αφού είναι συγγραμμικό με το* b*, είναι της μορφής* xb*, για κάποιον αριθμό* x*.*

Έχουμε λοιπόν τη σχέση $a + c = d = xb$*, και παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης αυτής με το διάνυσμα* b*, ενθυμούμενοι ότι, αφού το* c *είναι κάθετο στο διάνυσμα* b*,* $c \cdot b = 0$*. Έχουμε λοιπόν:*

$$\langle b, a + c\rangle = \langle b, xb\rangle \Rightarrow \langle b, a\rangle + \langle b, c\rangle = x\langle b, b\rangle \Rightarrow \langle b, a\rangle = x\langle b, b\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \tfrac{\langle b,a\rangle}{\langle b,b\rangle}.$$

Επομένως, η προβολή του a *πάνω στο* b *είναι το διάνυσμα* $d = xb = (\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$*.*

Από το παραπάνω παράδειγμα γίνεται αντιληπτό ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μηδέν αν, και μόνο αν, το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδενικό, ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων a, b, παριστάνει το γινόμενο του τετραγώνου του μήκους του b με το μήκος της προβολής του a επί του b.

1.10 Σχόλιο. Τα παραδείγματα αυτά αναδεικνύουν και τη σπουδαιότητα του εσωτερικού γινομένου. Με τη βοήθειά του μπορούμε να υπολογίσουμε μήκη, αποστάσεις και γωνίες μέσα στους χώρους $\mathbb{R}^n$.

Στο παραπάνω παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\langle b, a+c\rangle = \langle b, a\rangle + \langle b, c\rangle$, καθώς επίσης και τη σχέση $\langle b, xb\rangle = x\langle b, b\rangle$. Σχέσεις σαν και αυτές αποδεικνύονται αναπτύσσοντας το αριστερό και το δεξιό μέλος τους, και δείχνοντας ότι αυτά είναι τελικώς ίσα μεταξύ τους. Για παράδειγμα:

1.11 Παράδειγμα. *Να δείξετε ότι, αν* $a, b, c \in \mathbb{R}^n$*, τότε* $\langle b, a + c\rangle = \langle b, a\rangle + \langle b, c\rangle$*.*

Λύση: Έστω $a = (a_1, a_2, .., a_n)$, $b = (b_1, b_2, ..,_n)$ και $c = (c_1, c_2, .., c_n)$. Τότε θα είναι:

$$\langle b, a+c\rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + c_i) = \sum_{i=1}^{n}(b_i a_i + b_i c_i),$$

ενώ το δεξί μέλος της σχέσης γίνεται:

$$\langle b, a\rangle + \langle b, c\rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = \sum_{i=1}^{n}(b_i a_i + b_i c_i),$$

οπότε, προφανώς, τα δύο μέλη είναι ίσα, και έτσι η σχέση $\langle b, a+c\rangle = \langle b, a\rangle + \langle b, c\rangle$ αληθεύει.

Με τον ίδιο (περίπου) τρόπο, μπορεί κάποιος να αποδείξει την επόμενη πρόταση, στην οποία συνοψίζονται οι βασικές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου .

1.12 Πρόταση. *Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε:*

- $x \cdot y = y \cdot x$ *(το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό).*
- $(ax + by) \cdot z = a(x \cdot z) + b(y \cdot z)$ *(το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικό, ως προς κάθε θέση).*
- $x \cdot x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, *(το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικώς ορισμένο).*
- $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(το εσωτερικό γινόμενο είναι μη εκφυλισμένο).*
- $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$ *(το εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την ανισότητα Cauchy–Schwarz).*
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(το μέτρο ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα).*

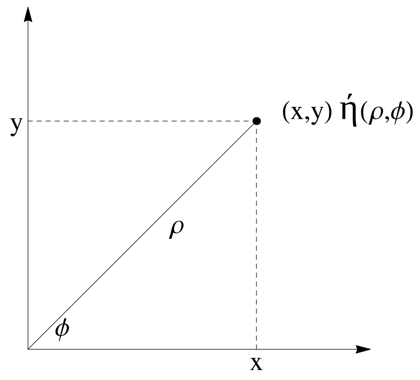
Ασκήσεις

1) Αν $a = (1, 3, 2)$, $b = i - j + 2k$, $c = (1, 3)$, υπολογίστε το $a \cdot b$, το μήκος του c και τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα a, b. Μπορείτε να υπολογίσετε το $c \cdot a$;
2) Βρείτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ το οποίο να είναι κάθετο στο $(1, 1)$ και να έχει μήκος 1. Είναι το διάνυσμα αυτό μοναδικό;
3) Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε το $(x, 1, 2)$ να είναι κάθετο στο $(-1, 0, 3)$;
4) Βρείτε τιμές των $x, y \in \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε το $(1, x, y)$ να είναι κάθετο και στο $(1, 3, 2)$ και στο $(0, 1, -1)$.
5) Υπολογίστε την προβολή του διανύσματος $(1, 2, 3)$ στο $(0, 2, 1)$.

2 Συντεταγμένες του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$

2.1 Συντεταγμένες στο επίπεδο

Ο πιο «διάσημος» τρόπος για να περιγράψουμε ένα σημείο του επιπέδου είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες. Αν α τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^2$ τότε, στις καρτεσιανές συντεταγμένες, το σημείο αυτό ονομάζεται (x, y), όπου x η απόσταση της προβολής του α στον οριζόντιο άξονα από το $(0, 0)$, και y η απόσταση της προβολής του σημείου αυτού στον κάθετο άξονα από το $(0, 0)$. Ο δεύτερος πιο χρήσιμος τρόπος για να περιγράψουμε ένα σημείο του επιπέδου είναι οι πολικές συντεταγμένες. Στις συντεταγμένες αυτές το σημείο ονομάζεται (ρ, ϕ), όπου ρ η απόσταση του σημείου



Σχήμα 3: Καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.

από την αρχή των αξόνων και ϕ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του με τον θετικό ημιάξονα των x (βλ. σχήμα 3).

Να τονίσουμε ότι καθώς το ρ παριστάνει απόσταση, δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός, άρα $\rho \in [0, +\infty)$, ενώ το ϕ, ως γωνία, ανήκει προφανώς στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

Για να μετατρέψουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές, αρκεί να εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος. Έτσι, είναι :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = arctan(\tfrac{y}{x}),$$

όπου πρέπει να προσέξουμε, για τη γωνία ϕ, ότι για $x = 0$ η παραπάνω σχέση δεν είναι καλώς ορισμένη. Γίνεται όμως εύκολα αντιληπτό ότι, καθώς $x = 0$ είναι ο άξονας των y, όλα τα σημεία που ανήκουν στον θετικό ημιάξονα των y έχουν γωνία $\frac{\pi}{2}$, και όλα τα σημεία που ανήκουν στον αρνητικό ημιάξονα των y έχουν γωνία $\frac{3\pi}{2}$.

Από τη μελέτη του ορθογωνίου τριγώνου, συμπεραίνουμε και πάλι ότι

$$x = \rho cos\phi,\ y = \rho sin\phi.$$

2.1 Παράδειγμα. *Να γραφούν στις πολικές συντεταγμένες τα σημεία* $(1, 1)$ *και* $(0, 1)$*. Έπειτα να γραφεί στις πολικές συντεταγμένες το σημείο εκείνο που στις πολικές συντεταγμένες γράφεται ως* $(\sqrt{2}, \pi)$*.*

Λύση: Για το σημείο $(1, 1)$*: βρίσκουμε την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. Σύμφωνα με αυτά που έχουμε πει παραπάνω, η απόσταση αυτή ισούται με* $\sqrt{2}$*. Η γωνία που σχηματίζεται με τον θετικό ημιάξονα των* x *είναι* $\phi = arctan\frac{1}{1} = arctan1 = \frac{\pi}{4}$ *(πράγμα που γίνεται και αμέσως αντιληπτό, εάν καταλάβουμε ότι το* $(1, 1)$ *βρίσκεται πάνω στην κύρια διαγώνιο). Επομένως, στις πολικές συντεταγμένες, το* $(1, 1)$ *είναι το σημείο* $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$*.*

Το σημείο $(0, 1)$ *απέχει, προφανώς, απόσταση* 1 *από την αρχή των αξόνων, ενώ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του με τον θετικό ημιάξονα των* x *είναι* $\frac{\pi}{2}$*. Άρα, στις πολικές συντεταγμένες γράφεται ως* $(1, \frac{\pi}{2})$*.*

Τώρα, το σημείο που στις πολικές συντεταγμένες γράφεται ως $(\sqrt{2}, \pi)$ *είναι εκείνο που απέχει απόσταση* $\sqrt{2}$ *από το* $(0, 0)$ *και βρίσκεται πάνω στον αρνητικό* *ημιάξονα των* x *(γιατί;). Είναι δηλαδή το* $(-\sqrt{2}, 0)$. *Άλλωστε, και από τους τύπους είναι προφανές ότι* $x = \sqrt{2}cos(\pi) = -\sqrt{2}$ *και* $y = \sqrt{2}\sin(\pi) = 0$.

2.2 Παράδειγμα. *Να γραφεί η εξίσωση του κύκλου κέντρου* $(0, 0)$ *και ακτίνας* $R > 0$ *στις καρτεσιανές και στις πολικές συντεταγμένες.*
Λύση: Έστω (x, y) *σημείο του επιπέδου που ανήκει στον ζητούμενο κύκλο. Τότε, η απόστασή του από το* $(0, 0)$ *ισούται με* R. *Είναι δηλαδή* $\sqrt{x^2 + y^2} = R \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2$, *που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.*

Στις πολικές συντεταγμένες η περιγραφή ενός τέτοιου κύκλου είναι αρκετά πιο απλή, αφού η φράση 'η απόσταση των σημείων από την αρχή των αξόνων ισούται με R*' μεταφράζεται ως* $\rho = R$. *Άλλωστε,*

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \pm R \Rightarrow \rho = \pm R,$$

και αφού το ρ *είναι μη αρνητικός αριθμός στις πολικές συντεταγμένες, προκύπτει και πάλι η εξίσωση του κύκλου* $\rho = R$.

2.3 Παράδειγμα. *Τι παριστάνει η εξίσωση* $x = y$ *στο επίπεδο; Να γραφεί στις πολικές συντεταγμένες.*
Λύση: Η εξίσωση $x = y$ *παριστάνει εκείνα τα σημεία του επιπέδου που ανήκουν στην κύρια διαγώνιο. Η κύρια διαγώνιος αποτελείται από δύο ημιευθείες: την ημιευθεία που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο, και σχηματίζει γωνία* $\frac{\pi}{4}$ *με τον θετικό ημιάξονα των* x, *και την ημιευθεία που ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο και σχηματίζει γωνία* $\frac{5\pi}{4}$ *με τον θετικό ημιάξονα των* x. *Άρα, στις πολικές συντεταγμένες χρειαζόμαστε δύο εξισώσεις για να παραστήσουμε την ευθεία* $x = y$: *τις* $\phi = \frac{\pi}{4}$ *και* $\phi = \frac{5\pi}{4}$.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φτάσουμε και με έναν άλλον τρόπο: δουλεύοντας απευθείας στην εξίσωση $x = y$. *Έτσι, θα είναι:*

$$x = y \Rightarrow \rho cos\phi = \rho sin\phi,$$

που μας δίνει μία λύση την $\rho = 0$. *Άρα, το σημείο* $(0, 0)$ *(που είναι το μοναδικό σημείο του επιπέδου με* $\rho = 0$*) ικανοποιεί την εξίσωση* $x = y$. *Η άλλη λύση είναι η:*

$$cos\phi = sin\phi,$$

που συμβαίνει μόνο όταν $\phi = \frac{\pi}{4}$ *ή* $\phi = \frac{5\pi}{4}$.

2.4 Παράδειγμα. *Τι παριστάνουν οι εξισώσεις* $x = 1$ *και* $x^2 + y^2 = arctan^2(\frac{y}{x})$ *στο επίπεδο; Να γραφούν στις πολικές συντεταγμένες.*
Λύση: Η $x = 1$ *παριστάνει προφανώς την ευθεία εκείνη που είναι παράλληλη στον άξονα των* y *(ο οποίος θυμίζουμε παριστάνεται από την εξίσωση* $x = 0$*), και είναι μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα θετικά από αυτόν. Μετατρέπεται εύκολα στις πολικές συντεταγμένες:*

$$x = 1 \Rightarrow \rho cos\phi = 1.$$

Για τη δεύτερη εξίσωση δεν μπορούμε και τόσο εύκολα να πούμε τι παριστάνει. Χρειάζεται πρώτα να τη μετατρέψουμε στις πολικές συντεταγμένες:

$$x^2 + y^2 = arctan^2(\frac{y}{x}) \Rightarrow \rho^2 = \phi^2 \Rightarrow \rho = \pm\phi,$$

και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι το ρ δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές καταλήγουμε στην εξίσωση $\rho = \phi$. Το γεωμετρικό νόημα της τελευταίας εξίσωσης είναι προφανές: όσο μεγαλώνει το ϕ από το 0 ως το 2π, τόσο μεγαλώνει και το ρ στο ίδιο διάστημα. Μιλάμε δηλαδή για μία σπείρα.

2.5 Παράδειγμα. *Τι παριστάνει η εξίσωση $\rho = 2cos\phi$; Να μετατραπεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες.*
Λύση: Μετατρέπουμε την εξίσωση στις καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\rho = 2cos\phi \Rightarrow \rho^2 = 2\rho cos\phi \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Δηλαδή πρόκειται για τον κύκλο κέντρου $(1,0)$ και ακτίνας 1 του επιπέδου.

2.2 Συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$

Έστω τώρα ένα σημείο του $\mathbb{R}^3$. Εκτός από τις, κλασικές, καρτεσιανές συντεταγμένες, αρκετά χρήσιμες αποδεικνύονται και οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές συντεταγμένες.

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες διαχωρίζουν τον $\mathbb{R}^3$ σε επίπεδα $z = c \in \mathbb{R}$, και σε κάθε τέτοιο επίπεδο εισάγουν τις πολικές συντεταγμένες που είδαμε πριν. Έτσι, είναι:

$$x = \rho cos\phi,\ y = \rho sin\phi,\ z = z,$$

ενώ αντιστρόφως:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \phi = arctan\frac{y}{x},\ z = z,$$

όπου για τη γωνία ϕ ισχύει η ίδια παρατήρηση σχετικά με τον $x = 0$ άξονα. Προφανώς, $\rho \in [0, +\infty),\ \phi \in [0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R}$.

2.6 Άσκηση. Θεωρούμε το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^3$ που απέχουν από τον άξονα των z απόσταση ίση με τη μονάδα. Ποιο γεωμετρικό σχήμα ορίζεται; Ποια η εξίσωσή του στις καρτεσιανές και ποια στις κυλινδρικές συντεταγμένες;

Οι σφαιρικές συντεταγμένες αποτελούν επίσης γενίκευση των πολικών συντεταγμένων του επιπέδου. Το σημείο (x, y, z) του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται $(\rho,\ \phi,\ \theta)$ στις σφαιρικές συντεταγμένες, όπου το ρ μετράει την απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων, το ϕ μετράει (όπως πάντα) τη γωνία που σχηματίζει η προβολή του διανύσματος στο $x - y$ επίπεδο με τον θετικό ημιάξονα των x, και το θ μετρά την «απόκλιση από την κατακόρυφο», τη γωνία δηλαδή που σχηματίζει το διάνυσμα με τον θετικό ημιάξονα των z. Έτσι, είναι $\rho \in [0, +\infty),\ \phi \in [0, 2\pi),\ \theta \in [0, \pi]$, ενώ, με λίγη τριγωνομετρία στα ορθογώνια τρίγωνα που παρατηρούμε στο σχήμα (4), είναι:

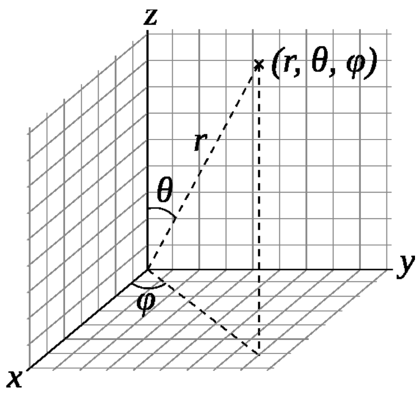
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \phi = arctan\tfrac{y}{x},\ \theta = arctan\tfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},$$

όπου, πρέπει να προσέχουμε εκτός από το ϕ και το θ, ο τύπος του οποίου δεν είναι καλώς ορισμένος όταν $z = 0$. Για $z = 0$ όμως, δηλαδή στο $x - y$ επίπεδο, η απόκλιση από την κατακόρυφο είναι προφανώς $\frac{\pi}{2}$.

Αντιστρόφως έχουμε:

$$x = \rho cos\phi sin\theta,\ y = \rho sin\phi sin\theta,\ z = \rho cos\theta.$$

2.7 Άσκηση.



Σχήμα 4: Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Ασκήσεις

1. Να γραφούν, στις πολικές συντεταγμένες, τα σημεία:

$$(0,1),(2,4),(0,3),(-2,0),(0,-2),$$

   και στις καρτεσιανές συντεταγμένες τα σημεία:

$$(\rho,\phi)=(1,\frac{\pi}{4}),(\rho,\phi)=(2,\frac{3\pi}{2}).$$

2. Τι παριστάνει η εξίσωση $x=-y+1$ στο επίπεδο; Να γραφεί στις πολικές συντεταγμένες. Το ίδιο για την εξίσωση $y=2$.

3. Ποια η εξίσωση της σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $\alpha>0$ στις καρτεσιανές και ποια στις σφαιρικές συντεταγμένες;

4. Να μετατραπούν στις καρτεσιανές συντεταγμένες του επιπέδου οι εξισώσεις $\rho=2sin\phi$ και $\rho=2+2cos\phi$, και να παρασταθούν γραφικώς.

3 Παραμετρικές μορφές καμπυλών

Εάν μας ζητήσουν να δώσουμε παραδείγματα καμπυλών του επιπέδου, αμέσως σκεφτόμαστε μια ευθεία, έναν κύκλο, ή μία παραβολή. Τα σημεία (x,y) που ανήκουν στις καμπύλες αυτές ικανοποιούν συγκεκριμένες εξισώσεις (βλέπε και σχήμα (5)).

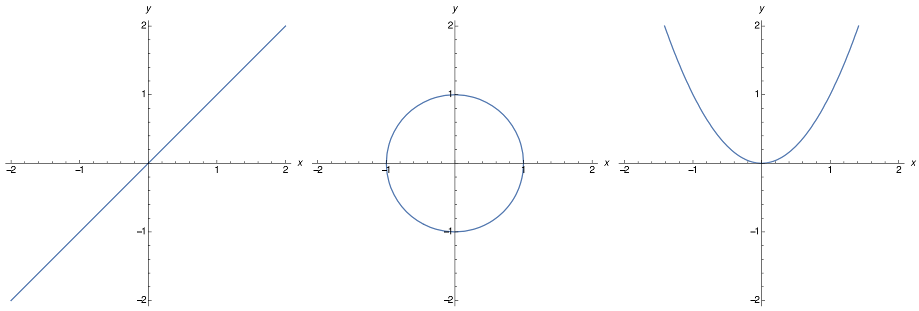
Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι μία καμπύλη του επιπέδου, στη γενική περίπτωση, παριστάνεται από μία εξίσωση της μορφής $f(x,y)=0$, όπου $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Υπάρχει όμως και ένας άλλος τρόπος για να παραστήσουμε μία καμπύλη του επιπέδου, ο οποίος προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με την παράσταση μιας καμπύλης με την εξίσωσή της.

3.1 Ορισμός. Καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ ονομάζουμε μία απεικόνιση της μορφής:

$$r:(a,b)\to\mathbb{R}^n,$$

όπου $-\infty<a\le b<+\infty$.



Σχήμα 5: Η ευθεία, με εξίσωση $y = x$, ο κύκλος, με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y = x^2$.

3.2 Σχόλιο. Ο τρόπος αυτός παράστασης μιας καμπύλης ονομάζεται «παραμετρική μορφή» της καμπύλης. Υπερτερεί της παράστασης μιας καμπύλης μέσω εξίσωσης, διότι μία εξίσωση παριστάνει μία καμπύλη (στη γενική περίπτωση) μόνο στις δύο διαστάσεις, ενώ η παραμετρική μορφή μπορεί να παραστήσει μια καμπύλη σε κάθε διάσταση.

Να τονίσουμε εδώ ότι μία καμπύλη μπορεί να έχει παραπάνω από μία παραμετρικές μορφές.

3.3 Παραδείγματα.

1. *Η ευθεία $y = x$ είναι μία καμπύλη του επιπέδου. Άρα παριστάνεται από μία καμπύλη της μορφής:*
$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (x(t), y(t)).$$
Για να βρούμε τον τύπο της καμπύλης αυτής, φροντίζουμε να ικανοποιήσουμε την εξίσωση $y = x$. Μία προφανής επιλογή είναι η $r(t) = (t, t)$.

2. *Ομοίως, η υπερβολή $y = x^2$ έχει παραμετρική μορφή την:*
$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t, t^2).$$

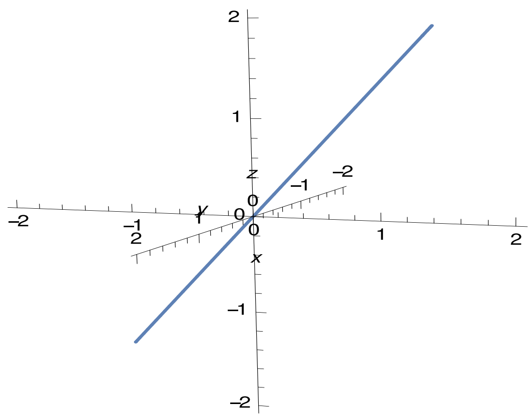
3. *Για τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, πρέπει να βρούμε δύο εξισώσεις $x(t),\ y(t)$ που να ικανοποιούν την εξίσωση αυτή. Έτσι, καταλήγουμε στην:*
$$r(t) = (\cos t, \sin t),$$
όπου για να κλείσει μία φορά ο κύκλος πρέπει $t \in [0, 2\pi]$.

Είπαμε ότι, εν αντιθέσει με μία εξίσωση που περιγράφει μία καμπύλη μόνο στις δύο διαστάσεις, μία παραμετρική μορφή παριστάνει καμπύλες και στον $\mathbb{R}^3$.

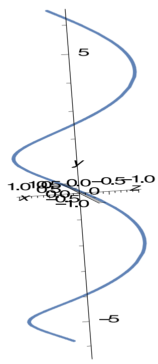
3.4 Παραδείγματα.

1. *Η $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (t, t, t)$, παριστάνει μία καμπύλη του $\mathbb{R}^3$. Την παριστάνουμε στο σχήμα (6).*

2. *Η $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, παριστάνει μία καμπύλη του $\mathbb{R}^3$. Την παριστάνουμε στο σχήμα (7).*



Σχήμα 6: Η ευθεία με παραμετρική μορφή $r(t) = (t, t, t)$.



Σχήμα 7: Η καμπύλη με παραμετρική μορφή $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Η παράγωγος μιας καμπύλης, δοσμένης σε παραμετρική μορφή, είναι απλά το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης αυτής (ή η ταχύτητά της, όπως λέγεται στη φυσική).

3.5 Παραδείγματα.

1. *Να βρεθεί το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $y = x^2$ στο σημείο $(2, 4)$.*
   Λύση: Παραμετρική μορφή της καμπύλης είναι η $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t, t^2)$. Για $t = t_0 = 2$ βρισκόμαστε στο σημείο $(2, 4)$, αφού:
   $$r(2) = (2, 4).$$
   Η παράγωγος της $r(t)$ είναι απλά η παράγωγος, δηλαδή η:
   $$r'(t) = (1, 2t),$$
   οπότε το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $(2, 4)$ είναι το $r'(2) = (1, 4)$.
   Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε και την παραμετρική μορφή της εφαπτόμενης ευθείας της παραβολής στο σημείο αυτό. Εϊναι η:
   $$\gamma(t) = r(t_0) + tr'(t_0) = (2, 4) + t(1, 4) = (2 + t, 4 + 4t).$$

2. *Να βρεθεί η παραμετρική μορφή της ευθείας που εφάπτεται στην έλικα*
   $$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ r(t) = (\cos t, \sin t, t)$$
   στο σημείο $(1, 0, 2\pi)$.
   Λύση: Το εφαπτόμενο διάνυσμα της έλικας είναι το $r'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ και ακόμα, για $t = t_0 = 2\pi$ έχουμε:
   $$r(t_0) = (1, 0, 2\pi),\ r'(t_0) = (0, 1, 1).$$
   Επομένως, παραμετρική μορφή της ζητούμενης εφαπτόμενης ευθείας είναι η:
   $$\gamma(t) = r(t_0) + tr'(t_0) = (1, 0, 2\pi) + t(0, 1, 1) = (1, t, 2\pi + t).$$

Πλέον μπορούμε και να υπολογίζουμε το μήκος του τμήματος μιας καμπύλης.

3.6 Ορισμός. Εάν $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ η παραμετρική μορφή μιας καμπύλης, μήκος της καμπύλης αυτής ονομάζουμε τον αριθμό:

$$l = \int_a^b \|r'(t)\| dt.$$

3.7 Παραδείγματα.

1. *Να υπολογίσετε το μήκος της ευθείας $y = x$ του επιπέδου, από το σημείο $(0, 0)$ ως το σημείο $(3, 3)$.*
   Λύση: Η παραμετρική μορφή αυτής της ευθείας είναι η $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ r(t) = (t, t)$, με εφαπτόμενο διάνυσμα το: $r'(t) = (1, 1)$, που έχει μέτρο:
   $$\|r'(t)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$
   Για $t = t_0 = 0$ είναι $r(0) = (0, 0)$ και για $t = t_1 = 3$ είναι $r(3) = (3, 3)$. Επομένως, το ζητούμενο μήκος ισούται με:
   $$\int_0^3 \sqrt{2} dt = 3\sqrt{2}.$$

2. *Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R>0$.*
   Λύση: Η παραμετρική μορφή του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R>0$ είναι η:
   $$r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\ r(t)=(R\cos t, R\sin t),$$
   με εφαπτόμενο διάνυσμα $r'(t)=(-R\sin t, R\cos t)$, που έχει μέτρο:
   $$\|r'(t)\|=\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}=R,$$
   άρα το ζητούμενο μήκος ισούται με:
   $$\int_0^{2\pi} Rdt=2\pi R.$$

Ασκήσεις

1. Βρείτε παραμετρικές μορφές για τις καμπύλες $x=1,\ y=0,\ y=x^3,\ x=y^2$.
2. Βρείτε τις ταχύτητες των προηγούμενων καμπυλών, όπως επίσης και τα μέτρα αυτών.
3. Επιβεβαιώστε ότι οι παραμετρικές μορφές $r_1(t)=(t,t),\ r_2(t)=(t^2,t^2)$, ικανοποιούν και οι δύο την εξίσωση $y=x$, άρα παριστάνουν την ίδια καμπύλη του επιπέδου (ποιά είναι αυτή;).
4. Βρείτε την εξίσωση που ικανοποιεί η καμπύλη με παραμετρική μορφή:
   $$r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ r(t)=(\cosh t,\sinh t).$$
5. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $r(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t)$, από το $(1,0)$ ως το $(0,1)$.

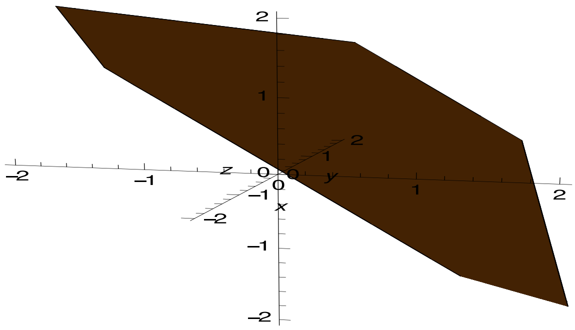
4 Επιφάνειες του $\mathbb{R}^3$

Στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, με τις καρτεσιανές συντεταγμένες x,y,z, μία εξίσωση της μορφής $f(x,y,z)=0$, όπου $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, παριστάνει, στην γενική περίπτωση, μια επιφάνεια.

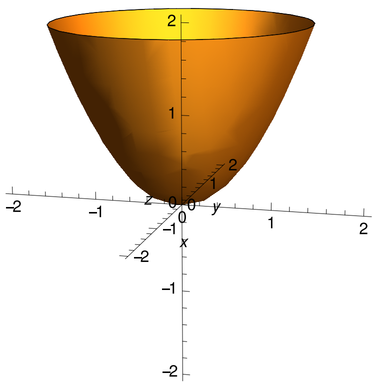
4.1 Παραδείγματα.

1. *Η εξίσωση $z=0$ παριστάνει το $x-y$ επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.*
2. *Η εξίσωση $x+y+z=1$ παριστάνει εκείνο το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από τα σημεία $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$. Παριστάνεται στο σχήμα (8).*
3. *Η εξίσωση $z=x^2+y^2$ παριστάνει εκείνη την επιφάνεια, που είναι γνωστή ως παραβολοειδές (σχήμα (9)).*
4. *Η εξίσωση $x^2+y^2+z^2=1$ παριστάνει τη σφαίρα, κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας 1 (10).*

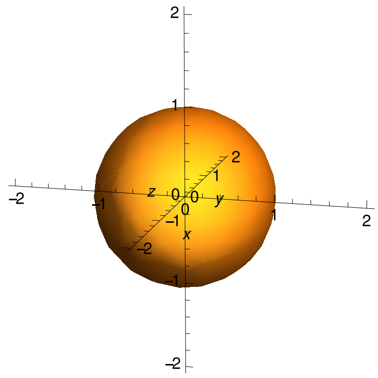
Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, προτιμούμε τις παραμετρικές μορφές των επιφανειών από τις εξισώσεις τους.



Σχήμα 8: Το επίπεδο, με εξίσωση $x + y + z = 1$.



Σχήμα 9: Το παραβολοειδές, με εξίσωση $z = x^2 + y^2$.



Σχήμα 10: Η σφαίρα, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.2 Ορισμός. Μία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ είναι μια απεικόνιση της μορφής:

$$r : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3.$$

4.3 Παραδείγματα.

1. *Η παραμετρική μορφή του επιπέδου $z = 0$ είναι η:*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u, v) = (u, v, 0).$$

2. *Η παραμετρική μορφή του επιπέδου $x + y + z = 1$ είναι η:*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u, v) = (u, v, 1 - u - v).$$

3. *Η παραμετρική μορφή του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ είναι η:*

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

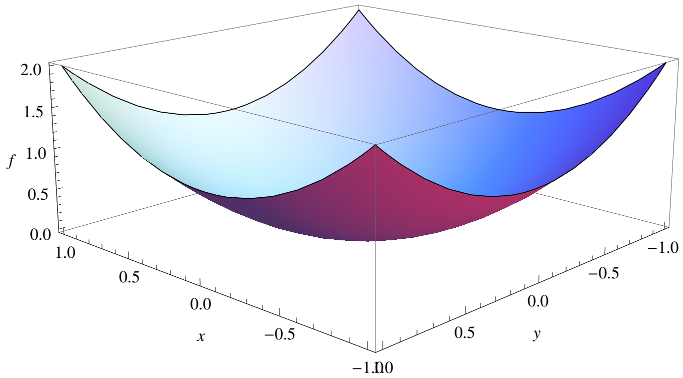
4. *Η παραμετρική μορφή της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ είναι η:*

$$r(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v).$$

Ασκήσεις

1. Εξετάστε αν το σημείο $(1, 1, 1)$ ανήκει στη σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 1.

2. Βρείτε την παραμετρική μορφή του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$.



Σχήμα 11: Η γραφική παράσταση της $f(x,y) = x^2 + y^2$.

5 Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Μία συνάρτηση ονομάζεται «πολλών μεταβλητών» όταν το πεδίο ορισμού της, ή το σύνολο τιμών της (ή και τα δύο), δεν ταυτίζεται με το σύνολο $\mathbb{R}$, αλλά με κάποιον ευκλείδειο χώρο μεγαλύτερης διάστασης. Οι συναρτήσεις αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

5.1 Πρώτη κατηγορία: Βαθμωτές Συναρτήσεις

Βαθμωτές ονομάζονται εκείνες οι συναρτήσεις το σύνολο τιμών των οποίων είναι το $\mathbb{R}$, είναι δηλαδή της μορφής $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η γραφική τους παράσταση είναι έτσι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^{n+1}$.

5.1 Παράδειγμα. *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^2 + y^2$. Είναι προφανώς βαθμωτή συνάρτηση, η γραφική της παράσταση είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^3$, και απεικονίζεται στο σχήμα (11).*

5.2 Δεύτερη κατηγορία: Διανυσματικές Συναρτήσεις

Διανυσματικές ονομάζονται εκείνες οι συναρτήσεις το σύνολο τιμών των οποίων δεν είναι το $\mathbb{R}$, είναι δηλαδή της μορφής $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m > 1$. Η γραφική τους παράσταση είναι έτσι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^{n+m}$.

5.2 Παράδειγμα. *Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, με τύπο:*

$$f(x,y,z) = (x^2 + y, 2xyz, e^{xy} + z^2, cosz + y),$$

είναι διανυσματική συνάρτηση. Η γραφική της παράσταση είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \approx \mathbb{R}^7$, οπότε δεν μπορούμε να την απεικονίσουμε στο χαρτί (εν τούτοις υπάρχει!).

Ειδική κατηγορία διανυσματικών συναρτήσεων είναι τα διανυσματικά πεδία. Πρόκειται για εκείνες τις διανυσματικές συναρτήσεις το σύνολο τιμών των οποίων είναι το ίδιο με το πεδίο ορισμού τους.

5.3 Παράδειγμα. *Η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με τύπο $f(x, y) = (x^2, x + y)$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^2$ (μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση;).*

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις είναι ένα 'μπουκέτο' από βαθμωτές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, το διανυσματικό πεδίο του προηγούμενου παραδείγματος αποτελείται από τις βαθμωτές συναρτήσεις $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζονται ως $f_1(x, y) = x^2,\ f_2(x, y) = x + y$, υπό την έννοια ότι $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Έτσι καταλαβαίνουμε ότι το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι το «μπουκέτο» των ορίων των βαθμωτών συναρτήσεων που την αποτελούν. Ομοίως, η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της ισοδυναμεί με τη συνέχεια, στο ίδιο σημείο, των βαθμωτών συναρτήσεων που την συναποτελούν. Αυτός είναι και ο λόγος που, στη μελέτη ορίων και συνέχειας συναρτήσεων, επικεντρωνόμαστε συνήθως σε βαθμωτές συναρτήσεις.

Ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι βαθμωτές και ποιες διανυσματικές; Για κάθε μία από αυτές γράψτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους.

$$f(x) = (x, x^2),\ f(x, y) = (x^2 \cos(y), xy),\ f(x, y, z) = xy\overrightarrow{i} + e^x yzxy\overrightarrow{j}.$$

6 Παραγωγισιμότητα Βαθμωτών Συναρτήσεων

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Μπορούμε να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση αυτή ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή επιθυμούμε· για να το πετύχουμε αυτό, επιτρέπουμε να μεταβάλλεται μόνο η μεταβλητή εκείνη ως προς την οποία παραγωγίζουμε.

6.1 Ορισμός. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ x_0 = (x_{01}, x_{02}, .., x_{0n})$. Μερική παράγωγο της f ως προς x_i στο x_0 ονομάζουμε, αν υπάρχει, το παρακάτω όριο:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{01}, x_{02}, .., x_{0i-1}, x_{0i}+h, x_{0i+1}, .., x_{n0}) - f(x_{01}, x_{02}, .., x_{0i-1}, x_{0i}, x_{0i+1}, .., x_{n0})}{h}.$$

Για να παραγωγίσουμε μια συνάρτηση ως προς κάποια μεταβλητή της επομένως, θεωρούμε όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές και εφαρμόζουμε τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

6.2 Παράδειγμα. *Αν $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = xyz + y^2 z$, τότε:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + 2yz,\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy + y^2.$$

Εν τούτοις, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε πάντα τους κανόνες παραγώγισης, εν αντιθέσει με τον ορισμό.

6.3 Παράδειγμα. *Δίνεται η συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *με τύπο:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{αν } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους της f *στο* $(0,0)$.
Λύση:Σύμφωνα με τον ορισμό, θα είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1,$$

και:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0.$$

6.4 Σχόλιο. Ο υπολογισμός μερικών παραγώγων λοιπόν ισοδυναμεί με τον υπολογισμό ορίου μιας μεταβλητής.

6.5 Σχόλιο. Το να έχει μια συνάρτηση μερικές παραγώγους σε ένα σημείο δεν σχετίζεται με τη συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Μια συνάρτηση μπορεί κάλλιστα να διαθέτει μερικές παραγώγους σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, και ταυτόχρονα να μην είναι συνεχής εκεί.

Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ορίζονται ως οι μερικές παράγωγοι των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης. Δηλαδή, αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, είναι:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right).$$

6.6 Παράδειγμα. *Έστω* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *με τύπο:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \text{αν } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την $f_{xx}(x,y)$.
Λύση: Είναι:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0,$$

άρα:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{αν } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Έτσι:

$$f_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0+h,0)-f_x(0,0)}{h} = 0,$$

συνεπώς:

$$f_{xx}(x,y) = \begin{cases} \frac{-2y^4(x^2+y^2)^2+8x^2y^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} & \text{αν } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

6.7 Άσκηση. Για την παραπάνω f, υπολογίστε τις:

$$f_{yy}(x,y),\ f_{xy}(x,y),\ f_{yx}(x,y).$$

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης μπορεί να είναι συνεχείς συναρτήσεις, ή όχι, όπως και οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης. Αν λοιπόν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, θα λέμε ότι η f είναι κλάσης C^0 αν είναι συνεχής παντού, κλάσης C^1 αν είναι συνεχής, έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, οι οποίες είναι συνεχείς παντού, κλάσης C^2 εάν είναι συνεχείς, έχει μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης και όλες οι παράγωγοι αυτές είναι συνεχείς παντού. Συνεχίζοντας έτσι, ορίζουμε την κλάση C^∞ ως την κλάση των συνεχών συναρτήσεων, οι οποίες έχουν μερικές παραγώγους κάθε τάξης, και όλες είναι συνεχείς παντού.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε όλες τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των παρακάτω βαθμωτών συναρτήσεων δύο μεταβλητών.

$$f(x,y)=x^3y-e^y,\ g(x,y)=\cos(2x)+\sin(xy),\ h(x,y)=\frac{1}{xy}+\ln(x^2y).$$

2. Υπολογίστε όλες τις μερικές παραγώγους, μέχρι και δεύτερης τάξης, της συνάρτησης:

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2y^3+xz^2+\frac{1}{xy}.$$

7 Παράγωγος Κατά Κατεύθυνση

Ας επιστρέψουμε στις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης μια βαθμωτής συνάρτησης. Αν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, τότε η $f_x(x,y)$ παριστάνει τον ρυθμό μεταβολής της $f(x,y)$ ως προς την κατεύθυνση του άξονα των x, και πιο συγκεκριμένα, ως προς την κατεύθυνση που υποδεικνύει το διάνυσμα $(1,0)$. Ομοίως, η $f_y(x,y)$ παριστάνει τον ρυθμό μεταβολής της $f(x,y)$ ως προς την κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα $(0,1)$.

Τα διανύσματα $(1,0)$ και $(0,1)$ δεν είναι τα μοναδικά διανύσματα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ ορίζει μία κατεύθυνση του επιπέδου, και μάλιστα εάν επιλέξουμε διανύσματα μοναδιαίου μέτρου, τότε η επιλογή διανύσματος ανά κατεύθυνση είναι μοναδική. Έτσι, ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση του πεδίου ορισμού της.

7.1 Ορισμός. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $v\in\mathbb{R}^n$, με $\|v\|=1$. Παράγωγο της f στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}^n$, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος v, ονομάζουμε, αν υπάρχει, το:

$$D_vf(x_0)=\lim_{h\to0}\tfrac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h}.$$

7.2 Παράδειγμα. *Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2y+z$. Να υπολογιστεί, στο σημείο $(1,1,1)$, η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(1,0,0)$.*
Λύση: Εξ ορισμού, είναι:

$$D_{(1,0,0)}f(1,1,1) = \underset{h\to 0}{lim}\tfrac{f((1,1,1)+h(1,0,0))-f(1,1,1)}{h} =$$
$$= \underset{h\to 0}{lim}\tfrac{f(1+h,1,1)-f(1,1,1)}{h} = \underset{h\to 0}{lim}\tfrac{(1+h)^2+1-2}{h} = 2.$$

Πράγματι, η παράγωγος της f ως προς το διάνυσμα $(1,0,0)$ ισούται προφανώς με την $f_x(x,y,z)$, η τιμή της οποίας στο σημείο $(1,1,1)$ ισούται με δύο.

Βέβαια, δεν απαιτείται πάντοτε η εφαρμογή του ορισμού για τον υπολογισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση.

7.3 Πρόταση. *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $v\in\mathbb{R}^n$, με $\|v\|=1$. Εάν η f είναι κλάσης C^1 στο $x_0\in\mathbb{R}^n$, τότε:*

$$D_v f(x_0) = (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0),..,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))\cdot v.$$

7.4 Παράδειγμα. *Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε, με τη βοήθεια του ορισμού, την παράγωγο της $f(x,y,z)=x^2y+z$, στο σημείο $(1,1,1)$, κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(1,0,0)$. Θα την υπολογίσουμε και πάλι τώρα, με έναν δεύτερο τρόπο. Αφού:*

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)) = (2xy, x^2, 1),$$

έχουμε:

$$D_{(1,0,0)}f(1,1,1) = (2,1,1)\cdot(1,0,0) = 2.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις ζητούμενες παραγώγους κατά κατεύθυνση.

   (α′) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+yz$, στο σημείο $(1,2,0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(1,2,3)$.

   (β′) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+xy$, στο σημείο $(1,2)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(2,3)$.

   (γ′) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2z+y^3z$, στο σημείο $(1,1,1)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(1,0,1)$.

   (δ′) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^3$, στο σημείο $(1,0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(1,1)$.

8 Κλίση, Απόκλιση, Στροβιλισμός

Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιον συναρτησιακό χώρο ονομάζεται τελεστής. Οι πιο διάσημοι τελεστές είναι αυτοί της κλίσης, της απόκλισης και του στροβιλισμού. Σε ό,τι ακολουθεί, οι συναρτήσεις θεωρούνται κλάσης C^r, όπου r αρκούντως μεγάλο για τις κατασκευές που περιγράφονται.

8.1 Κλίση Βαθμωτής Συνάρτησης

8.1 Ορισμός. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Κλίση της f ονομάζεται το διανυσματικό πεδίο ∇f ή $gradf:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, με τύπο:

$$\nabla f(x_1,..x_n)=(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,..,x_n),\tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,..,x_n),..,\tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,..,x_n)).$$

8.2 Παράδειγμα. *Έστω $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R},\ f(x,y,z,w)=x^2y+zw^3$. Να υπολογίσετε την κλίση της f.*
Λύση: Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης. Είναι:

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,w)=2xy,\ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z,w)=x^2,$$
$$\tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,w)=w^3,\ \tfrac{\partial f}{\partial w}(x,y,z,w)=3zw^2.$$

Άρα, η κλίση της f είναι το διανυσματικό πεδίο $\nabla f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, με τύπο:

$$\nabla f(x,y,z,w)=(2xy,x^2,w^3,3zw^2).$$

8.2 Απόκλιση Διανυσματικού Πεδίου

8.3 Ορισμός. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, με τύπο:

$$f(x_1,..x_n)=(f_1(x_1,..,x_n),..,f_n(x_1,..,x_n)).$$

Απόκλιση του διανυσματικού αυτού πεδίου ονομάζουμε την βαθμωτή συνάρτηση $\nabla\cdot f$ ή $divf:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, με τύπο:

$$\nabla\cdot f(x_1,..x_n)=\tfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,..,x_n)+\tfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,..,x_n)+...+\tfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_1,..,x_n).$$

8.4 Παράδειγμα. *Έστω $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, με τύπο:*

$$f(x,y,z,w)=(x^2y+z,y^2z+w,z^2w+x,w^2x+y).$$

Να υπολογιστεί η απόκλισή του.
Λύση: Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\tfrac{\partial}{\partial x}(x^2y+z)=2xy,\ \tfrac{\partial}{\partial y}(y^2z+w)=2yz,$$
$$\tfrac{\partial}{\partial z}(z^2w+x)=2zw,\ \tfrac{\partial}{\partial w}(w^2x+y)=2wx.$$

Έτσι, η απόκλιση του διανυσματικού αυτού πεδίου είναι η βαθμωτή συνάρτηση $\nabla\cdot f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, με τύπο $\nabla\cdot f(x,y,z,w)=2xy+2yz+2zw+2wx$.

8.5 Σχόλιο. Ένα διανυσματικό πεδίο, η απόκλιση του οποίου είναι η μηδενική συνάρτηση, ονομάζεται σωληνοειδές.

8.3 Στροβιλισμός Διανυσματικού Πεδίου

Καθώς ο τύπος του στροβιλισμού είναι κάπως πολύπλοκος στις διαστάσεις τις μεγαλύτερες του τρία, δίνουμε τον ορισμό για διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^3$.

8.6 Ορισμός. Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, με τύπο:

$$f(x,y,z)=(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)).$$

Στροβιλισμός του f ονομάζεται το διανυσματικό πεδίο $\nabla \times f$, ή $curlf$, ή $rotf$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, με τύπο:

$$\nabla \times f(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) & f_2(x,y,z) & f_3(x,y,z) \end{vmatrix}.$$

8.7 Παράδειγμα. *Να υπολογίσετε τον στροβιλισμό του* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *με τύπο* $f(x,y,z) = (x^2y, xy+z, z^2)$.
Λύση: Πρέπει να υπολογίσουμε την, συμβολική, ορίζουσα:

$$\nabla \times f(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xy+z & z^2 \end{vmatrix}.$$

Την αναπτύσσουμε, κανονικά, ως προς την πρώτη σειρά:

$$\nabla \times f(x,y,z) = i\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy+z & z^2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & z^2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2y & xy+z \end{vmatrix} =$$

$= i(\frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy+z)) - j(\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y)) + k(\frac{\partial}{\partial x}(xy+z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)) =$
$= i(0-1) - j(0-0) + k(y-x^2) = (-1, 0, y-x^2)$,
οπότε, ο στροβιλισμός του διανυσματικού αυτού πεδίου είναι το διανυσματικό πεδίο $\nabla \times f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *με τύπο* $\nabla \times f(x,y,z) = (-1, 0, y-x^2)$.

8.8 Σχόλιο.

- Αν πρέπει να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό ενός διανυσματικού πεδίου του επιπέδου, π.χ. του

  $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

  το «επεκτείνουμε» τετριμμένα στον $\mathbb{R}^3$, θέτουμε δηλαδή:

  $$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), 0),$$

  και έπειτα προχωρούμε όπως στο παράδειγμα.
- Ένα διανυσματικό πεδίο με μηδενικό στροβιλισμό ονομάζεται αστρόβιλο, ή διατηρητικό.
- Τα αστρόβιλα διανυσματικά πεδία ισούνται με την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης. Στις εφαρμογές, η βαθμωτή αυτή συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση δυναμικού του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου.

Ασκήσεις

1. Να βρείτε τις κλίσεις των συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = e^{xyz}$ και $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = cos(xy) - 2xy$.
2. Να υπολογίσετε τις αποκλίσεις των παρακάτω διανυσματικών πεδίων.

   $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (2xy + e^x, cos(xy) + y),$$

   $$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = (xyz + ln(xy) + \sqrt{z}, x+y+z, z^2x + 2)$$

   Ποιο από αυτά είναι σωληνοειδές;

3. Να υπολογίσετε τους στροβιλισμούς των διανυσματικών πεδίων της προηγούμενης άσκησης.

Αναφορές

[1] Marsden J A and Tromba J E, «Διανυσματικός Λογισμός», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018.