Μιγαδική Ανάλυση

Σ. Αναστασίου και Β. Βλάχου

Ασκήσεις στις εκτιμήσεις Cauchy και το θεώρημα Liouville

1. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια, για την οποία είναι $|f(z)| < |z|^4, \ \forall z \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(z) = cz^4$.

2. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση, τέτοια ώστε:

$$|f(z)| < |z|^2 + |z|^3, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

   Να δείξετε ότι $f(z) = az^2 + bz^3$ όπου $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a|, |b| < 1$.

3. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια, με $|f(z)| \leq c|z|^\lambda + d, \ z \in \mathbb{C}, \ c, d, \lambda > 0$. Να δείξετε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ λ.

4. Η $f(z)$ είναι ακέραια και $|f(z)| > 2, \ \forall z \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι είναι σταθερή.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ f(z) = \cos(z)$, δεν είναι φραγμένη.

6. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια με $f(0) = 0$ και $Ref(z) \to 0, \quad z \to \infty$. Να αποδείξετε ότι $f(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

7. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια, με $|f(z)| \leq \log|z|, \quad |z| > 1$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

8. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ακέραια συνάρτηση $f(z)$ που ικανοποιεί τις σχέσεις $|f(z)| < |e^z|, \ \forall z \in \mathbb{C}$ και $f(0) = i$.

9. Η ακέραια συνάρτηση $f(z)$ ικανοποιεί την ανίσωση $|f(z)| < e^{ax}, \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(z) = ce^z$.

10. Η συνάρτηση $f(z)$ είναι ακέραια και ικανοποιεί την ανίσωση $Re(f(z)) < 5, \ \forall z \in \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι είναι σταθερή.

11. Να βρεθεί το σύνολο των ακέραιων συναρτήσεων $f(z)$ που ικανοποιούν την ανίσωση $|f^{(4)}| < 5$.