

Μιγαδική Ανάλυση

Σ. Αναστασίου και Β.Βλάχου

Ασκήσεις στις δυναμοσειρές

1. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{2n}} z^n, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n, \quad (iv) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

2. Εάν δύο δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ έχουν ακτίνες σύγκλισης R_1 και R_2 αντίστοιχα, ισχύει ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n z^n$ είναι $R_1 R_2$;

3. Να βρεθεί η συνάρτηση που παριστάνει καθεμιά από τις παρακάτω δυναμοσειρές, καθώς επίσης και ο δίσκος που ισχύει η παράσταση αυτή.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad (ii) \sum_{n=5}^{\infty} n z^n, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n, \quad (iv) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^n.$$

4. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω σειρών.

$$(i) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2i)^{3n+4}}{n! 3^{4n}}, \quad (ii) \sum_{n=0}^{+\infty} (3n^2+2n) \frac{(1+i)^n}{3^n}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+i)^n}, \quad (iv) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(e+i)^n}.$$

5. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μηδέν των συναρτήσεων που ακολουθούν, καθώς επίσης και ο μεγαλύτερος δίσκος στον οποίο ισχύει το ανάπτυγμα αυτό.

$$(i) f(z) = \frac{1}{1-z^2}, \quad (ii) g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad (iii) h(z) = \text{Log}(1+z^2).$$

6. Να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μηδέν των συναρτήσεων που ακολουθούν και ο μεγαλύτερος δίσκος εντός του οποίου ισχύει το ανάπτυγμα.

$$(i) \frac{1}{3-2z}, \quad (ii) \frac{z}{z^3+1}, \quad (iii) \frac{1}{(1-z)(z+2)}, \quad (iv) \frac{z^2}{(4-z)^2}, \quad (v) \frac{1}{(z^2-9)(z^2-1)}.$$

7. Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ μια δυναμοσειρά που συγκλίνει για κάθε z φυσικό αριθμό.

Να αποδείξετε ότι έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης.