Πραγματική Ανάλυση

1^o Φυλλάδιο Ασκήσεων:
Πραγματικοί Αριθμοί και Ακολουθίες

Σταύρος Αναστασίου

1. Δείξτε ότι $\forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\frac{1}{4^n} < \epsilon$.

2. Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{\frac{1}{2+n},\ n \in \mathbb{N}\},\ B = \{3 + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

   Δείξτε ότι είναι άνω και κάτω φραγμένα και υπολογίστε τα sup,inf αυτών. Υπάρχουν τα min,max των συνόλων αυτών;

3. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x,\ x^2 + x < 2021\}$ είναι μη κενό και φραγμένο. Έπειτα, κάνοντας χρήση του αξιώματος της πληρότητας, να δείξετε ότι: $(supA)^2 + supA = 2021$.

4. Εάν $A, B \subset \mathbb{R}$ μη κενά και φραγμένα, δείξτε ότι το $A \cup B$ διαθέτει supremum. Έπειτα, εκφράστε το $sup(A \cup B)$ συναρτήσει των $supA,\ supB$.

5. Δείξτε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, ότι η ακολουθία a_n, που ικανοποιεί την σχέση $a_{n+1} = a_n + 2$, δεν συγκλίνει.

6. Αν $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$ και $b_n = 1/n$, να δείξετε ότι $a_n < b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Συγκλίνει η a_n;

7. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n+2}{4^n}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη.

8. Δείξτε ότι η ακολουθία:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{3n},$$

   συγκλίνει.

9. Εξετάστε, ως προς την σύγκλιση, τις ακολουθίες:

$$(i)\ a_n = \frac{4^n n!}{n^n} \qquad (ii)\ b_n = (\sqrt[n]{2} - 1)^n \qquad (iii)\ c_n = (1 + \frac{3}{n})^n$$

$$(iv)\ d_n = (-1)^n + \frac{2}{n} \qquad (v)\ g_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n} \qquad (vi)\ k_n = \sqrt[n]{n^2+1}.$$

10. Η ακολουθία a_n συγκλίνει. Δείξτε ότι $\exists M > 0$ τέτοιο, ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ να είναι:

$$|\frac{a_1 + .. + a_n}{n}| < M.$$

11. Αν $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την ακολουθία $a_n = x^n$ και θέτουμε $L = \lim a_n$. Εάν $n = m+1$, έχουμε:

$$L = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{m+1\to\infty} x^{m+1} = \lim_{m\to\infty} x \cdot x^m = x \cdot \lim_{m\to\infty} x^m = x \cdot \lim_{n\to\infty} x^n = x \cdot L,$$

άρα είτε $x = 1$, είτε $L = 0$. Δηλαδή, $\forall x \neq 1,\ x^n \to 0$.

Είναι σωστός ο παραπάνω συλλογισμός; Εάν όχι, βρείτε το λάθος.

12. Έστω η ακολουθία πραγματικών αριθμών a_n, για την οποία γνωρίζουμε ότι συγκλίνει και ότι $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = a_n$. Δείξτε ότι η a_n είναι σταθερή.