

Πραγματική Ανάλυση

2^ο Φυλλάδιο Ασκήσεων:
Υπακολουθίες, \liminf και \limsup

Σταύρος Αναστασίου

1. Να δείξετε ότι η ακολουθία:

$$a_n = \frac{(n^2 + 20n + 35) \sin(n^3)}{n^2 + n + 1}$$

διαθέτει μία τουλάχιστον συγκλίνουσα υπακολουθία.

2. Δώστε παράδειγμα μη φραγμένης ακολουθίας, η οποία να διαθέτει φραγμένη υπακολουθία.
3. Βρείτε τα \liminf και \limsup των παρακάτω ακολουθιών.

$$(i) a_n = (-1)^n \quad (ii) b_n = \sin \frac{n\pi}{4} \quad (iii) c_n = \frac{n^3 + 2n + 1}{3n^3 + 2}$$
$$(iv) d_n = (-1)^n + \frac{2}{n} \quad (v) g_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \quad (vi) k_n = \sqrt[n]{n^2 + 1}.$$

4. Να δείξετε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε την πληρότητα κατά Cauchy του \mathbb{R} , ότι εάν μια ακολουθία του Cauchy έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε είναι και η ίδια συγκλίνουσα.
5. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι εάν η a_n είναι ακολουθία του Cauchy τότε και η a_n^2 είναι ακολουθία του Cauchy.
6. Να δείξετε ότι εάν οι a_n, b_n είναι ακολουθίες του Cauchy τότε και η $|a_n - b_n|$ είναι ακολουθία του Cauchy.
7. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι η ακολουθία:

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

είναι ακολουθία του Cauchy.

8. Έστω a_n φραγμένη ακολουθία. Αν $X = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a_n \text{ για άπειρους } n \in \mathbb{N}\}$, να δείξετε ότι $\sup X = \limsup a_n$.