Πραγματική Ανάλυση

3^o Φυλλάδιο Ασκήσεων:
Σειρές Πραγματικών Αριθμών

Σταύρος Αναστασίου

1. Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{1+n}$.

2. Θεωρούμε το άπειρο άθροισμα $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ Προσέξτε ότι:
$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 2 + S,$$
οπότε $S = 2$. Είναι σωστός αυτός ο συλλογισμός;

   Εφαρμόζουμε τον ίδιο συλλογισμό για τη σειρά $T = 1+2+4+8+16+....$ Προσέξτε ότι:
$$2T = 2 + 4 + 8 + 16 + ... = T - 1,$$
επομένως $T = -1$. Μπορεί να είναι σωστό αυτό; Πού έγκειται το λάθος;

3. Υπολογίστε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ και δείξτε, μέσω της ακολουθίας αυτής, ότι η σειρά δεν συγκλίνει.

4. Εξετάστε, ως προς τη σύγκλιση, τις παρακάτω σειρές.

(α′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$	(δ′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$	(ζ′) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1/4}}$
(β′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$	(ε′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$	(η′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$
(γ′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^4+12n}$	(ϛ′) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}(\ln n)^2}$	(ϑ′) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$

5. Έστω a_n ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι, για κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών b_n, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ και μάλιστα απολύτως.

6. Θεωρούμε τη σειρά $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - .....$ Για τη σειρά αυτή είναι:

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + ...) = 1 - S,$$

οπότε $S = 1/2$. Επίσης:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...,$$

οπότε $S = 0$ και ακόμα:

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + ... = 1 + 0 + 0 + 0 + ...,$$

δηλαδή $S = 1$. Ποιο από όλα τα αποτελέσματα είναι σωστό;

7. Γράψτε την συνέλιξη της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ με τον εαυτό της.

8. Για κάθε πραγματικό αριθμό x, ορίζουμε τις «πολυωνυμικές εκφράσεις» $p_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $p_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, όπου υποθέτουμε ότι $a_n = 0$ και $b_k = 0$ για άπειρες τιμές των n, k. Βρείτε τον συντελεστή του όρου x^4 του γινομένου $p_1(x)p_2(x)$.