

## Πραγματική Ανάλυση

4<sup>ο</sup> Φυλλάδιο Ασκήσεων:  
Μετρικοί Χώροι: Παραδείγματα

Σταύρος Αναστασίου

1. Βρείτε τα  $\inf(A)$ ,  $\sup(A)$ , όπου  $A = \{\frac{x}{1+|x|}, x \in \mathbb{R}\}$ . Έπειτα δείξτε ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ,  $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$  είναι 1-1.

2. Εξετάστε εάν τα ζεύγη  $(\mathbb{R}, d)$ ,  $(\mathbb{R}^3, \rho)$ ,  $(C[0, 1], g)$  είναι μετρικοί χώροι, όπου:

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = e^x - e^y,$$

$$\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x_1 - y_1|, x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3),$$

$$g : C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(f, h) = |f(\frac{1}{2}) - h(\frac{1}{2})|.$$

3. Υπάρχει νόρμα του  $\mathbb{R}$  που να επάγει την μετρική  $d_1$  του προηγούμενου παραδείγματος;

4. Εξετάστε εάν η ακολουθία  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ανήκει στον χώρο  $l_1$  ή στον χώρο  $l_2$ . Έπειτα, βρείτε, την απόστασή της από την μηδενική ακολουθία  $b_n = 0$  του χώρου που ανήκει.

5. Να δείξετε ότι, εάν το ζεύγος  $(X, d)$  αποτελεί μετρικό χώρο, τότε και το ζεύγος  $(X, \rho)$ , όπου  $\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ , αποτελεί μετρικό χώρο.

6. Να δείξετε ότι ο χώρος  $l_\infty^2$  προκύπτει θεωρώντας το όριο, για  $p \rightarrow +\infty$ , των χώρων  $l_p^2$  (γράψτε την  $p$ -νόρμα για ένα στοιχείο του  $\mathbb{R}^2$  και υπολογίστε το ζητούμενο όριο).

7. Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος. Να δείξετε ότι  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ ,  $\forall x, y, z \in X$ .

8. Να δείξετε ότι, εάν  $(X, d)$  μετρικός χώρος, τότε  $\text{diam}(X) = 0$  αν, και μόνο αν,  $X = \emptyset$  ή το  $X$  είναι μονοσύνολο.

9. Να δείξετε ότι ο  $l_2$  είναι γνήσιο υποσύνολο του  $l_3$ .

10. Θεωρούμε τον κύκλο κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας 1 του ευκλείδειου επιπέδου, δηλαδή τον  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\|_2 = 1\}$ . Εάν  $x, y \in \mathbb{S}^1$ , ορίζουμε  $\rho(x, y)$  να είναι η κυρτή γωνία που ορίζεται από τα σημεία  $x, O, y$ . Να δείξετε ότι  $\|x - y\|_2 = 2 \sin \frac{\rho(x, y)}{2}$  και να εξετάσετε εάν η  $\rho$  ορίζει μετρική πάνω στον  $\mathbb{S}^1$ .