Πραγματική Ανάλυση

5^o Φυλλάδιο Ασκήσεων:
Μετρικοί Χώροι: Ακολουθίες και Συνέχεια

Σταύρος Αναστασίου

1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς k για τους οποίους το ζεύγος (X, kd) είναι και πάλι μετρικός χώρος.

2. Στον $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(0, 1, 2)$. Υπολογίστε την απόσταση των δύο αυτών σημείων στις παρακάτω περιπτώσεις.

   - Ο $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με την d_1 μετρική, που επάγεται από την 1–νόρμα.
   - Ο $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με την d_2 μετρική, που επάγεται από την 2–νόρμα.
   - Ο $\mathbb{R}^3$ είναι εφοδιασμένος με την d_∞ μετρική.
   - Ο $\mathbb{R}^3$ θεωρείται ως ο χώρος γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, όπου ο πρώτος παράγοντας είναι εφοδιασμένος με την d_1 μετρική, ο δεύτερος με την d_2 και ο τρίτος με την d_∞.

3. Στον $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την sup–μετρική να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ότι η $(\frac{1}{n}, 1)$ συγκλίνει στο $(0, 1)$.

4. Θεωρούμε τον χώρο $(\mathbb{R}^+, d)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, όπου $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ με $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = n$ είναι ακολουθία του Cauchy και να εξετάσετε εάν συγκλίνει. Έπειτα, κάντε το ίδιο για την $b_n = \frac{1}{n}$.

5. Εάν (X_1, d_1), (X_2, d_2) δύο μετρικοί χώροι, εφοδιάζουμε τον χώρο $X = X_1 \times X_2$ με τη μετρική γινόμενο $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$, όπου $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Να δείξετε ότι η d είναι όντως μετρική.

6. Θεωρούμε τον $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική (που επάγεται από την απόλυτη τιμή) και τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{για } x \leq 1 \\ x + 1, & \text{για } x > 1 \end{cases}.$$

   Είναι συνεχής αυτή η συνάρτηση; Βρείτε ακολουθία x_n που να συγκλίνει στο 1 και η ακολουθία $f(x_n)$ δεν συγκλίνει στο $f(1)$.

7. Θεωρούμε τον μετρικό χώρο (X, d) και, εάν $x_0 \in X$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, x_0)$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής (στον $\mathbb{R}$ θεωρούμε την συνήθη μετρική $|\cdot|$).

8. Εάν $a \in [0,1]$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathcal{E}_a : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{E}_a(f) = f(a)$. Να δείξετε ότι εάν το πεδίο ορισμού της $\mathcal{E}_a$ εφοδιαστεί με την sup–μετρική και το σύνολο τιμών με την συνήθη μετρική, η $\mathcal{E}_a$ καθίσταται συνεχής.