

## Πραγματική Ανάλυση

6<sup>ο</sup> Φυλλάδιο Ασκήσεων:  
Μετρικοί Χώροι: Τοπολογικές Έννοιες

Σταύρος Αναστασίου

1. Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $F, G \subseteq X$ . Να δείξετε ότι εάν το  $F$  είναι κλειστό και το  $G$  είναι ανοικτό, τότε το  $G \setminus F$  είναι ανοικτό.
2. Να δείξετε ότι κάθε υποσύνολο ενός μετρικού χώρου γράφεται ως ένωση κλειστών συνόλων. (Υπόδειξη:  $F = \bigcup_{x \in F} \{x\}$ )
3. Έστω  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  συνεής συνάρτηση, όπου το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών έχουν εφοδιαστεί με τις κλασικές μετρικές. Να δείξετε ότι το σύνολο  $F = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\}$  είναι κλειστό.

4. Στον  $c_0$ , εφοδιασμένο με την μετρική που επάγεται από την  $\sup$ -norm, θεωρούμε το υποσύνολο  $c_{00}$ . Να δείξετε ότι το  $c_{00}$  δεν είναι κλειστό.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την ακολουθία  $x_k \in c_{00}$ , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\forall k, x_k = (1, 1/2, \dots, 1/k, 0, 0, 0, \dots).$$

Θεωρήστε επίσης την ακολουθία  $x = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 1/(n+1), \dots)$ . Δείξτε ότι  $x_k \rightarrow x$ , αλλά ενώ  $x_k \in c_{00}$ ,  $x \notin c_{00}$ .

5. Στον  $c_0$ , εφοδιασμένο με την μετρική που επάγεται από την  $\sup$ -norm, θεωρούμε το υποσύνολο  $c_{00}$ . Να δείξετε ότι το  $c_{00}$  δεν είναι ανοικτό.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ένα τυχαίο σημείο του  $c_{00}$ , έστω το:

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(n), 0, 0, 0, \dots).$$

Έπειτα,  $\forall \epsilon > 0$ , θεωρήστε το σημείο:

$$y = (x(1), x(2), \dots, x(n), \frac{\epsilon}{n+1}, \frac{\epsilon}{n+2}, \dots).$$

Δείξτε ότι η απόσταση του  $x$  από το  $y$  είναι μικρότερη από  $\epsilon$ , αλλά  $y \notin c_{00}$ .

6. Στον  $\mathbb{R}$  με τη συνήθη μετρική, να δείξετε ότι  $A' = \mathbb{N}$ , όπου  $A = \{n + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}\}$ .
7. Εάν  $X \neq \emptyset$ , θεωρούμε τον χώρο  $(X, \delta)$ , όπου  $\delta$  η διακριτή μετρική. Εάν το  $A$  είναι πυκνό μέσα στον  $X$ , να δείξετε ότι  $A = X$ .
8. Να δείξετε ότι ο  $c_0$ , εφοδιασμένος με την  $\sup$ -norm είναι διαχωρίσιμος.