

## Πραγματική Ανάλυση

7<sup>ο</sup> Φυλλάδιο Ασκήσεων:  
Μετρικοί Χώροι: Συναρτήσεις

Σταύρος Αναστασίου

1. Να εξετάσετε εάν είναι συνεχής η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y}{x^3+y^2}, & \text{για } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{για } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

2. Εξετάστε εάν είναι συνεχής η συνάρτηση  $f : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$ ,  $x = \{x_1, x_2, \dots\}$
3. Θεωρούμε τον χώρο  $C[0, 1]$  εφοδιασμένο με την μετρική που επάγεται από την  $\|\cdot\|_\infty$ , τον χώρο  $[0, 1] \times C[0, 1]$ , εφοδιασμένο με τη μετρική γινόμενο και την συνάρτηση:

$$Ev : [0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad Ev(x, f) = f(x).$$

Να εξετάσετε εάν είναι συνεχής στο σημείο  $(0, Id)$ .

4. Να δείξετε ότι η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιομόρφως συνεχής.
5. Να δείξετε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής  $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{Z}, |\cdot|)$  είναι ομοιομόρφως συνεχής.
6. Να δείξετε ότι, εάν  $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ομοιομόρφως συνεχείς συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση  $h : X \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ ,  $h(x) = (f(x), g(x))$  είναι ομοιομόρφως συνεχής. Εδώ,  $d_2$  είναι η ευκλείδεια μετρική.
7. Εξετάστε εάν μπορεί να υπάρχει ισομετρία από το σύνολο  $(0, 1)$  στο σύνολο  $(3, 7)$  (εφοδιασμένα με την μετρική που επάγεται από την απόλυτη τιμή).
8. Εάν  $(X, d)$  τυχαίος μετρικός χώρος, να δείξετε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής  $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \rightarrow (X, d)$  είναι συνεχής. Να δείξετε ότι το ίδιο ισχύει εάν το πεδίο ορισμού αντικατασταθεί από το  $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ . Έπειτα εξετάστε εάν είναι ομοιόμορφοι χώροι οι  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ .
9. Να κατασκευάσετε ομοιομορφισμό μεταξύ του  $\mathbb{R}^2$  και του  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x < 3, 2 < y < 7\}$ .
10. Στον  $\mathbb{R}^2$  εξετάστε εάν είναι ισοδύναμες οι μετρικές  $d_1$ ,  $d_\infty$ .