Πραγματική Ανάλυση

8^o Φυλλάδιο Ασκήσεων:
Πλήρεις Μετρικοί Χώροι

Σταύρος Αναστασίου

1. Εξετάστε εάν τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, εφοδιασμένα με την ευκλείδεια μετρική, είναι πλήρη ή όχι.
   - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0\}$
   - $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 3\}$

2. Έστω A, B υποσύνολα του πλήρους μετρικού χώρου (X, d), τα οποία εφοδιάζουμε με τις επαγόμενες μετρικές. Να δείξετε ότι εάν είναι πλήρη, τότε και το $A \cap B$ είναι πλήρης μετρικός χώρος με την επαγόμενη μετρική.

3. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και τις μετρικές $d(m, n) = |m - n|$, $\rho(m, n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Να δείξετε ότι ο $(\mathbb{N}, d)$ είναι πλήρης χώρος, αλλά ο $(\mathbb{N}, \rho)$ όχι. Έπειτα να δείξετε ότι οι δύο μετρικές είναι ισοδύναμες.

4. Εξετάστε εάν είναι πλήρης μετρικός χώρος ο $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, εφοδιασμένος με την μετρική που επάγεται από την απόλυτη τιμή.

5. Ας υποθέσουμε ότι d_1, d_2 είναι δύο μετρικές πάνω στο ίδιο σύνολο X, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:
$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y), \ \forall x, y \in X, \ a, b > 0.$$
Να δείξετε ότι μία ακολουθία του (X, d_1) είναι ακολουθία Cauchy αν, και μόνο αν, είναι ακολουθία Cauchy και του (X, d_2).

6. Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνάρτηση συνεχής και επί, ενώ ακόμα:
$$d(x, y) \leq \sigma(f(x), f(y)).$$
Να δείξετε ότι εάν ο μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης τότε και ο (Y, σ) είναι πλήρης.

7. Να δείξετε ότι ο χώρος $(C[0, 1], d_\infty)$ είναι πλήρης.
Υπόδειξη: Αρκεί να δείξετε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του $l_\infty([0, 1])$. Θεωρήστε λοιπόν ακολουθία $f_n \in C[0, 1]$ η οποία να συγκλίνει στην $f \in l_\infty([0, 1])$ και δείξτε ότι η f είναι συνεχής εκμεταλλευόμενοι το ότι:
$$\forall x, y \in [0, 1], \ |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$