Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach

Σταύρος Αναστασίου

Στο σημείωμα αυτό μελετάμε το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, καθώς επίσης και μερικές εφαρμογές αυτού.

Στόχος μας είναι η εύρεση σταθερών σημείων, δηλαδή, εάν $f : X \to X$, αναζητούμε σημεία $x_0 \in X$ τέτοια, ώστε $f(x_0) = x_0$.

Αποδεικνύεται ότι τέτοια σημεία υπάρχουν, στην περίπτωση που η f είναι συστολή, με πεδίο ορισμού έναν πλήρη μετρικό χώρο.

Ορισμός 1. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Μία απεικόνιση $f : X \to X$ ονομάζεται συστολική απεικόνιση (ή συστολή) αν*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda\rho(x, y),$$

για κάθε $x, y \in X$, όπου $\lambda < 1$. Το λ ονομάζεται και «συστολική σταθερά» της f.

Παραδείγματα 1.

- *Η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συστολή. Πράγματι, έστω $x, y \in [1, +\infty)$ και ας υποθέσουμε ότι $x \leq y$. Τότε, $y = x + \frac{t}{2}$, για κάποιο $t \geq 0$, και έτσι:*
$$d(f(x), f(y)) = d(f(x), f(x + \frac{t}{2})) = \sqrt{x + \frac{t}{2}} - \sqrt{x} \leq \frac{t}{2}.$$

- *Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο*
$$f(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$$
είναι συστολική απεικόνιση (γιατί;).

- *Η απεικόνιση $f : l_\infty \to l_\infty$, με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x$, είναι επίσης συστολή (να το δείξετε).*

Η συμπεριφορά συστολικής απεικόνισης, ορισμένης σε πλήρη μετρικό χώρο, καθορίζεται πλήρως από το θεώρημα σταθερού σημείου.

Σε ό,τι ακολουθεί, συμβολίζουμε ως f^n όχι την n–ιοστή δύναμη της f, αλλά την n–ιοστή σύνθεση της f με τον εαυτό της, δηλαδή $f^n(x) = f \circ f \circ ... \circ f(x)$, όπου η σύνθεση έχει γίνει n φορές.

Θεώρημα 1 (σταθερού σημείου του Banach)**.** *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και ας υποθέσουμε ότι η $f : X \to X$ είναι απεικόνιση συστολής. Τότε η f διαθέτει μοναδικό σταθερό σημείο $x_0 \in X$ και μάλιστα $\rho(f^n(x), x_0) \leq \lambda^n\rho(x, x_0)$, $\forall x \in X$, όπου λ η συστολική σταθερά της f.*

Απόδειξη. Η συστολή f ικανοποιεί την ανίσωση:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y),$$

για κάποιο $\lambda < 1$. Έτσι, θα είναι:

$$\rho(f^2(x), f^2(y)) \leq \lambda \rho(f(x), f(y)) \leq \lambda^2 \rho(x, y),$$

και συνεχίζοντας, καταλήγουμε στην:

$$\rho(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n \rho(x, y),$$

για οποιοδήποτε $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι επομένως ακολουθία του Cauchy, αφού:

$$\rho(f^m(x), f^n(x)) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \rho(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \lambda^{n+k} \rho(f(x), x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(f(x), x).$$

Καθώς $\lambda < 1$, θα είναι $\lambda^n \to 0$.

Αφού η ακολουθία αυτή είναι ακολουθία Cauchy, το όριό της υπάρχει και είναι μοναδικό. Συνεπώς:

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = x_0 \in X,$$

καθώς ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος. Το x_0 αυτό είναι επίσης ανεξάρτητο του x (γιατί;).

Μένει να δείξουμε ότι το x_0 είναι σταθερό σημείο της $f(x)$, δηλαδή ότι $f(x_0) = x_0$. Είναι:

$$\rho(x_0, f(x_0)) \leq \rho(x_0, f^n(x)) + \rho(f^n(x), f^{n+1}(x)) + \rho(f^{n+1}(x), f(x_0)) \leq$$

$$\leq (1+\lambda)\rho(x_0, f^n(x)) + \lambda^n \rho(x, f(x)) \to 0.$$

Έτσι, $\rho(x_0, f(x_0)) = 0$. □

Με απλά λόγια, το παραπάνω θεώρημα εγγυάται ότι μία συστολική απεικόνιση, ορισμένη σε κλειστό σύνολο, διαθέτει μοναδικό σταθερό σημείο και μάλιστα, $\forall x \in X$, οι ακολουθίες $x_n = f^n(x) = f \circ ... \circ f(x)$ συγκλίνουν στο σταθερό σημείο αυτό.

Σχόλιο 1. *Το θεώρημα οφείλεται στον Πολωνό μαθηματικό Stefan Banach* $(1892-1945)$. *Το παρουσίασε το* 1922.

Το πρόβλημα που ανακύπτει είναι η εύρεση συνθηκών υπό τις οποίες μία απεικόνιση είναι απεικόνιση συστολής. Για τους ευκλείδειους χώρους έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 2. *Έστω A ανοικτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη, με $\|Df(x)\| \leq M$, $\forall x \in A$. Τότε $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$, για $x, y \in A$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία x, y, δηλαδή την καμπύλη $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$. Καθώς το A είναι κυρτό, η $\gamma(t)$ περιέχεται στο A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t) = f(\gamma(t))$. Θα είναι:

$$\|g'(t)\| = \|Df(\gamma(t))\gamma'(t)\| \leq M\|y-x\|.$$

Έτσι, από το θεώρημα μέσης τιμής (για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών), θα είναι:

$$\|f(y) - f(x)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq M\|y-x\|.$$

□

Σχόλιο 2. *Στο προηγούμενο θεώρημα χρειαστήκαμε την έννοια της στάθμης ενός πίνακα. Επειδή αναφερόμαστε σε ευκλείδειους χώρους, χρησιμοποιούμε την στάθμη πινάκων που επάγεται από την ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^n$: εάν A ένας πίνακας, τότε ως νόρμα του πίνακα A θεωρούμε την $\|A\| = \lambda$, όπου λ η τετραγωνική ρίζα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής του A^tA.*

Παράδειγμα 1. *Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, ότι η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y),$$

είναι συστολή. Θα το αποδείξουμε τώρα και πάλι, με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος.

Είναι:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

οπότε $\|Df(x,y)\| = 1/2$, επομένως, η $f(x,y)$ είναι απεικόνιση συστολής.

Έτσι, από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach, έπεται ότι η $f(x,y)$ διαθέτει μοναδικό σταθερό σημείο (λύνοντας την εξίσωση $f(x,y) = (x,y)$ διαπιστώνουμε εύκολα ότι αυτό είναι το $(0,0)$), ενώ όλες οι ακολουθίες $f^n(x,y)$ τείνουν στο σταθερό σημείο αυτό.

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα των μαθηματικών και διαθέτει πάρα πολλές εφαρμογές, τόσο θεωρητικού, όσο και πρακτικού ενδιαφέροντος.

Παραδείγματα 2.

1. *Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0,\ f \in C^1[0,1]$. Παρατηρούμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι τα σταθερά σημεία της συνάρτησης*

   $$T : [0,1] \to \mathbb{R},\ T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

   Επομένως, εάν η T είναι συστολή, λύνεται η εξίσωση $f(x) = 0$. Μάλιστα, στην περίπτωση αυτή, ξεκινώντας από οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [0,1]$ και θεωρώντας την ακολουθία $T^n(x_0)$, μπορούμε να προσεγγίσουμε, αριθμητικώς, την λύση αυτή με όση ακρίβεια επιθυμούμε.

   Ο αναγνώστης, που είναι οικείος με μαθήματα Αριθμητικής Ανάλυσης, θα αναγνώρισε την μέθοδο επίλυσης εξίσώσεων Newton-Raphson στο παράδειγμα αυτό.

2. *Ας υποθέσουμε ότι* $f \in C^1[0,1/2]$, *με* $|f'(x)| \leq 1/4,\ \forall x \in [0,1/2]$. *Τότε υπάρχει* $x_0 \in [0,1/2]$ *τέτοιο, ώστε* $f(x_0) = x_0 + \frac{1}{2}x_0^2$.

   Όντως, θεωρούμε την συνάρτηση $h : [0,1/2] \to \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$. *Αρκεί να βρούμε σταθερό σημείο της* h. *Όμως,* $\forall x \in [0,1/2],\ |h'(x)| \leq |f'(x)| + |x| < 3/4$, *επομένως η* h *είναι συστολή.*

3. *Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε πως το πρόβλημα αρχικών τιμών:*

$$y'(x) = y(x) + x,\ y(0) = 1,$$

   διαθέτει μία λύση $y(x)$, *η οποία να είναι κλάσης* C^1 *στο διάστημα* $[-\epsilon,\epsilon]$. *Θεωρούμε την απεικόνιση:*

$$F : C[-\epsilon,\epsilon] \to C[-\epsilon,\epsilon],\ F(y(t)) = 1 + \int_0^t (y(s)+s)ds.$$

   Παρατηρούμε ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών που μας απασχολεί ισοδυναμεί με την εξίσωση $F(y(t)) = y(t)$, *επομένως, αρκεί να βρούμε συνθήκες υπό τις οποίες η* F *είναι συστολή.*

   Σε μαθήματα Διαφορικών Εξισώσεων, η γενίκευση του παραδείγματος αυτού αποτελεί το Θεώρημα Ύπαρξης Λύσεων ΣΔΕ του Picard.

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (0,1/4) \to (0,1/4)$, με τύπο $f(x) = x^2$. Να δείξετε ότι είναι συστολή, αλλά δεν έχει σταθερό σημείο. Αντιβαίνει αυτό στο θεώρημα του Banach;

2. Έστω $a > 0$. Να εξηγήσετε γιατί οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = a$ αποτελούν τα σταθερά σημεία της συνάρτησης:

$$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}).$$

   Επιλέξτε ένα $b > 0$ τέτοιο, ώστε η T να είναι συστολή, εάν θεωρηθεί ως συνάρτηση $T : [b,+\infty) \to [b,+\infty)$. Ποιο είναι το σταθερό της σημείο;

3. Εφαρμόστε τη μέθοδο Newton-Raphson για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{5}$, ξεκινώντας από το $x_0 = 2$.

4. Εάν f, g, h ομοιομορφισμοί του $[0,1]$ αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης $f \circ h = h \circ g$ ως προς h. Γράψτε το πρόβλημα αυτό ως πρόβλημα αναζήτησης σταθερού σημείου μιας κατάλληλης απεικόνισης.

5. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα σταθερού σημείου, προκειμένου να δείξετε τη χρησιμότητα της μεθόδου Newton–Raphson στην αριθμητική επίλυση συστημάτων εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα:

- Υποθέστε ότι η $F : A \to \mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση κλάσης C^2, όπου A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ενδιαφερόμαστε να λύσουμε την εξίσωση $F(x) = 0$.
- Έστω ακόμα ότι η παραπάνω εξίσωση διαθέτει ρίζα στο A, την x_0, και ότι επιπλέον ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο x_0, $DF(x_0)$, αντιστρέφεται.
- Δείξτε ότι υπάρχει κλειστή γειτονιά

$$B = \{x \in A / \|x - x_0\| \leq r\},\ r > 0,$$

τέτοια, ώστε σε κάθε σημείο της ο Ιακωβιανός πίνακας της F να αντιστρέφεται και εντός της οποίας το x_0 να είναι η μοναδική λύση της $F(x) = 0$.
- Ορίστε την απεικόνιση:

$$N : B \to B,\ N(x) = x - (DF(x))^{-1} F(x),$$

εξηγήστε γιατί είναι καλώς ορισμένη και δείξτε ότι τα σταθερά σημεία της είναι λύσεις της $F(x) = 0$ και αντιστρόφως.
- Αποδείξτε ότι, αν το r επιλεγεί αρκούντως μικρό, η απεικόνιση N είναι συστολή.
- Εξηγήστε πώς θα προσεγγίσουμε αριθμητικώς την λύση x_0 της εξίσωσης $F(x) = 0$.