Πραγματική Ανάλυση

1^o Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων:

Σταύρος Αναστασίου

Υπολογισμός $\sup, \inf, \max, \min$

1. Να βρεθούν, εάν υπάρχουν, τα $\sup,\ \inf,\ \max,\ \min$ των παρακάτω συνόλων.

   (α΄) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$

   (β΄) $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$

   (γ΄) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$

   (δ΄) $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

   (ε΄) $G = \{5 + \frac{6}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$

[Γ1, σελίδα 37 του pdf, άσκηση 22]

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε ότι, στην ουσία, $A = (1, \sqrt{3}]$. Άρα $\sup A = \max A = \sqrt{3}$, $\inf A = 1$ και $\min A$ δεν υπάρχει.

(β΄) Ομοίως, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \in (1, \sqrt{3}]\}$. Έτσι, αφού το $\sqrt{3}$ δεν είναι ρητός (μπορείτε να το αποδείξετε;), έχουμε: $\sup B = \sqrt{3}$, $\inf B = 1$, ενώ $\max B$, $\min B$ δεν υπάρχουν.

(γ΄) Λύνοντας την ανισότητα, βλέπουμε ότι πρέπει:

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Έτσι, $D = (-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$ και τα δύο άκρα είναι αντίστοιχα τα $\inf D$, $\sup D$ ενώ $\max D, \min D$ δεν υπάρχουν.

(δ΄) Το E μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο συνόλων, ανάλογα με το εάν το n είναι άρτιος ή περιττός. Είναι δηλαδή:

$$E = \{\frac{1}{2k-1} - 1,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\frac{1}{2k} + 1,\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ιδιότητες των $\sup, \inf$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\sup E = \max E = \frac{3}{2},\ \inf E = -1,$$

ενώ $\inf E$ δεν υπάρχει.

(εʹ) Το G δεν είναι κάτω φραγμένο (γιατί;), επομένως δεν διαθέτει $\inf, \min$. Χρησιμοποιώντας και πάλι τις ιδιότητες του sup ως προς την ένωση, συμπεραίνουμε ότι $\sup G = \max G = 11$.

Σύγκλιση ακολουθιών

1. Να εξετάσετε εάν συγκλίνουν οι παρακάτω ακολουθίες.

   (αʹ) $a_n = \frac{3^n}{n!}$ (γʹ) $c_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ (εʹ) $e_n = n^2 \sin \frac{1}{n^3}$

   (βʹ) $b_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ (δʹ) $d_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n$ (ϛʹ) $f_n = \frac{2^n n!}{n^n}$

   [Γ1, σελίδα 61 του pdf, άσκηση 6]

   Λύση:

   (αʹ) Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του λόγου για να δείξετε ότι αυτή η ακολουθία συγκλίνει στο $0 \in \mathbb{R}$.

   (βʹ) Είναι:
   $$b_n = \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{n(3 + \frac{2}{n})} \to \frac{2}{3}.$$

   (γʹ) Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη λεγόμενη «συζυγή παράσταση», δηλαδή με $n + \sqrt{n^2 - n}$. Έχουμε:
   $$c_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} =$$
   $$= \frac{n}{n(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})} \to \frac{1}{2}.$$

   (δʹ) Χρησιμοποιήστε το κριτήριο της ρίζας για να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο $0 \in \mathbb{R}$.

   (εʹ) Όταν $t > 0$ είναι $\sin(t) < t$ (να το δείξετε!!), επομένως $\sin \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$. Έτσι, η e_n ικανοποιεί την ανισότητα $0 \leq e_n \leq 1/n$, και από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $e_n \to 0$.

   (ϛʹ) Κριτήριο του λόγου. Η ακολουθία συγκλίνει στο 0.

2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες.

   (αʹ) $a_n = \frac{5^n+n}{6^n-n}$ (γʹ) $c_n = n^2(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n+1}})$

   (βʹ) $b_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$ (δʹ) $d_n = \frac{n^n}{n!}$

   [Γ1, σελίδα 62 του pdf, άσκηση 7]

Λύση:

(α′) $a_n = \frac{5^n+n}{6^n-n} = \frac{6^n((5/6)^n+n/6^n)}{6^n(1-n/6^n)} = \frac{(\frac{5}{6})^n+\frac{n}{6^n}}{1-\frac{n}{6^n}} \to \frac{0}{1} = 0.$

(β′) Εύκολα προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \leq b_n \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $b_n \to \frac{1}{2}$.

(γ′) Πολλαπλασιάστε και διαιρέστε με την συζυγή παράσταση, για να προκύψει ότι:

$$c_n = n^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} =$$

$$= \frac{n^2}{n(n+1)}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} \to \frac{1}{2}.$$

(δ′) $d_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{2}\frac{n}{1} \geq n$. Επομένως η d_n τείνει στο $+\infty$.