Πραγματική Ανάλυση

$2^o$ Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων:
Σειρές Πραγματικών Αριθμών

Σταύρος Αναστασίου

1. Δώστε παράδειγμα συγκλίνουσας σειράς $\sum a_n$, για την οποία η $\sum |a_n|$ να αποκλίνει.
   Λύση: Μια τέτοια σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Εξηγήστε γιατί.

2. Βρείτε, εάν υπάρχει, το όριο της $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.
   Λύση: Είναι:
   $$a_n = \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}),$$
   οπότε η ακολουθία μερικών αθροισμάτων γίνεται:
   $$s_n = \sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) =$$
   $$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}) \to \frac{3}{4}.$$

3. Εξετάστε, ως προς τη σύγκλιση, τις παρακάτω σειρές.

   (α′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$ (β′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-n}{n^3+1}$ (γ′) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{1+n^2} - n)$

   Λύση:

   (α′) Είναι:
   $$\frac{n^2}{n^4+1} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2},$$
   και η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο της σύγκρισης, συγκλίνει και η αρχική σειρά.

(β′) Θεωρούμε τη σειρά $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Είναι:

$$\lim_{n+\infty} \frac{\frac{n^2-n}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+1}{n^3-n^2} = ... = 1.$$

Επομένως, αφού πρόκειται για δύο σειρές θετικών όρων και το παραπάνω όριο είναι θετικό, από το κριτήριο της οριακής σύγκρισης, η σειρά μας αποκλίνει.

(γ′) Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση, προκύπτει ότι:

$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}.$$

Ακόμα:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}+n} \to \frac{1}{2}.$$

Έτσι, από το κριτήριο οριακής σύγκρισης, αφού η $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, αποκλίνει και η δική μας σειρά.

4. Ελέγξτε εάν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν απολύτως, υπό συνθήκη ή αποκλίνουν.

(α′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^4}{n^3+1}$ (γ′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^2}$ (ε′) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{(\ln n)^2}$

(β′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(1.3)^n}$ (δ′) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ (ϛ′) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$

Λύση:

(α′) Καθώς:

$$\lim \frac{n^4}{n^3+1} = +\infty$$

η σειρά αποκλίνει.

(β′) Έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{(1.3)^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1.3)^n},$$

η οποία συγκλίνει, ως γεωμετρική. Άρα η σειρά μας συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

(γ′) Έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

και καθώς η τελευταία σειρά συγκλίνει, και η δική μας συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

(δ′) Η ακολουθία $\frac{1}{n\ln n}$, $n \geq 2$, είναι θετική, φθίνουσα και τείνει στο 0. Επομένως, από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά μας συγκλίνει.

Όμως, κατ′ απόλυτη τιμή η σειρά αποκλίνει (δείξτε το με το κριτήριο του ολοκληρώματος), δηλαδή η σειρά μας συγκλίνει υπό συνθήκη.

(ε′) Η σειρά ισούται με την $\sum \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}$, η οποία συγκλίνει υπό συνθήκη (μελετήστε την όπως στο προηγούμενο παράδειγμα).

(ϛ′) Η σειρά συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

5. Ελέγξτε εάν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν.

(α′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n-3^n}$ (γ′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ (ε′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^2 e^{\frac{-n^3}{3}}$

(β′) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-n}$ (δ′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{5^n}$ (ϛ′) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Λύση:

(α′) Θεωρούμε τη σειρά με γενικό όρο $\frac{1}{5^n}$. Είναι:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/(5^n-3^n)}{1/5^n} = \lim \frac{5^n}{5^n-3^n} = 1,$$

και αφού η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η δική μας σειρά, από το κριτήριο της οριακής σύγκρισης.

(β′) Η σειρά αποκλίνει. Για να το δείξετε, θεωρήστε την αρμονική σειρά και εφαρμόστε το κριτήριο της οριακής σύγκρισης.

(γ′) Πρόκειται για εναλλάσσουσα σειρά. Καθώς ο όρος $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ είναι πάντοτε θετικός και φθίνει προς το μηδέν, από το κριτήριο του Leibniz, η σειρά συγκλίνει.

(δ′) Πρόκειται για το άθροισμα δύο γεωμετρικών σειρών που συγκλίνουν, άρα συγκλίνει και η ίδια.

(ε′) Θεωρούμε την σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n n^2 e^{\frac{-n^3}{3}}|$. Η σειρά αυτή αποδεικνύεται ότι συγκλίνει, από το κριτήριο του ολοκληρώματος. Πράγματι:

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{\frac{-x^3}{3}} dx = \lim_{a\to+\infty} \int_1^a x^2 e^{\frac{-x^3}{3}} dx = -\lim_{a\to+\infty} [e^{\frac{-x^3}{3}}]_1^a = e^{\frac{-1}{3}}.$$

Άρα η σειρά μας συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

(ϛ′) Είναι:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Δηλαδή, η σειρά μας είναι τηλεσκοπική. Αφού:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0,$$

η σειρά μας συγκλίνει και μάλιστα στο 1.

6. Θεωρούμε τη σειρά $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+....$ Να δείξετε ότι υπάρχει αναδιάταξη αυτής της σειράς που να συγκλίνει στο 12.
Λύση: Υπολογίζουμε τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής. Είναι:

$$s_1=1/2,\ s_2=0,\ s_3=1/3,\ s_4=0,\ s_5=1/4,\ s_6=0...$$

επομένως η σειρά αυτή συγκλίνει στο 0.

Από την άλλη, η σειρά αυτή δεν συγκλίνει απολύτως, διότι η αντίστοιχη σειρά θετικών όρων ισούται με την $2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$. Επομένως, η σειρά μας συγκλίνει υπό συνθήκη και άρα υπάρχει αναδιάταξη αυτής που να συγκλίνει στο 12.

7. Η ακολουθία $a_n$ διαθέτει μόνο θετικούς όρους και ακόμα η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι συγκλίνει και η $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$.
Λύση: Ο γενικός όρος της πρώτης σειράς είναι ο $x_n=\frac{a_n}{1+a_n}$. Η σειρά συγκλίνει, άρα $x_n\to 0$, το οποίο σημαίνει ότι:

$$a_n=\frac{x_n}{1-x_n}\to 0.$$

Επομένως, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0$ να είναι $a_n<1\Rightarrow a_n^2<a_n$. Συνεπώς, για τα $n$ αυτά:

$$\frac{a_n^2}{1+a_n^2}<\frac{a_n}{1+a_n}$$

και έτσι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο της σύγκρισης.