Πραγματική Ανάλυση

3^o Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων:
Μετρικοί Χώροι: Παραδείγματα

Σταύρος Αναστασίου

1. Εξετάστε εάν ο $\mathbb{R}$, εφοδιασμένος με τη συνάρτηση $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ d(x, y) = (x-y)^2$, είναι μετρικός χώρος..
   Λύση: Η συνάρτηση είναι της μορφής που πρέπει να έχει μία μετρική. Ακόμα, είναι εύκολο να δείξουμε ότι:

   - $d(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$, ενώ $d(x, y) = 0 \to x = 0$,
   - $d(x, y) = d(y, x),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

   Έτσι, μένει να αποδειχτεί μόνο η τριγωνική ανισότητα, η οποία γίνεται:

   $$(x - z)^2 \leq (x - y)^2 + (y - z)^2.$$

   Η ισότητα αυτή δεν ισχύει, τουλάχιστον για όλα τα $x, y, z \in \mathbb{R}$. Πράγματι, δεν ισχύει για τα $x = 9, y = 1, z = 0$. Επομένως, το ζεύγος $(\mathbb{R}, d)$ αυτό δεν αποτελεί μετρικό χώρο.

2. Σχεδιάστε τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας 1 των μετρικών χώρων $l^2_p,\ p = 1, 2, \infty$.
   Λύση: Στον l^2_1, η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου γίνεται: $|x| + |y| = 1$.

   Στον l^2_2, η εξίσωση του κύκλου γίνεται: $x^2 + y^2 = 1$.

   Στον l^2_∞, η εξίσωση του κύκλου γίνεται: $\sup\{|x|, |y|\} = 1$.

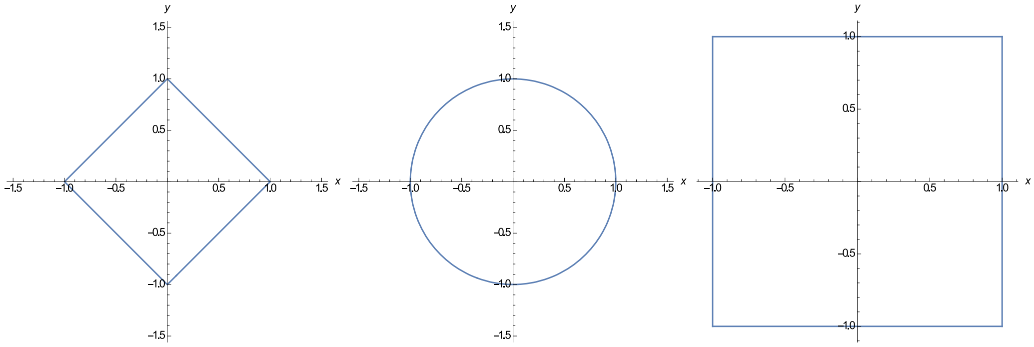
   Οι κύκλοι αυτοί απεικονίζονται στο σχήμα (1).

3. Θεωρούμε το σύνολο $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, δηλαδή, το εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένο με την μετρική που επάγεται από την συνάρτηση $f : \bar{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$, η οποία ορίζεται ως εξής:

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{για } x \in \mathbb{R} \\ -1, & \text{για } x = -\infty \\ 1, & \text{για } x = \infty \end{cases}.$$

   Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $x = 0$ από τα σημεία $y = 1,\ z = +\infty,\ w = -\infty$.
   Λύση: Η μετρική που επάγεται από τη συνάρτηση αυτή είναι, ως γνωστόν, η:

   $$d : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R},\ d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$



Σχήμα 1: Οι κύκλοι κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1 του l_1^2 (αριστερά), l_2^2 (κέντρο), l_∞^2 (δεξιά).

Δεν είναι δύσκολο επομένως να υπολογίσουμε ότι:

$$d(0,1) = \frac{1}{2},\ d(0,+\infty) = 1 = d(0,-\infty).$$

4. Εάν $f,g \in C[0,1]$, με $f(x) = x,\ g(x) = x^3$, υπολογίστε την απόσταση της f από την g ως προς τις μετρικές d_1, d_2, d_∞.
Λύση:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |x - x^3| dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4]_0^1 = 1/4$$

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (x - x^3)^2 dx} = \sqrt{[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{10}x^{10}]_0^1}\frac{1}{\sqrt{30}}$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |x - x^3| = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

5. Εάν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, να δείξετε ότι $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|,\ \forall x,y \in X$.
Λύση: Είναι:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|,$$

επομένως, $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. Ομοίως, $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$.

6. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}^n$ των πραγματικών πολυωνύμων, μιας μεταβλητής, βαθμού το πολύ $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathcal{P}^n \to \mathbb{R}$, που ορίζεται ως εξής: εάν $p \in \mathcal{P}^n,\ p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x^1 + a_0,\ \|p(x)\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$. Να δείξετε ότι το ζεύγος $(\mathcal{P}^n, \|\cdot\|)$ αποτελεί χώρο με νόρμα.
Λύση: Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη ότι οι χώροι l_1^n είναι χώροι με νόρμα.

7. Να δείξετε ότι ο χώρος c_0 των ακολουθιών που συγκλίνουν στο $0 \in \mathbb{R}$ περιέχει γνησίως όλους τους $l_p, p \geq 1$.
Λύση: Για να το πετύχουμε αυτό, αρκεί να βρούμε μία ακολουθία a_n που να συγκλίνει στο 0, ενώ ταυτόχρονα η $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p$ δεν συγκλίνει.

Μία τέτοια ακολουθία είναι η $a_n = \frac{1}{log(n+1)}$. Πράγματι, $a_n \to 0$. Όμως η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p$ δεν συγκλίνει, για οποιοδήποτε $p \geq 1$.

Πράγματι, για να το δείξουμε εφαρμόζουμε το κριτήριο του Raabe. Είναι:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{(log(2+n))^p}{(log(1+n))^p} - 1) = 0 < 1,$$

άρα, για οποιοδήποτε $p \geq 1$, η σειρά αποκλίνει.