Πραγματική Ανάλυση

4^o Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων:
Μετρικοί Χώροι: Τοπολογικές Έννοιες

Σταύρος Αναστασίου

1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $F, G \subseteq X$. Να δείξετε ότι εάν το F είναι κλειστό και το G είναι ανοικτό, τότε το $F \setminus G$ είναι κλειστό.
   Λύση: Είναι $F \setminus G = F \cap (X \setminus G)$, οπότε το $F \setminus G$ είναι τομή δύο κλειστών συνόλων, άρα κλειστό.

2. ;Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών έχουν εφοδιαστεί με τις κλασικές μετρικές. Να δείξετε ότι το σύνολο $G = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) > 0\}$ είναι ανοικτό.
   Λύση: Έστω $x_0 \in G$. Θα δείξουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$, έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ με $x \in B(x_0, \delta)$ να είναι $f(x) > 0$, άρα $B(x_0, \delta) \subseteq G$ και επομένως το G είναι ανοικτό.

3. Να δείξετε ότι ο c_0 είναι κλειστό υποσύνολο του l_∞.
   Λύση: Έστω x_k ακολουθία του c_0 (Προσοχή! Η x_k είναι ακολουθία στοιχείων του c_0, άρα πρόκειται για ακολουθία ακολουθιών! Δηλαδή, $\forall k \in \mathbb{N}$, το x_k δεν είναι αριθμός αλλά ακολουθία!! Θα την συμβολίζουμε ως $x_k = (x_k(1), x_k(2), ...)$). Υποθέτουμε ότι $x_k \to x$, ως προς την μετρική που επάγεται από την $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in c_0$.

   Η ακολουθία x_k συγκλίνει στην $x = (x(1), x(2), \ldots)$, άρα, $\forall \epsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0$ να είναι $\|x_k - x\|_\infty < \epsilon/2$.

   Αυτό όμως σημαίνει ότι $|x_{k_0}(n) - x(n)| \leq \epsilon/2,\ \forall n \in \mathbb{N}$ $(*)$.

   Η ακολουθία x_{k_0} ανήκει στο c_0, οπότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N}$, με $n \geq n_0$, να είναι $|x_{k_0}(n)| < \epsilon/2$ $(**)$.

   Για την ακολουθία x έχουμε:

   $$|x(n)| \leq |x(n) - x_{k_0}(n)| + |x_{k_0}(n)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

   οπότε η x συγκλίνει στο 0 και άρα ο c_0 είναι κλειστό υποσύνολο του l_∞.

4. Υπάρχει υποσύνολο A του $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, τέτοιο ώστε $A' = \mathbb{Q}$;
   Λύση: Όχι. Για κάθε $A \subset \mathbb{R}$, το A' είναι κλειστό, ενώ το Q όχι.

5. Να βρεθούν τα σύνορα και τα εσωτερικά των παρακάτω συνόλων του $\mathbb{R}^2$, το οποίο είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη μετρική.

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y \neq 0\}$
- $C = A \cup B$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \notin \mathbb{Q}\}$

Απαντήσεις:

- $\partial A = A,\ int(A) = \emptyset$
- $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y = 0\}$
- Συνδυάστε τις δύο προηγούμενες απαντήσεις.
- $\partial D = \mathbb{R}^2,\ int(D) = \emptyset$

6. Στον χώρο $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ θεωρούμε το υποσύνολο $A = \{f \in C[0, 1], f(1/2) = 0\}$. Να εξετάσετε εάν είναι ανοικτό ή κλειστό.
   Λύση: Έστω $f_n(x)$ ακολουθία σημείων του A (δηλαδή, $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(1/2) = 0$), η οποία συγκλίνει στο $f(x) \in C[0, 1]$.

   Είναι: $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_\infty < \epsilon$.

   Ειδικά για $n = n_0,\ \|f_{n_0}(x) - f(x)\|_\infty < \epsilon$. Άρα, $|f_{n_0}(1/2) - f(1/2)| = |f(1/2)| < \epsilon$, άρα $f(1/2) = 0$, οπότε το σύνολο αυτό είναι κλειστό.