Πραγματική Ανάλυση

5^o Φυλλάδιο Λυμένων Ασκήσεων:
Μετρικοί Χώροι: Συναρτήσεις

Σταύρος Αναστασίου

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (X, \delta)$, όπου δ η διακριτή μετρική. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής εάν, και μόνο εάν, είναι σταθερή.
   Λύση: Εάν η f είναι σταθερή, τότε είναι τετριμμένο να αποδειχθεί ότι είναι και συνεχής (κάντε το!).

   Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f είναι συνεχής. Πρέπει να δείξουμε ότι είναι σταθερή. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = y_0 \in X$. Το σύνολο $\{y_0\}$ είναι ταυτοχρόνως και ανοικτό και κλειστό, άρα η προεικόνα του, $f^{-1}(y_0)$ θα πρέπει να είναι ταυτοχρόνως ανοικτή και κλειστή, αφού η f είναι συνεχής. Στο $\mathbb{R}$ όμως, με τη συνήθη μετρική, τα μόνα σύνολα που είναι ταυτοχρόνως και ανοικτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και το ίδιο το $\mathbb{R}$. Καθώς $f^{-1}(y_0) \neq \emptyset$, συμπεραίνουμε ότι $f^{-1}(y_0) = \mathbb{R}$, άρα f σταθερή.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to l_p,\ 1 \leq p < \infty$, που ορίζεται ως $f(t) = tx + (1-t)y,\ x, y \in l_p$, είναι συνεχής.
   Λύση: Έστω $t_0 \in [0,1]$. Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο αυτό t_0 πρέπει να δείξουμε ότι, $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ τέτοιο, ώστε $\forall t \in [0,1]$ με $|t - t_0| < \delta$ είναι $\|f(t) - f(t_0)\|_p < \epsilon$.

   Όμως:

   $$\|f(t)-f(t_0)\|_p = \|tx+y-ty-t_0x-y+t_0y\|_p = \|(t-t_0)(x-y)\|_p = |t-t_0|\|x-y\|_p.$$

   Επιλέγοντας $\delta < \epsilon/\|x-y\|_p$ πληρούται ο ορισμός, άρα η f είναι συνεχής παντού στο $[0,1]$.

3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = 1/x$ είναι συνεχής, αλλά όχι ομοιομόρφως συνεχής.
   Λύση: Η f είναι συνεχής, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων που ορίζεται παντού. Όμως, δεν είναι ομοιομόρφως συνεχής.

   Πράγματι, θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{n+1},\ y_n = \frac{1}{2n+1}$. Τότε, $|x_n - y_n| \to 0$, όμως $|f(x_n) - f(y_n)| = n$.

4. Εξετάστε εάν το $\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφο του $\mathbb{Z}$.
   Λύση: Τα δύο σύνολα δεν είναι ισοπληθικά, άρα δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα (γιατί;).

5. Κατασκευάστε ομοιομορφισμό ανάμεσα στο $\mathbb{R}$ και στο σύνολο $(a, b),\ a < b$.
Λύση: Όπως έχουμε δει, η συνάρτηση $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ αποτελεί ομοιομορφισμό. Η συνάρτηση $f : (-\pi/2, \pi/2) \to (0, 1)$, με τύπο $f(t) = t/\pi + 1/2$ αποτελεί επίσης ομοιομορφισμό (να το δείξετε!). Η συνάρτηση $g : (0, 1) \to (a, b)$ με τύπο $g(t) = (1 - t)a + tb$ είναι επίσης ομοιομορφισμός. Η σύνθεσή τους:
$$h := g \circ f \circ \arctan : \mathbb{R} \to (a, b),$$
με τύπο $h(t) = (1 - \frac{\arctan t}{\pi} - \frac{1}{2})a + (\frac{\arctan t}{\pi} + \frac{1}{2})b$ αποτελεί τον ζητούμενο ομοιομορφισμό.

6. Έστω $f : (X, d) \to (X, d)$ συνεχής, (X, d) τυχαίος μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι $f \circ f = f$. Να δείξετε ότι το σύνολο $f(x)$ είναι κλειστό.
Λύση: Έστω y_n ακολουθία του συνόλου $f(X)$, η οποία συγκλίνει στο σημείο $y \in X$. Πρέπει να δείξουμε ότι $y \in f(X)$.

   Για κάθε $n \in \mathbb{N},\ \exists x_n :\ f(x_n) = y_n$, διότι $y_n \in f(X)$. Ακόμα, η f είναι συνεχής και $f \circ f = f$, άρα:
$$f(y_n) = f(f(x_n)) = f(x_n) = y_n.$$
   Έτσι, $y_n \to y$ και $y_n = f(y_n) \to f(y)$, οπότε $f(y) = y$, συνεπώς $y \in f(X)$, άρα $f(X)$ κλειστό.