Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης
και
το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Σταύρος Αναστασίου

1 Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης

1.1 Το πρόβλημα

Ας υποθέσουμε ότι $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Υπό ποίες προϋποθέσεις υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f; Πότε δηλαδή υπάρχει μια συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, την οποία θα αποκαλούμε «αντίστροφη της f», θα την συμβολίζουμε ως f^{-1}, και θα είναι τέτοια ώστε $g(f(x)) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$;

Κατ΄ αρχάς, να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη της f υπάρχει όταν η f είναι $1-1$. Αυτό όμως το κριτήριο δεν είναι τόσο εύκολα εφαρμόσιμο, ειδικά όταν ο τύπος της f δεν είναι πολύ απλός.
- Οι περισσότερες συναρτήσεις, ακόμα και οι απλούστερες, δεν αντιστρέφονται, τουλάχιστον όχι για όλα τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού τους.

Παράδειγμα 1. *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^2$. Η συνάρτηση αυτή δεν διαθέτει αντίστροφη για όλα τα σημεία του πεδιου ορισμού της.*

Πράγματι, μπορεί $f(0) = 0$, οπότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε την «αντίστροφη στο 0» ως $g(0) = f^{-1}(0) = 0$, όμως αυτό δεν συμβαίνει γενικά. Για παράδειγμα, $f(1) = f(-1) = 1$ και εάν υπήρχε αντίστροφη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα έπρεπε να ικανοποιεί τις σχέσεις $g(1) = 1$ και $g(1) = -1$, το οποίο είναι αδύνατον για συνάρτηση.

Για αυτό κάνουμε μια υποχώρηση: δεν απαιτούμε η αντίστροφη συνάρτηση να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^n$, παρά μόνο σε μια γειτονιά ενός σημείου $y_0 = f(x_0)$.

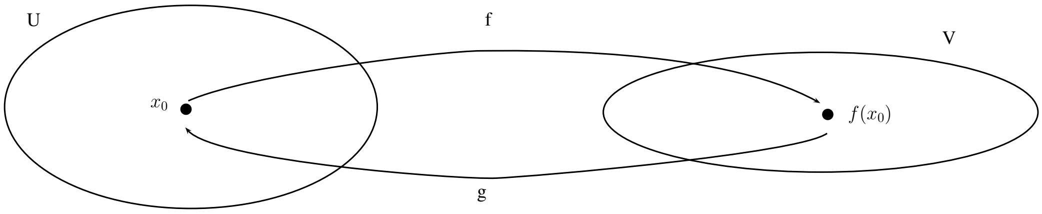
Παράδειγμα 2. *Θεωρούμε και πάλι την συνάρτηση που έχει ίδιο τύπο με αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος, δηλαδή την x^2. Αυτή τη φορά όμως περιορίζουμε το πεδίο ορισμού της. Θεωρούμε δηλαδή την $\tilde{f} : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \ \tilde{f}(x) = x^2$. Τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής, η οποία είναι η $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty), \ g(x) = \sqrt{x}$.*

Στόχος μας λοιπόν είναι να βρούμε συνθήκες, εύκολες στην εφαρμογή, υπό τις οποίες υπάρχει η αντίστροφη μιας συνάρτησης, έστω και τοπικώς. Επομένως, το πρόβλημα που μας απασχολεί εδώ είναι το εξής:

Κεντρικό Πρόβλημα: Διατυπώστε τις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί η f :

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε να αντιστρέφεται, τουλάχιστον τοπικώς, δηλαδή σε μια γειτονιά του $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να υπάρχει γειτονιά U του x_0 και γειτονιά V του $y_0 = f(x_0)$ ώστε ο περιορισμός $\tilde{f} : U \to V$ να αντιστρέφεται. Την αντίστροφη $g : V \to U$ του περιορισμού $\tilde{f}$ θα την ονομάζουμε «τοπική αντίστροφη της f στο x_0» (βλέπε και σχήμα (1)).

Καθώς το πρόβλημα αυτό αποδεικνύεται αρκετά περίπλοκο, ας το εξετάσουμε πρώτα στη μία διάσταση.



Σχήμα 1: Η $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και η αντίστροφή της g. Προσέξτε ότι οι f, g έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών. Επίσης, δεν χρειάζεται να είναι ορισμένες σε όλο το $\mathbb{R}^n$, αλλά σε μια μικρή γειτονιά του x_0 και του $y_0 = f(x_0)$ αντίστοιχα.

1.2 Το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης στη μία διάσταση

Ας υποθέσουμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1 και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $y_0 = f(x_0)$. Εάν η f αντιστρέφεται, έστω και σε μια γειτονιά του x_0, τότε η αντίστροφή της, έστω $g(x)$, ικανοποιεί τη σχέση $g(f(x)) = x$. Εάν και η g παραγωγίζεται, τότε ο κανόνας της αλυσίδας βεβαιώνει ότι $g'(f(x))f'(x) = 1$. Ειδικά για το σημείο x_0, έχουμε ότι $g'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$, πράγμα που σημαίνει ότι $f'(x_0) \neq 0$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, εάν τόσο η f όσο και η αντίστροφή της παραγωγίζονται, σε μια γειτονιά του $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε θα ικανοποιείται η συνθήκη $f'(x_0) \neq 0$. Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης μάς βεβαιώνει ότι, στη μία διάσταση, εάν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, η f αντιστρέφεται σε μια γειτονιά του x_0 και μάλιστα η αντίστροφή της επίσης παραγωγίζεται.

Θεώρημα 1 (Αντίστροφης Συνάρτησης στη μία διάσταση)**.**
Ας υποθέσουμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1, $x_0 \in \mathbb{R}$, με $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) \neq 0$. Τότε υπάρχουν ανοικτές γειτονιές U του x_0 και V του y_0 τέτοιες ώστε:

- *ο περιορισμός $f|_U : U \to V$ είναι $1-1$ (και επομένως ο περιορισμός της f στην U αντιστρέφεται).*
- *η αντίστροφη συνάρτηση της $f|_U$, η $h : V \to U$, είναι κλάσης C^1.*
- $\forall x \in U,\ h'(f(x)) = (f(x))^{-1}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$. Έπειτα θα δείξουμε πώς η γενική περίπτωση ανάγεται σε αυτήν.

Χωρίζουμε την απόδειξη σε μικρότερα βήματα.

<u>Βήμα 1ον: Ορίζουμε τις περιοχές U, V.</u> Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ G(x) = x - f(x).$$

Η G είναι προφανώς κλάσης C^1 και μάλιστα $G(0) = G'(0) = 0$. Συνεπώς, $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $\forall x$ με $-2\epsilon \leq x \leq 2\epsilon$ να είναι $|G'(x)| \leq 1/2$.

Ορίζουμε $V = (-\epsilon, \epsilon)$ και $U = f^{-1}(V) \cap (-2\epsilon, 2\epsilon) = \{x \in (-2\epsilon, 2\epsilon), f(x) \in V\}$. Αυτές είναι οι περιοχές που αναφέρονται στην εκφώνηση του θεωρήματος. Προσοχή: δεν έχουμε ακόμα δείξει ότι η f αντιστρέφεται· εδώ το $f^{-1}(V)$ δηλώνει την προεικόνα του V. Παρατηρούμε ότι, όντως, $f(U) = V$ και ότι το U είναι ανοικτό.

<u>Βήμα 2ον: Δείχνουμε ότι η f αντιστρέφεται.</u> Για κάθε $y \in V$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g_y(x) = y + G(x).$$

Θα δείξουμε ότι, εάν το πεδίο ορισμού της είναι το $(-2\epsilon, 2\epsilon)$, το σύνολο τιμών της είναι επίσης το $(-2\epsilon, 2\epsilon)$.

Κατάρχάς, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι κλάσης C^1, με $g_y'(x) = G'(x)$. Ακόμα:

$$|g_y(x)| \leq |y| + |G(x)|.$$

Αφού όμως $y \in V$ έχουμε ότι $|y| \leq \epsilon$. Επίσης, επειδή $|G'(x)| \leq 1/2$ στο διάστημα $(-2\epsilon, 2\epsilon)$ και $G(0) = 0$, το Θεώρημα Μέσης Τιμής δίνει:

$$|G(x)| \leq \frac{1}{2}|x|,$$

οπότε:

$$|g_y(x)| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Άρα, $g_y : (-2\epsilon, 2\epsilon) \to (-2\epsilon, 2\epsilon)$, με $|g_y(x)| = |G'(x)| \leq 1/2$, οπότε η g_y είναι συστολή και επομένως, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, διαθέτει μοναδικό σταθερό σημείο $x \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$ τέτοιο, ώστε:

$$x = g_y(x) = y + G(x) = y + x - f(x) \Rightarrow f(x) = y.$$

Άρα, $\forall y \in V$ υπάρχει μοναδικό $x \in (-2\epsilon, 2\epsilon)$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Ορίζοντας, $\forall y \in V$, $h(y)$ να είναι το μοναδικό αυτό σταθερό σημείο x, παρατηρούμε ότι η:

$$h : V \to U,$$

είναι όντως η αντίστροφη της $f|_U$.

Βήμα 3ον: Δείχνουμε ότι η h είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι η $h : V \to U$ είναι συνεχής στο τυχαίο $y_0 \in V$. Έστω $y \in V$ και ας είναι $x_0, x \in U$ τέτοια, ώστε $y_0 = f(x_0), y = f(x)$.

Αφού, $\forall x \in U,\ x = f(x) + G(x)$, έχουμε:

$$|x - x_0| = |f(x) + G(x) - f(x_0) - G(x_0)| \leq |G(x) - G(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |f(x) - f(x_0)| \Rightarrow \frac{1}{2}|x - x_0| \leq |f(x) - f(x_0)|.$$

Δηλαδή (αφού $x = h(y)$), δείξαμε ότι $|h(y) - h(y_0)| \leq 2|y - y_0|$, γεγονός που αποδεικνύει ότι η h είναι συνεχής συνάρτηση.

Βήμα 4ον: Υπολογίζουμε την παράγωγο της h. Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της h στο σημείο $y_0 \in V$, χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Αφού η h είναι συνεχής, το $y \to y_0$ συνεπάγεται ότι $h(y) \to h(y_0) \Rightarrow x \to x_0$, επομένως το τελευταίο όριο γίνεται:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

αρκεί $f'(x_0) \neq 0$. Επειδή όμως $f'(x) = x - G'(x)$ και $|G'(x)| \leq 1/2$, έπεται ότι $|f'(x)| > 1/2$, οπότε δεν μηδενίζεται.

Άρα, όντως $h'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow h'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$. $\square$

Σχόλιο 1. *Δείχνουμε τώρα πώς μπορούν, στην γενική περίπτωση, οι συνθήκες $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$ να αντικατασταθούν με τις $f(a) = b,\ f'(a) \neq 0$.*

Εάν $f(a) = b$, θεωρούμε τη συνάρτηση $\tilde{f}(x) = f(x + a) - b$ και δουλεύουμε με την $\tilde{f}$, η οποία ικανοποιεί την $\tilde{f}(0) = 0$, οπότε συνεχίζουμε την ως άνω απόδειξη. Για να απαλείψουμε την συνθήκη $\tilde{f}'(0) = 1$, ας υποθέσουμε ότι $\tilde{f}'(0) = c \neq 1$. Τότε θεωρούμε την $\bar{f}(x) = \tilde{f}(x/c)$, η οποία προφανώς ικανοποιεί την $\bar{f}'(0) = \tilde{f}'(0)\frac{1}{c} = 1$, συνεπώς συνεχίζουμε την παραπάνω απόδεξη με την $\bar{f}$.

Σχόλιο 2. *Η υπόθεση ότι η f' είναι κλάσης C^1 είναι απαραίτητη, καθώς χωρίς αυτήν μπορεί η f να μην αντιστρέφεται. Όντως, θεωρήστε την:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{για } x \neq 0 \\ 0, & \text{για } x = 0 \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η f είναι κλάσης C^0 αλλά όχι C^1 και ότι η f δεν είναι $1-1$ σε οποιαδήποτε γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}$.

1.3 Το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης στις πολλές διαστάσεις

Τόσο η εκφώνηση, όσο και η απόδειξη, του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης για απεικονίσεις του $\mathbb{R}^n$ είναι εντελώς ανάλογη με την περίπτωση της μίας διάστασης.

Θεώρημα 2 (Αντίστροφης Συνάρτησης)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση κλάσης C^1, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $f(x_0) = y_0$ και $\det(D_{x_0}f) \neq 0$ (όπου $D_{x_0}f$ ο Ιακωβιανός πίνακας της f στο σημείο x_0). Τότε υπάρχουν γειτονιές U του x_0 και V του y_0 τέτοιες ώστε:*

- *ο περιορισμός $f|_U : U \to V$ να είναι $1-1$ (και επομένως ο περιορισμός της f στην U αντιστρέφεται).*
- *η αντίστροφη συνάρτηση της $f|_U$, η $g : V \to U$ είναι κλάσης C^1.*
- *$\forall x \in U,\ D_{f(x)}g = (D_xf)^{-1}$.*

Απόδειξη. Όπως και πριν, θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση όπου $x_0 = y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ και $D_0f = Id$. Έπειτα, θα δείξουμε πώς μπορούμε να περάσουμε από την γενική περίπτωση σε αυτήν. Επίσης, να τονίσουμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με την μετρική που επάγεται από την $\sup -norm$.

Τα βήματα της απόδειξης είναι ακριβώς τα ίδια με πριν.

Βήμα 1ον: Ορίζουμε τις περιοχές U, V. Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ G(x) = x - f(x).$$

Η G είναι προφανώς κλάσης C^1 και μάλιστα $G(0) = 0$ και $D_0G = 0$ (το τελευταίο είναι ο μηδενικός πίνακας). Συνεπώς, $\exists \epsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $\forall x$ με $x \in B(0, 2\epsilon)$ να είναι $\|D_xG \cdot u\| \leq 1/2\|u\|,\ u \in \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε $V = B(0, \epsilon)$ και $U = f^{-1}(V) \cap B(0, 2\epsilon) = \{x \in B(0, 2\epsilon), f(x) \in V\}$. Αυτές είναι οι περιοχές που αναφέρονται στην εκφώνηση του θεωρήματος. Προσοχή: δεν έχουμε ακόμα δείξει ότι η f αντιστρέφεται· εδώ το $f^{-1}(V)$ δηλώνει την προεικόνα του V. Παρατηρούμε ότι, όντως, $f(U) = V$ και ότι το U είναι ανοικτό.

Βήμα 2ον: Δείχνουμε ότι η f αντιστρέφεται. Για κάθε $y \in V$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g_y(x) = y + G(x).$$

Τότε, $\|g_y\|_\infty \leq 2\epsilon$, άρα $g_y : B(0, 2\epsilon) \to B(0, 2\epsilon)$. Ακόμα, $\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_\infty$ επομένως η g_y είναι συστολή.

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη της f_U, την $h : V \to U$.

Βήμα 3ον: Δείχνουμε ότι η h είναι συνεχής.

Βήμα 4ον: Υπολογίζουμε την παράγωγο της h. Για να υπολογίσουμε την παράγωγο της h στο σημείο $y_0 \in V$, χρησιμοποιούμε τον ορισμό ή τον κανόνα της αλυσίδας. $\square$

Άσκηση 1. *Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στην παραπάνω απόδειξη. Έπειτα, δείξτε πώς η γενική περίπτωση, όπου $x_0, y_0 \neq 0$ και $\det(D_{x_0}f) \neq 0$, μπορεί να αναχθεί στην παραπάνω.*

Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$. Εξετάστε εάν αντιστρέφεται. Έπειτα, περιοριστείτε σε μια γειτονιά του $0 \in \mathbb{R}$ και βρείτε αντίστροφο της f εντός αυτής της γειτονιάς. Ποια γειτονιά είναι αυτή;

2. Θεωρούμε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Εξετάστε εάν αντιστρέφεται σε γειτονιά ενός τυχαίου σημείου $x_0 \in \mathbb{R}$. Βρείτε, με δύο τρόπους, την παράγωγο της αντιστρόφου της f στο τυχαίο σημείο $f(x_0)$.

3. Θεωρούμε την $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (x^2 + y, 2x + y^2)$. Βρείτε τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ στα οποία η f δεν αντιστρέφεται, ούτε τοπικώς. Έπειτα υπολογίστε, εάν υπάρχει, τον Ιακωβιανό πίνακα της αντιστρόφου της f στο $(0, 0)$.

4. Ας υποθέσουμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1 και ακόμα $|f(x) - f(y)| > c|x - y|,\ c > 0$. Δείξτε ότι η f είναι $1 - 1$. Έπειτα, γενικεύστε την άσκηση αυτή στις παραπάνω διαστάσεις.

2 Το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

2.1 Το πρόβλημα

Για να βρούμε τις τετραγωνικές ρίζες του αριθμού $y \in \mathbb{R}$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = y$ ως προς x. Παρατηρούμε όμως ότι αυτή η λύση δεν ορίζει συνάρτηση: πράγματι, η λύση είναι $x = \pm\sqrt{y}$, δηλαδή δεν δίνει μονότιμη απάντηση.

Σχόλιο 3. *Για μελλοντική χρήση, ας ξαναγράψουμε το πρόβλημα αυτό σε πιο «αυστηρή» μορφή. Έχουμε λοιπόν την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 - y$ και θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x, y) = 0$ ως προς x. Αναζητούμε δηλαδή συνάρτηση $x = g(y)$ που να ικανοποιεί την εξίσωση, με άλλα λόγια, απαιτούμε $f(g(y), y) = 0$. Όπως είδαμε, τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει, διότι εάν υπήρχε θα ήταν δίτιμη.*

Όπως και πριν όμως, μπορούμε να «χαλαρώσουμε» λίγο τις απαιτήσεις μας και να απαιτήσουμε η συνάρτηση $g(y)$ που λύνει την εξίσωση να ορίζεται, όχι σε όλο το $\mathbb{R}$, αλλά σε μια μικρή γειτονιά ενός σημείου που μας ενδιαφέρει.

Παράδειγμα 3. *Γνωρίζουμε ότι η «θετική τετραγωνική ρίζα» του 4 είναι το 2. Αυτό σημαίνει ότι $f(2, 4) = 0$, με τον συμβολισμό που υϊοθετήσαμε παραπάνω. Δηλαδή, εάν «επιλέξω να εργαστώ μόνο με τις θετικές ρίζες», υπάρχει συνάρτηση $x = g(y)$ που να λύνει την εξίσωση (δηλαδή που ικανοποιεί την $f(g(y), y) = 0$) τουλάχιστον για $y = 4$. Μήπως αυτό επεκτείνεται σε μια ολόκληρη γειτονιά του 4 και του 2; Δηλαδή, μήπως υπάρχει ανοικτή γειτονιά U του $4 \in \mathbb{R}$ και V του $2 \in \mathbb{R}$ και συνάρτηση $g : U \to V$ που να λύνει την εξίσωση, δηλαδή που να ικανοποιεί την $f(g(y), y) = 0,\ \forall y \in U$;*

Προφανώς ναι, με $U = V = (0, +\infty)$ και $g : U \to V,\ g(y) = \sqrt{y}$.

Προσέξτε ότι μία άλλη λύση της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ προκύπτει για $x_1 = -2, y_1 = 4$, αφού είναι $f(-2, 4) = 0$. Υπάρχουν γειτονιές V_1 του -2 και U_1 του 4 και συνάρτηση

$h : U_1 \to V_1$ *που να λύνει την εξίσωση, δηλαδή που να είναι τέτοια ώστε* $f(h(y), y) = 0, \ \forall y \in U_1$;

Προφανώς ναι, με $U_1 = (0, +\infty), \ V_1 = (-\infty, 0), \ h : U_1 \to V_1, \ h(y) = -\sqrt{y}$.

Όμως, δεν είναι όλες οι εξισώσεις τόσο εύκολο να λυθούν, ενώ η κατάσταση δυσκολεύει όταν έχουμε να μελετήσουμε ένα σύστημα εξισώσεων. Όντως, στο πρόβλημα που είδαμε μέχρι στιγμής είχαμε μία εξίσωση με δύο μεταβλητές. Τι θα γινόταν εάν είχαμε m εξισώσεις με $k > m$ μεταβλητές;

Θεωρούμε δηλαδή το σύστημα εξισώσεων (εδώ $k = m + n$ μεταβλητές):

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, .., x_n, y_1, y_2, .., y_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, .., x_n, y_1, y_2, .., y_m) = 0 \\ ... \\ f_m(x_1, x_2, .., x_n, y_1, y_2, .., y_m) = 0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

ή, κομψότερα, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

με τύπο $f(x_1, ..x_n, y_1, .., y_m) = (f_1, .., f_m)$ και αναζητούμε συνθήκες υπό τις οποίες η εξίσωση $f(x, y) = 0 \in \mathbb{R}^m, \ x = (x_1, .., x_n), \ y = (y_1, .., y_m)$, να λύνεται ως προς x, τουλάχιστον τοπικώς.

Δηλαδή, εάν $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ με $f(x_0, y_0) = 0$, αναζητούμε συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχουν γειτονιές U του y_0 και V του x_0, καθώς επίσης και συνάρτηση $g : U \to V$ τέτοια, ώστε $f(g(y), y) = 0$. Τις συνθήκες αυτές μας τις δίνει το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων.

2.2 Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων στις δύο διαστάσεις

Για να απλοποιήσουμε τη μελέτη μας ξεκινάμε από την απλή περίπτωση όπου έχουμε μία εξίσωση με δύο αγνώστους. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(x, y) = 0$, ενώ γνωρίζουμε ότι $f(x_0, y_0) = 0$, ότι δηλαδή το (x_0, y_0) είναι λύση της εξίσωσης. Αναζητούμε συνθήκες υπό τις οποίες υπάρχει συνάρτηση $x = g(y)$ τέτοια ώστε $f(g(y), y) = 0$, τουλάχιστον σε μια γειτονιά του (x_0, y_0).

Θεώρημα 3 (πεπλεγμένης συνάρτησης στις δύο διαστάσεις)**.** *Έστω* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση κλάσης* C^1 *και* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *τέτοιο, ώστε* $f(x_0, y_0) = 0$. *Εάν:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0,$$

τότε υπάρχει γειτονιά $U \subset \mathbb{R}$ *του* y_0 *και* $V \subset \mathbb{R}$, *καθώς επίσης και συνάρτηση* $g : U \to V$, *ώστε:*

$$f(g(y), y) = y, \ \forall y \in U.$$

Ακόμα, η g *είναι κλάσης* C^1 *και:*

$$g'(y) = -(f_x(x, y))^{-1} f_y(x, y).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ F(x,y) = (y, f(x,y)),$$

η οποία είναι προφανώς κλάσης C^1 και ακόμα:

$$d_{(x_0,y_0)}F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η Ιακωβιανή ορίζουσα της F στο (x_0, y_0) είναι μη μηδενική και, από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης, η F αντιστρέφεται τοπικώς σε μια γειτονιά του (x_0, y_0).

Υπάρχει δηλαδή γειτονιά W_1 του (x_0, y_0) και W_2 του $(u_0, v_0) = F(x_0, y_0)$, καθώς επίσης και απεικόνιση κλάσης C^1:

$$G : W_2 \to W_1, \ G(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v)),$$

τέτοια, ώστε:

$$F(G(u,v)) = (u,v) \Rightarrow (g_2(u,v), f(g_1(u,v), g_2(u,v))) = (u,v),$$

από την οποία σχέση συμπεραίνουμε ότι $g_2(u,v) = u$, οπότε:

$$f(g_1(u,v), u) = v.$$

Θέτουμε $v = 0$ και προκύπτει η εξίσωση $f(g_1(u,0), u) = 0$, δηλαδή, η $g_1(u,0)$ είναι η ζητούμενη λύση.

Πιο τυπικά, η λύση που αναφέρεται στην εκφώνηση είναι η:

$$g : U = W_2 \cap \{(0,y), \ y \in \mathbb{R}\} \to V = W_1 \cap \{(x,0), \ x \in \mathbb{R}\}, \ g(y) = g_1(y,0),$$

η οποία προφανώς είναι κλάσης C^1 και ικανοποιεί την εξίσωση $f(g(y), y) = 0, \ \forall y \in U$.

Ο κανόνας της αλυσίδας δίνει την παράγωγο της g. □

2.3 Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης στις πολλές διαστάσεις

Στην γενική περίπτωση, όπου έχουμε m το πλήθος εξισώσεις και $n + m$ το πλήθος μεταβλητές, το θεώρημα διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 4. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ απεικόνιση κλάσης C^1 και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ τέτοιο, ώστε $f(x_0, y_0) = 0$. Έστω ακόμα ότι:*

$$\det(d^x_{(x_0,y_0)} f) \neq 0,$$

όπου $d^x_{(x_0,y_0)} f$ ο Ιακωβιανός πίνακας της f ως προς x στο σημείο (x_0, y_0). Τότε, υπάρχει γειτονιά U του $y_0 \in \mathbb{R}^m$, V του $x_0 \in \mathbb{R}^m$ και απεικόνιση κλάσης C^1, $g : U \to V$ τέτοια, ώστε:

$$f(g(y), y) = 0, \ \forall y \in U.$$

Ακόμα:

$$d_y g = -(d^y_{(g(y),y)} f)^{-1} d^x_{(g(y),y)} f.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

Ασκήσεις

1. Μπορεί η εξίσωση $(x^2+y^2+2z^2)^{1/2} = \cos z$ να λυθεί, κατά τρόπο μοναδικό, ως προς y συναρτήσει των x, z σε μια γειτονιά του $(0,1,0)$;

2. Θεωρούμε την εξίσωση $z + 2\cos(x+y+z) = 2$. Δείξτε ότι δέχεται λύση της μορφής $z = g(x,y)$, τουλάχιστον σε μια γειτονιά του $(0,0,0)$, ότι αυτή η λύση είναι κλάσης C^1 και υπολογίστε την g_x, όπου αυτή υπάρχει.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2y + xy^2z + xyz$. Εξηγείστε για ποιο λόγο η επιφάνεια $f(x,y,z) = 4$ αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = g(x,y)$, τουλάχιστον σε μια γειτονιά του $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$.

4. Παρατηρούμε ότι το σύστημα:

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 & = 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 & = 2 \end{cases}$$

διαθέτει μία λύση, την $(x,y,u,v) = (1,1,1,1,1)$. Μπορεί να λυθεί ως προς u, v, συναρτήσει των x, y, z, σε μια γειτονιά του σημείου αυτού;

5. Ας υποθέσουμε ότι $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, με $f(0,0) = 0$. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η f προκειμένου η εξίσωση $f(f(x,y),y) = 0$ να λύνεται ως προς y συναρτήσει του x, τουλάχιστον σε μια γειτονιά του $(0,0)$;

6. Δώστε μία απόδειξη του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων.

Αναφορές

- Spivak M, “Calculus on Manifolds”, Benjamin–Cummings, 1965.
- Rudin W, “Principles of Mathematical Analysis”, McGraw–Hill, 1976.
- Lang S, “Differentiable Manifolds”, Springer, 1988.